

岩土类材料的统一强度理论及其应用*

俞茂宏

(西安交通大学结构研究室, 710049)

文 摘 岩土类材料的强度理论是土木、水利、铁道、矿业等工程中的一个重要的基本问题。以往各种强度理论一般只适用于某一类特定的材料。本文对材料强度理论不作任何假设(如外凸性等), 直接根据材料单向拉伸和单向压缩强度极限(也可用岩土工程中常用的材料强度参数 c_0 和 ϕ), 从一个统一的单元体模型出发, 考虑所有应力分量以及它们对材料破坏的不同影响, 建立一个能够适用于各类材料的统一强度理论和统一形式的数学表达式。它包含了现有各种主要强度理论和一些尚未表达过的新的强度理论。按统一强度理论表达式得出的两大族8种强度准则可以适用于各种岩土类材料, 并可由此蜕化得出两族适用于金属材料的统一形式屈服准则。

关键词 岩土材料, 强度理论, 双剪强度理论, 双剪统一强度理论。

1. 前 言

岩土类材料, 包括各种工程结构和自然界的各类岩石、土、混凝土等, 大多数处于复杂应力作用下。因此, 关于岩土类材料的强度理论研究具有重要的理论意义、工程实际意义和经济意义。对于各种工程结构、建筑物及地基等, 它是计算结构材料是否安全的计算准则; 对于材料塑性或破碎加工以及滑坡等灾害研究, 它又是判断是否发生屈服或破坏的准则。从1773年提出库仑理论以来, 至今已提出了众多强度理论^[1]。

现有强度理论, 包括笔者1961年提出的双剪屈服准则^[2], 1983年提出的双剪强度理论^[3,4], 以及近年来国内外提出的各种光滑化角隅模型^[5]和经验公式, 都只能适用于某一类特定的材料。对于岩土类材料的强度理论, 莫尔-库仑强度理论没有考虑中间主应力 σ_2 的作用, 因而较为保守; 德鲁克-普拉格(Drucker-Prager)准则以及各种相应圆锥形准则, 由于不能反映极限面的拉伸子午线和压缩子午线的不同, 而与实际不符; 双剪强度理论虽然考虑了中间主应力的影响, 但只能适用于剪切强度极限 τ_0 与拉伸强度极限 σ_t 和压缩强度极限 σ_c 为 $\tau_0 = 2\sigma_t\sigma_c / (2\sigma_c + \sigma_t)$ 的材料; 对于近年来提出的一些角隅模型, 往往为某一特定材料试验点的数学拟合而缺少清晰的物理概念, 并且也只能适用于某一类材料。

此外, 虽然提出了众多的强度理论, 但是对于某些基本的试验结果, 至今仍然未能有一个理论上的说明或给予以数学上的描述。现有的各种强度理论之间存在什么关系, 以及在众

*“八·五”国家重点科技攻关和西安交通大学材料强度国家重点实验室研究项目。

到稿日期: 1992-10-28.

多强度理论之间, 如何选用强度理论等等问题, 也是人们所关心的问题。

下面我们从一个统一的物理模型出发, 考虑到所有应力分量以及它们对材料破坏的不同影响, 提出一个能够适用于各种岩土类材料的新的统一强度理论和统一形式的数学表达式。莫尔-库仑强度理论和双剪强度理论均为其特例, 并且还包含了可以比德鲁克-普拉格准则更合理的新的计算准则, 以及可以描述非凸极限面试验结果的新的非凸强度理论。

2. 岩土类材料的统一强度理论

对于金属类材料, 笔者以双剪单元体(见图1)和双剪屈服准则为基础, 提出了一个新的双剪统一屈服准则^[6,7], 它的数学表达式为

$$\left. \begin{aligned} f &= \sigma_1 - \frac{1}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_s & \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \\ f' &= \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_s & \left(\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 b 为反映中间主剪应力影响的权系数, 它与材料的剪切屈服极限 τ_s 和拉伸屈服极限 σ_s 之间的关系为

$$b = \frac{2\tau_s - \sigma_s}{\sigma_s - \tau_s} = \frac{2-B}{B-1} \quad (2)$$

引入剪应力系数 $B = \tau_s / \sigma_s$, 并代入式(1), 可得统一屈服准则的另一表达式为

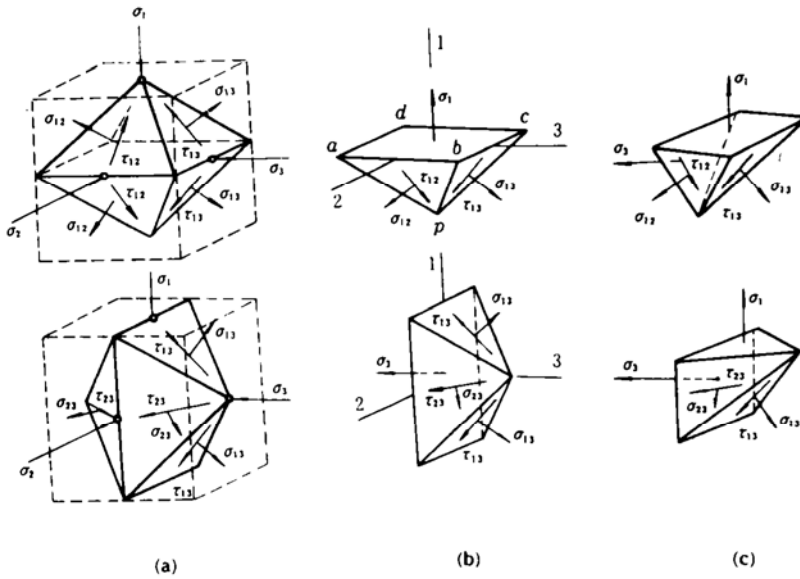


图1 双剪单元体及其三种形式

$$\left. \begin{aligned} f &= \sigma_1 - (2-B)\sigma_2 - (B-1)\sigma_3 = \sigma_s & \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \\ f' &= (B-1)\sigma_1 - (2-B)\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_s & \left(\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)与式(1)是等效的。当 $b=0$ ($B=2$), $b=1/2$ ($B=5/3$) 和 $b=1$ ($B=3/2$) 时可分别得出屈瑞斯加 (Tresca) 屈服准则, 米赛斯 (Mises) 准则的线性逼近式和双剪屈服准则。实际上, 统一屈服准则是以双剪理论为基础, 以 b (或 B) 为参数的包括无限多个的一族双剪屈服准则, 故称之为双剪统一屈服准则。一般取 $b=0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ 这五种^[6,7], 基本上可以适应于各种拉压强度性质相同的材料在复杂应力状态下的屈服计算。

双剪统一屈服准则的不足在于它只能适用于拉压强度相等的金属类材料, 而不能适应拉压强度不等并与静水应力有关的岩土类材料。其主要原因是它没有考虑双剪单元体^[8]上正应力的影响。

为了建立能够适用于岩土类材料的统一强度理论, 考虑作用于双剪单元体上的全部应力分量以及它们对材料破坏的不同影响^[8,9], 可建立一个新的统一强度理论, 其定义为: 当作用于双剪单元体上的两个较大剪应力及其面上的正应力影响函数到达某一极限值时, 材料开始发生破坏^[9]。由于这一统一强度理论是以双剪理论为基础并以此推导得出的, 故称之为双剪统一强度理论, 其数学表达式为

$$\left. \begin{aligned} F &= \tau_{13} + b\tau_{12} + \beta(\sigma_{13} + b\sigma_{12}) = c & (\tau_{12} + \beta\sigma_{12} \geq \tau_{23} + \beta\sigma_{23}) \\ F &= \tau_{13} + b\tau_{23} + \beta(\sigma_{13} + b\sigma_{23}) = c & (\tau_{12} + \beta\sigma_{12} \leq \tau_{23} + \beta\sigma_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 b 为反映中间主剪应力作用的权系数; β 为反映正应力对材料破坏的影响系数; c 为材料的强度参数。双剪应力 τ_{13} , τ_{12} 或 τ_{23} 及其作用面上的正应力 σ_{13} , σ_{12} 或 σ_{23} 分别等于

$$\left. \begin{aligned} \tau_{13} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), & \sigma_{13} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \tau_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), & \sigma_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \tau_{23} &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), & \sigma_{23} &= \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

通过推导, 可以得出主应力形式的双剪统一强度理论为^[9]

$$\left. \begin{aligned} F &= \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t, & \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \right) \\ F &= \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t, & \left(\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

双剪统一强度理论的应力不变量形式的表达式为

$$\left. \begin{aligned} F &= (1-\alpha)\frac{I_1}{3} + \frac{\alpha(1-b)}{1+b}\sqrt{J_2}\sin\theta + (2+\alpha)\sqrt{\frac{J_2}{3}}\cos\theta = \sigma_t, & (0^\circ \leq \theta \leq \theta_b) \\ F' &= (1-\alpha)\frac{I_1}{3} + \left(\alpha + \frac{b}{1+b}\right)\sqrt{J_2}\sin\theta + \left(\frac{2-b}{1+b} + \alpha\right)\sqrt{\frac{J_2}{3}}\cos\theta = \sigma_t, & (\theta_b \leq \theta \leq 60^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 I_1 为应力张量第一不变量 (静水应力); J_2 为偏应力张量第二不变量; θ 为与双剪应力参数^[10] $t_\tau = \tau_{12}/\tau_{13}$ 或 $t'_\tau = \tau_{23}/\tau_{13}$ 相对应的应力角; 交接处的角度 θ_b 可由 $F = F'$ 的条件求得

$$\theta_0 = \arctg \frac{\sqrt{3}(1+\beta)}{3-\beta}, \quad \beta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (8)$$

在双剪统一强度理论式(7)和式(6)中,采用材料拉伸和压缩两个强度参数 σ_t 和 $\alpha = \sigma_t / \sigma_c$ 。如采用岩土工程中常用的剪切强度参数 c_0 和正应力影响系数 ϕ (一般称为粘结力和摩擦角),则可按关系式 $\alpha = (1 - \sin\phi) / (1 + \sin\phi)$, $\sigma_t = 2c_0 \cos\phi / (1 + \sin\phi)$ 代入式(6)和式(7),即可得出用 c_0 和 ϕ 表示的双剪统一强度理论,它们的数学表达式分别为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sigma_1 - \frac{1 - \sin\phi}{(1+b)(1+\sin\phi)} (b\sigma_2 + \sigma_3) \\ &= \frac{2c_0 \cos\phi}{1 + \sin\phi} \quad \left(\sigma_2 \leq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{\sin\phi}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \right) \\ F' &= \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi} \sigma_3 \\ &= \frac{2c_0 \cos\phi}{1 + \sin\phi} \quad \left(\sigma_2 \geq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{\sin\phi}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

用应力不变量和应力角 I_1, J_2, θ 和岩土工程中常用的两个强度参数 c_0 和 ϕ 表示时,双剪统一强度理论可表示为

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{2I_1}{3} \sin\phi + \frac{2\sqrt{J_2}}{1+b} \left[\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - b \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &\quad + \frac{2\sqrt{J_2}}{(1+b)\sqrt{3}} \left[\sin\phi \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + b \sin\phi \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= 2c_0 \cos\phi \quad (0^\circ \leq \theta \leq \theta_0) \\ F' &= \frac{2I_1}{3} \sin\phi + \frac{2\sqrt{J_2}}{1+b} \left[\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + b \sin\theta \right] \\ &\quad + \frac{2\sqrt{J_2}}{(1+b)\sqrt{3}} \left[\sin\phi \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - b \sin\phi \cos\theta \right] \\ &= 2c_0 \cos\phi \quad (\theta_0 \leq \theta \leq 60^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

在岩土力学和工程中,一般采用压缩强度参数 σ_c ,则式(6)和式(7)可分别改写为以下两组公式:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{\alpha} \sigma_1 - \frac{1}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \quad \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \right) \\ F' &= \frac{1}{\alpha(1+b)} (\sigma_1 + b\sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_c \quad \left(\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1-\alpha}{3\alpha} I_1 + \frac{1-b}{1+b} \sqrt{J_2} \sin\theta + \frac{2+\alpha}{\alpha\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos\theta \\ &= \sigma_c \quad (0 \leq \theta \leq \theta_0) \\ F' &= \frac{1-\alpha}{3\alpha} I_1 + \frac{\alpha+ab+b}{\alpha(1+b)} \sqrt{J_2} \sin\theta + \frac{2+\alpha+ab-b}{\alpha\sqrt{3}(1+b)} \sqrt{J_2} \cos\theta \\ &= \sigma_c \quad (\theta_0 \leq \theta \leq 60^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

双剪统一强度理论在应力空间 π 平面的极限面形状如图2所示。一般情况下,双剪统一

强度理论的极限面是以静水应力轴为轴心的不等边十二边形锥体。当 $0 \leq b \leq 1$ 时, 极限面均为外凸的; 在 $b=0$ 和 $b=1$ 两种情况下, 十二边简化为不等边六边形锥体; 在 $b < 0$ 或 $b > 1$ 的情况下, 则为非凸的极限面。

双剪统一强度理论中的 b 参数为反映中间主剪应力以及相应面上的正应力对材料破坏影响程度的权系数。它与材料剪切强度极限 τ_0 和拉压强度极限 σ_t, σ_c 的关系为

$$b = \frac{(1+\alpha)\tau_0 - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_0} = \frac{1+\alpha-B}{B-1} \text{ 或 } B = \frac{1+b+\alpha}{1+b} \quad (13)$$

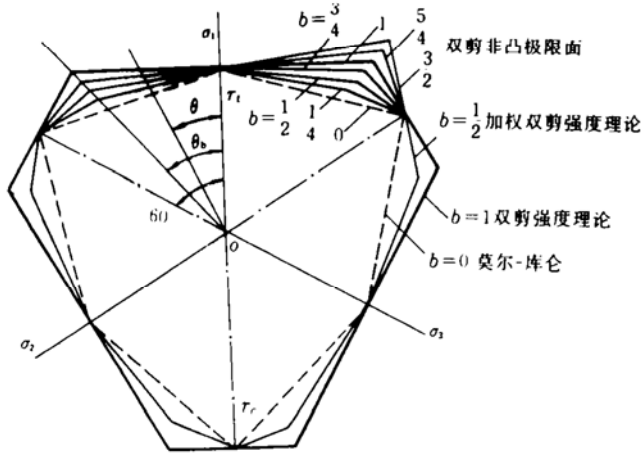


图 2 统一强度理论的极限面

将式(13)代入式(6)可得双剪统一强度理论的另一表达式为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sigma_1 - (1+\alpha-B)\sigma_2 - (B-1)\sigma_3 = \sigma_t & \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \right) \\ F' &= \frac{B-1}{\alpha}\sigma_1 + \frac{1+\alpha-B}{\alpha}\sigma_2 - \alpha\sigma_3 = \sigma_c & \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3. 双剪统一强度理论的特例

双剪统一强度理论包含了四大族无限多个强度理论, 即:

双剪统一强度理论, 外凸理论, $0 \leq b \leq 1$ 或 $(1+\alpha) \geq B \geq (1+\alpha/2)$ 。

双剪非凸强度理论, 非凸理论, $b < 0$ 或 $b > 1$, 即 $B > (1+\alpha)$ 或 $B \leq (1+\alpha/2)$ 。

双剪统一屈服准则, $\alpha=1, 0 \leq b \leq 1 (2 \geq B \geq 3/2)$ 。

双剪非凸屈服准则, $\alpha=1, b < 0 (B > 2)$ 。

在一般情况下, 可取 $b=0, 1/4, 1/2, 3/4, 5/4, 3/2$ 七种典型参数, 得出下列各种准则:

a) $b=0$, 由式(6)得出莫尔-库仑强度理论 ($B=1+\alpha$) 为

$$F = F' = \sigma_1 - \alpha\sigma_3 = \sigma_t, \text{ 或 } F = F' = \frac{1}{\alpha}\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c \quad (15)$$

b) $b = \frac{1}{4}$, 得加权双剪强度理论 ($B = 1 + \frac{4}{5}\alpha$) 为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sigma_1 - \frac{\alpha}{5}(\sigma_2 + 4\sigma_3) = \sigma_t & \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \\ F' &= \frac{1}{5}(4\sigma_1 + \sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t & \left(\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

c) $b = \frac{1}{2}$, 得加权双剪强度理论 ($B = 1 + \frac{2}{3}\alpha$) 为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sigma_1 - \frac{\alpha}{3}(\sigma_2 + 2\sigma_3) = \sigma_t & \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \\ F' &= \frac{1}{3}(2\sigma_1 + \sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t & \left(\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由于德鲁克-普拉格准则与实际不符, 在理论上讲, 这一准则应该是代替德鲁克-普拉格准则的一个较为合理的新的强度准则。

d) $b = \frac{3}{4}$, 得加权双剪强度理论 ($B = 1 + \frac{4}{7}\alpha$) 为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sigma_1 - \frac{\alpha}{7}(3\sigma_2 + 4\sigma_3) = \sigma_t & \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \\ F' &= \frac{1}{7}(4\sigma_1 + 3\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t & \left(\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

e) $b = 1$ ($B = 1 + \frac{\alpha}{2}$), 可得出笔者于1983年提出的双剪应力强度理论^[3]

$$\left. \begin{aligned} F &= \sigma_1 - \frac{\alpha}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t & \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \\ F' &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t & \left(\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

f) $b = \frac{5}{4}$, 得双剪非凸强度理论 ($B = 1 + \frac{4}{9}\alpha$) 为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sigma_1 - \frac{\alpha}{9}(5\sigma_2 + 4\sigma_3) = \sigma_t & \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \\ F' &= \frac{1}{9}(4\sigma_1 + 5\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t & \left(\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

g) $b = \frac{3}{2}$, 得双剪非凸强度理论 ($B = 1 + \frac{2}{5}\alpha$) 为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sigma_1 - \frac{\alpha}{5}(3\sigma_2 + 2\sigma_3) = \sigma_t & \left(\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \\ F' &= \frac{1}{5}(2\sigma_1 + 3\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t & \left(\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

h) $b = 1, \alpha = 2\nu$, 得最大拉应变强度理论为

$$F = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t \quad (22)$$

以上这8种计算准则基本上可以适应于各种岩土类材料, 也可作为各种角隅模型的线性代替式应用。

4. 双剪统一强度理论的应用

对于已有复杂应力状态下试验结果的材料。可以根据试验结果, 选用式(15)~式(22)各式中最为接近者。图3为 Lade 对砂土所进行的复杂应力试验结果。外面方点为 Monterey 密砂, 内部为 Monterey 松砂的试验结果^[11]。有人曾经采用三轴对称的数学式与之拟合, 如图内的虚线所示。现与双剪统一强度理论与之对比, 可以看出, $b=3/4$ 的加权双剪强度理论式(18)与密砂的试验结果相符合, 松砂则可采用 $b=1/4$ 的加权双剪强度理论式(16), 如图3内的理论实线和试验点所示。

图4为 Launay 和 Gachon 进行的混凝土真三轴试验结果^[1], 以前常用 Hsieh-Ting-Chen 准则与之对比, 如图中的虚线所示。在同一图中, 如绘上式(17)的 $b=1/2$ 的加权双剪强度理论曲线, 可以看出与试验结果相吻合。

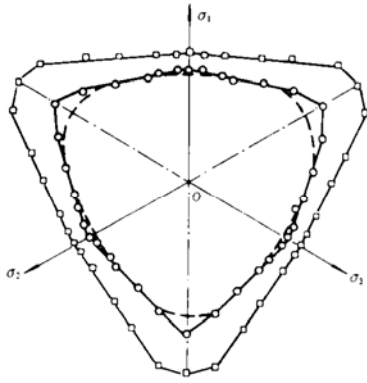


图3 双剪统一强度理论与砂土

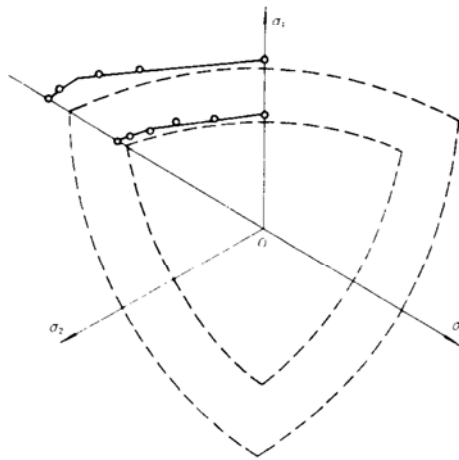


图4 双剪统一强度理论与混凝土

中国科学院武汉岩土力学研究所对花岗岩进行了大量的高压真三轴试验。图5为某大型水电站花岗岩的六组不同静水压力下的试验结果^[12]。可以看出, 它们与双剪强度理论 ($b=1$) 极其符合。这一试验的结论^[12]是: “试验结果表明, 双剪应力强度理论符合于拉西瓦花岗岩在真三轴应力状态下测得的强度值”, “双剪应力强度准则可作为某些岩土类材料的脆性破裂准则”。采用新的强度理论, 由于更好地发挥了材料的强度潜力, 可以取得很显著的经济效益。

拉西瓦花岗岩是一种坚硬、致密的高强度岩石。它的单轴抗压强度约为120~180MPa, 具有较高的强度和刚度。1992年2月中下旬, 笔者参加国家教委三峡工程考察团, 与长江科学院、长江水利委员会和三峡工程开发总公司等很多总工程师、院长和专家讨论了三峡工程的岩石性质, 并在三斗坪三峡坝址和长江科学院等地参观了岩蕊试样和有关岩石试验数据。三斗坪花岗岩和拉西瓦花岗岩两者十分相似。三斗坪花岗岩也是一种坚硬、致密的高强度岩石。它的各方面力学性能预计与拉西瓦花岗岩是相似的。

图6则为 Haythornthwaite 对重塑淤泥所进行的复杂应力试验结果^[13]。可以看出, 它的

极限线呈明显的非凸形状。如采用 $b = \frac{5}{4}$ 的非凸双剪强度理论式(20), 则可以与之相符合。

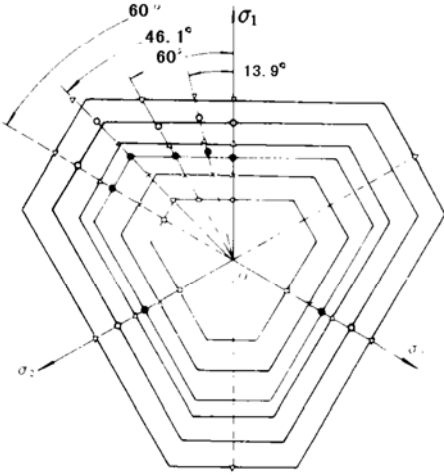


图5 双剪强度理论与花岗岩真三轴试验的对比

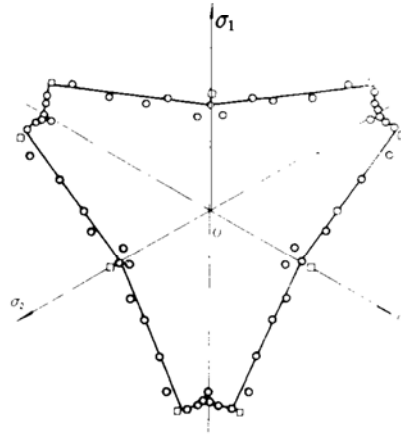


图6 双剪统一强度理论与重塑淤泥

由以上的砂土、混凝土、花岗岩和重塑淤泥的一些试验结果与双剪统一强度理论的对比可以看到, 双剪统一强度理论可以十分灵活地适应各种不同材料的特点。这是以往任何一种强度理论所不能相比的。

此外, 双剪统一强度理论可以作为各种光滑化角隅模型的线性逼近, 使计算得到简化。而线性准则的角点奇异性问题近年来已得到十分巧妙而简单的解决^[14], 关于双剪统一强度理论在弹塑性分析中的应用和奇异性处理, 笔者在文献[15]中将作进一步阐述。

在一般工程中, 由于复杂应力的试验比较困难和昂贵, 对设备和试验技术的要求也较高, 因此需要寻求一种比较简便的应用双剪统一强度理论的方法。为此可以采用式(13)的材料强度关系式。它们包括材料的拉压强度比 $\alpha = \sigma_t / \sigma_c$ 和材料拉剪强度比 $B = \sigma_t / \tau_0$ 。当材料的拉伸强度 σ_t 、压缩强度 σ_c 和剪切强度 τ_0 已知时, 可求出 α 和 B , 直接应用式(14); 或者将 α 和 B 值代入式(13), 求得权系数 b 值, 然后可以应用双剪统一强度理论的各种表达式(6)、(7)、(11)、(12)中的任一组方程; 此外, 也可求得 c_0 , ϕ 和 b 后应用式(9)或式(10), 它们都是等效的。

如把式(6)中的 b 和 α 作为某种参数, 则当 $b=1$, $\alpha=2\nu$ 时, $F = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t$, 此即为最大拉应变强度理论(第二强度理论)。

当材料的拉压强度相等时, $\alpha=1$, 双剪统一强度理论简化为双剪统一屈服准则, 如式(1)和式(3)。在文献[6]中已对此作了论述, 这里不再赘述。

至此, 双剪统一强度理论已将几百年来各种主要强度理论和各种光滑化的角隅模型和各种经验曲线, 包含在一个统一的力学模型和理论, 以及统一的数学表达式之中。并且从中还导出一些典型的计算准则, 可作为新的强度理论应用。

5. 结 论

至今为止的各种强度理论一般只适用于某一类特定的材料, 并且众多强度理论之间缺少相互的联系, 在实际应用中也难于选择。

本文提出了岩土类材料的双剪统一强度理论, 它从一个统一的力学模型出发, 得出一个统一形式的数学表达式, 可以适用于各种不同材料。双剪统一强度理论有较清晰的物理概念和较简单的数学表达式, 并且与各种岩土类材料的复杂应力的试验结果符合较好。双剪统一强度理论包含了现有的各种主要强度理论和一些尚未被人们表述过的新的强度理论, 包括本文首次提出的一族双剪非凸强度理论, 并建立起各种强度理论之间的相互联系。

双剪统一强度理论可以有不同的表达形式。式(6)和式(7), 以及式(9)~(12)和式(14)是双剪统一强度理论的7种不同表达式, 它们都是等效的。

文中也通过岩土类材料的一些试验结果与双剪统一强度理论进行了对比, 说明了双剪统一强度理论可以灵活地适用于各种材料。文中给出了双剪统一强度理论的7种典型特例和计算准则。它们事实上也可作为一种独立的新的强度理论, 并归纳于双剪统一强度理论之中。

其中 $b=\frac{1}{2}$ 的双剪统一强度理论(式(17)), 是一种介于双剪强度理论与莫尔-库仑强度理论之中的一种新准则。

笔者在文献[6]中提出的双剪统一屈服准则为本文的特例, 它可以适用于各种拉压强度相同的金属类材料。因此, 双剪统一强度理论可以适用于金属和岩石、土、混凝土、铸铁等十分广泛的各种材料。屈瑞斯加屈服准则、米赛斯屈服准则、双剪屈服准则、莫尔-库仑强度理论、各种光滑化角隅模型以及各种经验曲线都为本文双剪统一强度理论的特例或线性逼近。

参 考 文 献

1. Chen W F. Plasticity in Reinforced Concrete. Chapter 5. McGraw-Hill Book Co., 1982. 190~250.
2. Yu Mao-hong. Twin Shear Stress Yield Criterion. Int J of Mechanical Science. 1983. 25(1): 71~74.
3. Yu Mao-hong, He Li-nan, Song Ling-yu. Twin Shear Stress Theory and Its Generalization. Scientia Sinica (Science in China): Series A, 1985, 28(11): 1174~1183.
4. 俞茂宏, 何丽南, 宋凌宇. 双剪应力强度理论及其推广. 中国科学: A辑, 1985, 28(12): 1113~1120.
5. 俞茂宏, 刘凤羽. 广义双剪应力准则角隅模型. 力学学报, 1990, 22(2): 213~216.
6. 俞茂宏, 何丽南, 刘春阳. 广义双剪应力屈服准则及其推广. 科学通报, 1992, 37(2): 182~185.
7. Yu Mao-hong, He Li-nan, Liu Chun-yang. Generalized Twin Shear Stress Yield Criterion and Its Generalization. Chinese Science Bulletin, 1992, 37(24): 2085~2089.
8. 俞茂宏. 复杂应力状态下材料屈服和破坏的一个新模型及其系列理论. 力学学报, 1989, 21(增刊): 42~49.
9. Yu Mao-hong, He Li-nan. A New Model and Theory on Yield and Failure of Materials under the Complex Stress State. Mechanical Behaviour of Materials—6, Pergamon Press, Oxford, 1991, 3. 841~846.
10. 俞茂宏. 双剪强度理论与莫尔-库仑强度理论——对“一个新的普遍形式的强度理论”的讨论. 土木工程学报, 1991, 24(2): 82~86.
11. Boer R. On Plastic Deformation of Soils, Int J of Plasticity. 1988, 4(3): 371~391.
12. 李小春, 许东俊. 双剪应力强度理论的实验验证——拉西瓦花岗岩强度特性真三轴试验研究. 见: 中国科

学院岩土力学研究所, 岩土(90)报告52号, 1990.

13. Haythornthwaite R M. *Stress and Strain in Soils: Plasticity*. E H Lee and P S Symonds ed., Pergamon Press, Oxford, 1960. 185~193.
14. 殷有泉, 周早生. 岩土介质在屈服面奇异点处的本构方程. 岩石力学与工程学报, 1985, 4(1): 33~38.
15. 俞茂宏, 曾文兵. 工程结构分析新理论及其应用. 工程力学(将发表).

Unified Strength Theory for Geomaterials and Its Applications

Yu Mao-hong

(Xi'an Jiaotong University)

Abstract Strength (failure) theory for geomaterials is an important and essential problem in civil, hydraulic, mining, railway and highway engineering et al. Each one of present strength theories or failure criteria can be adapted for only one kind of material. There is much need of a unified strength theory which can be adapted for all kinds of materials, and also need to establish the relationships between various strength theories. Based on the unified model of twin shear element, and taking account of all stress components acted on the twin shear element and their different influences on failure of materials, an unified strength theory and unified mathematical expressions are presented in this paper. This new theory may be referred as twin shear unified strength theory or simplified as unified strength theory. It can also be expressed identically in terms of the cohesion parameter c_0 and internal-friction angle ϕ of the materials. It establishes the relationships between various strength theories. It can be adapted for many kinds of geomaterials and other materials. Those well-known strength theories, yield criteria, and smooth empiric criteria are the special cases and linear approximations of the twin shear unified strength theory.

Key words geomaterial, strength theory, twin shear strength theory, twin shear unified strength theory.