

边坡稳定性分析的改进条分法

张 雄

(成都科技大学水利系, 610065)

文 摘 本文利用极限分析和刚性有限元离散概念^[1], 提出了一种用于边坡稳定性分析的改进条分法。该方法利用优化技术直接调整条块间及滑裂面上的内力, 使得对给定的滑裂面安全系数取最大值, 而对各个不同的滑裂面寻求使安全系数为最小的滑裂面。对滑裂面的形状、条块间的内力之间的关系等不做任何假定, 因此能更真实地反映边坡的实际稳定状态。

关键词 边坡稳定性, 条分法, 极限分析。

1 前 言

边坡稳定性问题是岩体工程中的一个很重要的问题, 目前主要使用条分法和有限元分析法进行边坡稳定性的分析和评价。利用有限元分析可揭示出边坡可能受损或破坏的部位, 但如何从有限元分析的结果得出合适的定量的衡量稳定程度的指标和建立一套评价稳定性的标准有待于进一步研究。而条分法力学模型简单, 可得出定量的稳定性评价指标——“安全系数”, 容易为工程人员接受, 因此条分法仍然是一个很活跃的边坡稳定性分析方法。

图1为某边坡中一典型条块的受力情况。该边坡被分为 N 个条块, 未知量有 $6N-2$ 个, 即: 安全系数 F ; 滑裂面上法向力 P 的大小及作用点的位置($2N$ 个); 滑裂面上切向力 T 的大小(N 个); 条块间法向力 E 、切向力 S 及作用点的位置($3N-3$ 个)。根据滑裂面处的库伦-摩尔强度准则可列出 N 个方程, 因此还有 $5N-2$ 个未知量, 但却只有 $3N$ 个静力平衡条件, 是一个超静定问题, 还需做 $2N-2$ 个假设。当条块宽度比较小时可以认为滑裂面上的法向力 P 作用于该条块上滑裂面的中点, 这样还有 $N-2$ 个未知数, 为了求解, 还需对条块间内力的推力线的位置或推力的作用方向做出假设。

自Fellenius^[1]1927年提出条分法以来, 经过许多学者的改进, 已广泛地应用于边坡的稳定性分析和设计中。这些方法都不是通过引入土体的本构关系和变形协调条件将超静定问题化为静定问题, 而是在假设多余未知函数的基础上利用库伦屈服准则和力的平衡条件进行求解的^[1-10]。例如Bishop^[3]假定土条左右面上的剪力相互抵消, Morgenstern和Price^[4]假定了条分面上剪力和水平推力比值的相似形 $f(x)$, Janbu^[5]假定了推力线的位置, 等等。为了获得较合理的结果, Morgenstern和Price^[4]指出, 对多余未知函数的假定必须使所得的解满足合

理性要求,即在垂直面上的应力分布不应破坏屈服条件并且保证土条接触面上不产生拉应力。上述作者建立了满足一定工程需要的数值方法,但是对于按照什么规律来选择、调整多余未知函数,使得求出的解满足合理性条件的问题,还没有很好地解决。

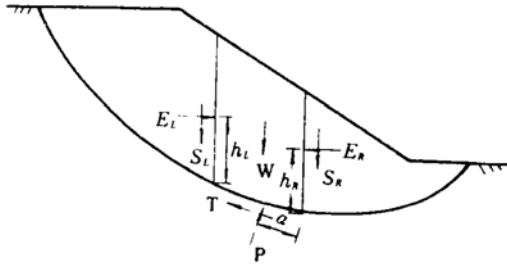


图1 条块的受力分析

由于图1中的边坡是一个超静定问题,存在有无穷多个内力分布场满足平衡条件和力的边界条件。本文利用最优化技术寻求临界滑裂面。该方法不对滑裂面的形状以及条块间内力之间的关系做任何假定,因此它比较合理地反映了边坡的实际稳定状态。

2 安全系数的确定

边坡稳定性分析问题实质上是极限分析问题。边坡在外载和重力的作用下,其某些部位的破坏并不意味着边坡的总体破坏,这时它仍然具有承载能力。只有当这些破坏部位进一步扩展使得边坡变成一个机构,这时边坡才完全丧失了承载能力,发生整体破坏。这个状态可以用弹塑性分析或极限分析的方法求得。

从极限分析的观点来看,如果求得的土条内各点的应力状态不破坏屈服条件的话,上述各种方法相当于寻找一个静力容许解。由极限分析的下限定理知,与静力容许应力场 R_0 对应的安全系数 F'_s 不大于实际的安全系数 F_s ,因此对于某一给定滑裂面,应该调整静力容许应力场,使得安全系数取极大值。而在不同的滑裂面中,真实的滑裂面应该是使安全系数取最小值的滑裂面。这也就是潘家铮^[8]提出的极大极小值原理。

不同于其它条分法,本文将安全系数定义为边坡整体破坏时的极限载荷 F_l 与实际载荷 F_0 的比值,即

$$K_f = F_l / F_0 \quad (1)$$

这里的安全系数就是文献[13]中的极限乘子,它与由抗剪强度定义的安全系数都能反映边坡的稳定状态,但它更适合于在极限分析中使用。它们之间的联系与区别将在后面讨论。

考虑图1所示的边坡。本文假定各条块是刚体,边坡破坏时它们的运动是刚体运动,其上任一点 $P(x, y)$ 的位移 $\vec{u}(x, y) = [u, v]^T$ 可以用形心 $G(x_g, y_g)$ 的刚体位移 (u_g, v_g, θ) 来描述,即

$$\vec{u}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y - y_g \\ 0 & 1 & x_g - x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_g \\ v_g \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (2)$$

写成矩阵的形式为

$$\vec{u}(x, y) = N \cdot u_s \quad (3)$$

其中
$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y - y_s \\ 0 & 1 & x_s - x \end{bmatrix}; u_s = [u_s \quad v_s \quad \theta]^T$$

本文取条块交界面上的法向内力 E 、切向内力 S 以及滑裂面上的法向力 P 和切向力 T 为内力场,并且在滑裂面和条分面上都进行破坏准则的检验。在这里条分面和滑裂面可以统一处理,记为 β_j ,其上的内力场 R' 的法向力 N' 和切向力 T' ,即

$$R' = [N', T']^T \quad (4)$$

静力容许场 R 要求满足条块内部的平衡条件和力的边界条件,因此若应力场 R 和外载 P 在任给虚位移 u 下平衡,它应满足下列虚位移原理方程

$$\int \int \int_v \epsilon^T \sigma dv + \sum_j \int_{\beta_j} \delta^T R ds - K_f \int \int \int_v u^T P dv = 0 \quad (5)$$

其中 ϵ 为条块内部的应变; δ 为 β_j 某点的相对变形(如图2所示),它可以写为^[12]

$$\delta = B_j U'_c \quad (6)$$

其中
$$B_j = \begin{bmatrix} -l_1 & -m_1 & m_1(x - x_{s1}) - l_1(y - y_{s1}) & l_1 & m_1 & l_1(y - y_{s2}) - m_1(x - x_{s2}) \\ -l_2 & -m_2 & m_2(x - x_{s1}) - l_2(y - y_{s1}) & l_2 & m_2 & l_2(y - y_{s2}) - m_2(x - x_{s2}) \end{bmatrix}$$

$$U'_c = [u_{s1} \quad v_{s1} \quad \theta_1 \quad u_{s2} \quad v_{s2} \quad \theta_2]^T$$

l_1, m_1, l_2, m_2 分别为 β_j 的法向及切向方向余弦。

由刚性假设可知,式(5)的第1项应为零。由式(6)代入式(5)整理得

$$-\sum_j U_c'^T B_j^T R_j l_j + K_f \sum_e U_e^T P_e = 0 \quad (7)$$

其中 \sum_j 表示对所有条分面和滑裂面求和; \sum_e 表示对所有条块求和; l_j 为 β_j 的长度。把式(7)写成向量的形式,并考虑到虚位移的任意性,得

$$-B^T R + K_f P = 0 \quad (8)$$

其中 B 是由 $l_j B_j$ 按 β_j 组装而成的, R 是由 R_j 按 β_j 组装而成的,而 P 则是由 P_e 按条块组装而成的外荷载向量。式(8)即为应力场 R 应满足的平衡条件。

由前面的讨论可知,对于给定的滑裂面应寻求静力容许的应力场 R ,使得安全系数 K_f 取最大值,即

$$\left. \begin{array}{l} \text{求 } R=? \\ \max K_f(R) \\ \text{s. t. } \begin{cases} -B^T R + K_f P = 0 \\ f(R) \leq 0 \\ K_f \geq 0 \end{cases} \end{array} \right\} \quad (9)$$

其中 $f(R) \leq 0$ 为破坏准则,考虑到土体的不抗拉条件,摩尔-库伦破坏准则可以写为

$$f(R) = NR - K_s \leq 0 \quad (10)$$

其中 $N = \text{diag}(N_j)$, $K_s = [K_1, K_2, \dots, K_j, \dots]^T$,

$$N_j = \begin{bmatrix} \text{tg} \varphi & 1 \\ \text{tg} \varphi & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_j = \begin{bmatrix} c \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此求解对于给定滑裂面的安全系数的线性规划可写为

$$\begin{aligned} & \text{求 } R=? \\ & \max K_f(R) \\ & \text{s. t. } \begin{cases} -B^T R + K_f = 0 \\ NR \leq K_s \\ K_f \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

式中 R 是自由变量。式(11)是一个含自由变量的线性规划问题, 可用文[14]的算法求解。利用式(11)即可自动调节内力场 R , 使得安全系数取最大值。

对于渗流和非均匀土, 利用上面的方法可以把每一条块以自由水面或土层交界面为分界线分为若干个条块(如图3示), 将这些分界线上的内力也作为自变量, 利用式(11)即可求得在渗流作用下或对于非均匀土的安全系数。

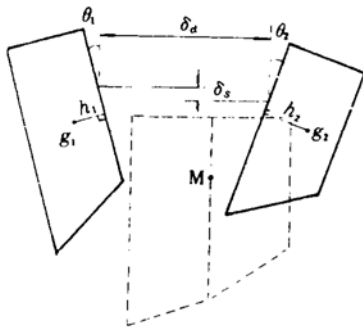


图2 条块间的相对位移

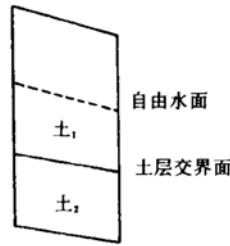


图3 非均匀土和渗流

在前面的分析中, 应力沿条块的交界线是线性分布的, 这不完全符合实际的应力分布情况。为了更好地解决这一问题, 可以把每一条块在竖直方向细分成 M 个条块, 这样就可以用分段线性的应力分布来模拟整个条分面上的非线性应力分布(如图4示), 以提高解的精度。

本文中使用的安全系数与工程中使用的安全系数 F 是有区别的。 K_f 的含义是将实际作用于边坡上的荷载增加到原来的 K_f 倍时该边坡将处于临界状态, 它的物理意义明确, 可以更好地说明边坡的稳定状态。当 $K_f > 1$ 时说明边坡处于稳定状态, 而且其稳定程度是与 K_f 成正比的。当 $K_f < 1$ 时说明边坡不稳定, 它只能承受实际作用于该边坡上荷载的 K_f 倍。而当 $K_f = 1$ 时说明该边坡处于临界状态, 它与安全系数 F 等于1的状态是完全等价的。为了说明 K_f 与 F 之间的区别与联系, 以图5中的直平面滑动面的边坡为例说明。

本文的安全系数 K_f 和工程中常用的安全系数 F 对图5中的边坡可分别写为^[13]:

$$\left. \begin{aligned} K_f &= \frac{cHcsc\alpha}{G\sin\alpha - G\cos\alpha\text{tg}\varphi} \\ F &= \frac{G\cos\alpha\text{tg}\varphi + cHcsc\alpha}{G\sin\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

当 $\alpha = \varphi$ 时, K_f 为无穷大, $F = 1 + \frac{cH}{G\sin^2\alpha}$ 。 K_f 为无穷大说明该边坡非常稳定, 无论怎么增加作用于其上的荷载 G , 它都不会失稳。 虽然从安全系数 F 的显式表达式中也可以得出这一结论, 但对复杂边坡不可能写出 F 的显式表达式, 而只能通过计算机求解, 这时仅从它的数值已不能得出类似的结论。 因此极限乘子具有明确的物理意义, 可以更真实地反映边坡的稳定程度, 并且和安全系数 F 之间存在一定的联系。

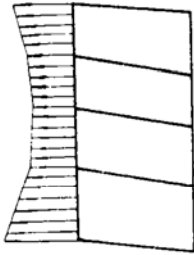


图4 模拟非线性应力分布

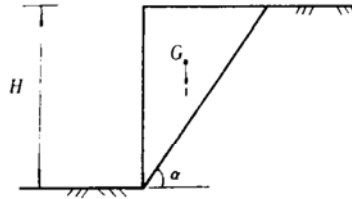


图5 直平面滑动面的边坡

如果将荷载保持不变, 而把边坡的抗剪强度 c 和 $\text{tg}\varphi$ 降低 F 倍, 该边坡也处于极限状态, 这时它应满足下列方程

$$\left. \begin{aligned} B^T R^* + P &= 0 \\ |\tau_s^*| &= \frac{c}{F} - \sigma_n^* \frac{\text{tg}\varphi}{F} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中 $R^* = [\sigma_n^* \quad \tau_s^*]^T$ 为边坡在荷载 P 作用下处于极限状态时的应力场。 在相同条件下, 边坡破坏时的极限状态应是唯一的, 由式(9)和式(13)的第1式可得

$$R^* = \frac{R}{K_f} \quad (14)$$

把式(14)代入式(13)即可得极限乘子 K_f 与安全系数 F 之间的关系为

$$F = \frac{K_f c - \sigma_n \text{tg}\varphi}{\tau_s} \quad (15)$$

3 临界滑裂面的确定

由极大极小值原理知, 对于给定滑裂面, 内力场的分布应使安全系数取极大值, 这一步是由式(11)进行的。 而对于不同滑裂面, 真实的临界滑裂面应该使安全系数取极小值。

为了灵活地模拟各种形状的滑裂面, 本文用由 m 个点 A_1, A_2, \dots, A_m 形成的三次样条曲线来近似地模拟滑裂面, 即

$$y_j(x_j) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad (j=0, 1, \dots, m-1) \quad (16)$$

其中 a_j, b_j, c_j, d_j 是插值系数。 这时极限乘子 K_f 是这 m 个点的坐标的函数, 设 $z = [z_1,$

..., $z_n]^T$ 表示这 m 个点的坐标中的独立变量, 则极限乘子可以表示为

$$K_f = K_f(z) \tag{17}$$

求解极限乘子和临界滑裂面的问题可以归纳为求解非线性数学规则

$$\left. \begin{aligned} &\text{Find } z = [z_1, \dots, z_n]^T \\ &\min K_f = K_f(z) \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

式(18)中的非线性规划可用任何标准算法求解, 如单纯形法、梯度法、Powell法等, 它可同时求出临界滑裂面和极限乘子。

4. 温度参数法

极限分析法也是分析边坡稳定性的一种方法, 但由于它计算量大, 而且只能给出一些简单问题的极限解^[15], 因此过去很少使用。近10年来, 极限分析的数值方法和理论已得到了很大的发展, 温度参数法就是一个很好的极限分析和安定分析算法^[16]。温度参数法的基本思想是利用各节点的温度参数建立自平衡的可调残余应力场 R_0 , 通过下限定理, 调节温度参数使得荷载乘子在不破坏屈服条件的情况下取极大值, 即:

$$\left. \begin{aligned} &\text{求 } T = ? \\ &\max K_f(T) \\ &\text{s. t. } \begin{cases} K_f N R_E + N R_0(T) \leq K_s \\ K_f \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

文献[12]建立了用节点温度作为自变量的自平衡残余应力的场 R_0 为

$$R_0^j = (DBK^{-1}G^j - H^j)T^j \tag{20}$$

其中 $G^j = \begin{bmatrix} G_{11}^j & G_{21}^j & G_{31}^j & G_{41}^j & G_{51}^j & G_{61}^j \\ G_{12}^j & G_{22}^j & G_{32}^j & G_{42}^j & G_{52}^j & G_{62}^j \end{bmatrix}^T$; $G_{11}^j = \frac{1}{4}LD_{11}ah \int_{-1}^1 (1-\eta)B_{11}(\eta)d\eta$; $G_{12}^j = \frac{1}{4}L$
 $\cdot D_{11}ah \int_{-1}^1 (1+\eta)B_{11}(\eta)d\eta$; $H^j = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $H_{11} = \frac{1}{2}D_{11}ah(1-\eta)$; $H_{12} = \frac{1}{2}D_{11}ah(1+\eta)$;

$T^j = [T_1 \ T_2]^j$, $i=1, \dots, 6$; $j=1, \dots, NJ$; $K = \int_{s_j} B^T DB ds$; α 为热膨胀系数, 它只是用来构造残余应力场的, 不影响计算结果, 可取为1.0; NJ 为条块交界线和滑裂线的总数; T_1, T_2 分别为弹塑性夹层两端处的温度参数值。

对所有条块组装式(19), 即得自平衡的残余应力场 R_0 为

$$R_0 = (DBK^{-1}G - H)T \tag{21}$$

很容易验证式(21)中的残余应力场 R_0 满足自平衡条件。把式(21)代入式(19)即得用温度参数法求解极限乘子的线性规划为

$$\left. \begin{aligned} &\text{求 } T = ? \\ &\max K_f(T) \\ &\text{s. t. } \begin{cases} K_f N R_E + N(DBK^{-1}G - H) \leq K_s \\ K_f \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

式(22)的自变量和约束数都小于式(10), 因此可使用它代替式(11)缩小求极限乘子的计算量, 使得条分法的模型更加完善。

5. 求解策略

寻找真实的临界滑裂面需要对大量的不同的滑裂面进行比较, 因此对给定滑裂面的求解效率应尽可能提高。下面讨论一种具有较高效率且能保证一定精度的分析方法。

引入刚性假定后, 条块之间的位移是不连续的, 只能从平均意义上定义该处的应变。条分面及滑裂面上的平均应变 $\varepsilon = [\varepsilon_d \quad \varepsilon_s]^T$ 用差分的形式写为

$$\varepsilon = \frac{1}{h_1 + h_2} \delta \quad (23)$$

式中 ε_d , ε_s 分别为法向及切向平均应变; h_1 和 h_2 分别为条块形心到交界面的垂直距离。该处的应力 $R = [\sigma_n \quad \tau_s]^T$ 可写为

$$R = D\varepsilon \quad (24)$$

其中 σ_n , τ_s 分别为法向及切向应力。对于平面应变问题, 弹性矩阵 D 为

$$D = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

对所有条块进行受力分析, 列出整体平衡方程^[12]为

$$KU = P \quad (26)$$

其中 $K = \sum_j \int_{\Omega_j} B^T D B ds$; U 为各条块形心的刚体位移向量; P 为外荷载向量。

由式(26)可以求出在外载 P 的作用下各单元形心的刚体位移 U , 然后可从式(24)中求出条分面和滑裂面处的法向及切向应力, 并由此可按式(27)求安全系数

$$F = \frac{\sum_{i=1}^N (c_i - \sigma_n^i \operatorname{tg} \varphi_i) l_i}{\sum_i \tau_s^i l_i} \quad (27)$$

其中 σ_n^i 以拉应力为正; l_i 为条块 i 上滑裂面的长度。

用式(27)计算安全系数, 其计算量小, 效率高。但由于这里的应力场是弹性应力场, 它不满足合理性要求, 因此需要做进一步改进。这可以分两步进行, 首先使用式(27)和式(18)寻找临界滑裂面, 然后将求得的临界滑裂面作为初始滑裂面利用式(22)和式(18)进一步求解安全系数 k_r , 以提高解的精度。

6 结果与讨论

为了验证本文方法的正确性, 选取倾角为 β 的均质边坡进行分析讨论。在自然灾害中, 雨水对边坡稳定性的影响是不可忽视的。一方面它在滑裂面上产生静水压力和动水压力; 另一方面它将引起土体抗剪强度的变化, 从而影响边坡的稳定性。因此给出边坡稳定状态随内

摩擦角 φ 变化的规律对于评价雨水等自然灾害对边坡稳定性的影响是必要的。本文计算了安全数随 φ 的变化趋势,并与文献[15]作了比较,如图6所示。

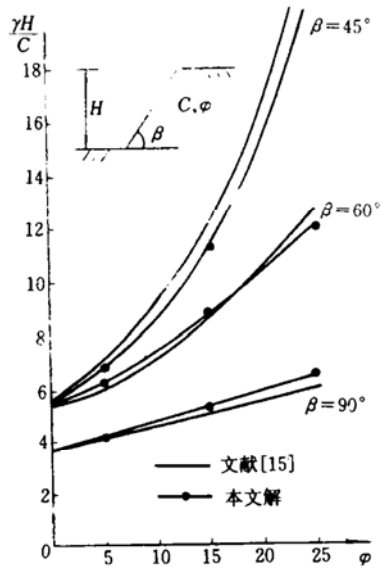


图6 安全数 $N = \frac{\gamma H}{c}$

7 结 语

本文利用极限分析的方法,使用最优化技术直接调整条分面及滑裂面上的内力分布,使得对给定滑裂面其内力场分布在不违反破坏条件的前提下取极大值。同时利用最优化技术在不同的滑裂面中寻找使安全系数取极小值的滑裂面为临界滑裂面。该方法将条分法与有限元思想结合起来,不对条块间内力之间的关系作任何假定,且满足解的合理性条件及边界条件,因此使条分法模型更加合理。

本文是在导师钱令希教授指导下完成的,在此表示衷心感谢。

参 考 文 献

- 1 Fellenius W. Calculation of Stability of Earth Dams. Trans 2nd Int Congr Large Dams, 1936, 4: 445.
- 2 冯国栋. 土力学. 北京: 水利电力出版社, 1986.
- 3 Bishop A W. The Use of the Slip Circle in the Stability Analysis of Slopes. Geotechnique, 1955, 5: 7~17.
- 4 Morgenstern N R, Price V E. The Analysis of the Stability of Generalised Slip Surfaces. Geotechnique, 1965, 15, 79~93.

- 5 Janbu N. Slope Stability Computations. Embankment Dam Engineering, Casagrand Volume, 1973; 47~86.
- 6 Spencer E. A Method of Analysis of the Stability of Embankments Assuming Parallel Interslice Forces. Geotechnique, 1967, 17: 11~26.
- 7 Sarma S K. Stability Analysis of Embankments and Slopes. Geotechnique, 1973, 23: 423~433.
- 8 潘家铮. 建筑物的抗滑稳定和滑坡分析. 水利电力出版社, 1980.
- 9 Chen Z Y, Morgenstern N R. Extensions to the Generalized Method of Slices for Stability Analysis. Canada Geotechnical Journal, 1980, 20: 104~119.
- 10 陈祖煜, 邵长明. 最优化方法在确定边坡最小安全系数方面的应用. 岩土工程学报, 1988, 10(4): 1~13.
- 11 Qian Ling-xi, Zhang Xiong. Rigid Finite Element Method in Structural Analysis. The Finite Element Method in the 1990's, Springer-Verlag, 1992, 89~98.
- 12 钱令希, 张 雄. 结构分析中的刚性有限元法. 计算结构力学及其应用, 1991, 8(1): 1~14.
- 13 张 雄. 岩体稳定性的极限分析方法—刚体弹塑性夹层模型. 岩土力学, 1992, 13(1): 66~73.
- 14 Zhang Xiong. A Algorithm for Solving Linear Programming with Free Variables. International Conference on Education, Practice and Promotion of Computational Methods in Engineering Using Small Computer, 1992.
- 15 Chen W F. Limit Analysis and Soil Plasticity. Elsevier, Amsterdam, 1975.

Improved Slice Method for Slope Stability Analysis

Zhang Xiong

(Chendu University of Science and Technology)

Abstract By adapting the idea of limit analysis and finite element analysis an improved slice method for slope stability analysis is proposed. The internal forces on slip surfaces are adjusted through optimization so that the safety factor is maximized for any given slip surface. The real safety factor should be the minimum one among these possible slip surfaces. This method doesn't introduce any assumption about the internal forces on slip surfaces, so it can be used to estimate the true stability of slope.

Key words slope stability, slice method, limit analysis.