

悬坝渗流分析理论公式

李君纯

(水利部大坝安全监测中心技术部, 南京, 210024)

文 摘 本文称坝底孔隙压力等于大气压力的土石坝为悬坝。悬坝渗流场的形态与非悬坝的大不相同。可惜至今尚无理论公式可用于悬坝渗流。本文提出了此课题的系统的计算公式, 并展示出一个应用实例。由此发现用本文理论计算的结果同原体观测、现场原位检测、室内渗流模拟试验、离心模型试验、和有限元法计算等五种方法获得的结果吻合。从而证明本文的理论公式是正确的, 有可靠的精度, 对类似工程将是有益的, 而且使用简便。

关键词 悬坝, 渗流, 理论计算, 坝基

1. 引 言

坝基始终处于饱水情况下的土坝、坝底面以下的各种渗流条件的理论计算, 都早已出现在手册、规范中^[1,2]。然而坝底为强透水饱气区, 坝身为“悬坝”^①时, 尚未见到坝身渗流的理论解, 也未见到近似算法的实际应用^[3]。

悬坝的形成是由于岩溶地区、或(和)坝下强透水层的排渗量远大于其入渗量所致。在陕西省羊毛湾水库^[4]及一些岩溶发育区、或强透水坝基内带有阻渗性极强的上游防渗体的坝, 例如有全封闭的连续长铺盖或防渗帷幕的土坝, 早已出现悬坝现象。

悬坝内的浸润线及渗流场形态同饱水坝基上土坝内的形态差异很大, 若用通常方法计算, 所预计的渗流状况会同实际完全不同, 如果根据这些资料布置大坝渗流观测设施, 则达不到渗流安全监控的目的, 造成监测设施无用, 甚至在水库蓄水后发生渗透破坏, 羊毛湾水库大坝就是这样的典型例子。

为了使已有的理论公式^[3]更加完善, 本文作进一步推导。并以羊毛湾坝作为应用实例, 把用本文公式计算的结果同羊毛湾坝的原型观测、离心模型试验、渗流模拟试验、有限元法计算、现场检查等五种结果相比较, 证明本文的计算公式适用、简单、可靠。

①本文对“悬坝”的定义是: 坝基内的地下水在坝底以下, 坝底部孔隙与大气相通, 渗透速度在坝底不连续, 以致坝底孔隙水压力等于大气压力。

到稿日期: 1992-06-01.

2. 理论计算公式的推导

2.1 基本假设及计算条件

(1) 设坝的几何轮廓及坐标系如图1。它为Y-Z平面的稳定渗流势量场；渗流服从Darcy定律；沿坝轴线方向的X轴无渗水流动，故以下几个方程式成立：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2(k_y\phi)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(k_z\phi)}{\partial z^2} &= 0 \\ v &= \text{grad}\phi \\ v_x = \text{grad}_x\phi &= 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(2) 设坝身为各向同性的、土骨架和孔隙都不发生变化的多孔均质刚体，即

$$\left. \begin{aligned} k_y = k_z = k, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial k}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(3) 坝基的渗透系数 k_r 很大， $k_r \gg k$ ，坝底 \overline{OY} 线同地下水面之间为大气连通区，即非饱和水区，渗流速度在坝底不连续，孔隙压力为零，亦即等于大气压力。

(4) 计算边界条件是：

a) 上游坡 \overline{OCA} 线为入渗线，其势函数为 $\phi = -kH$ ；

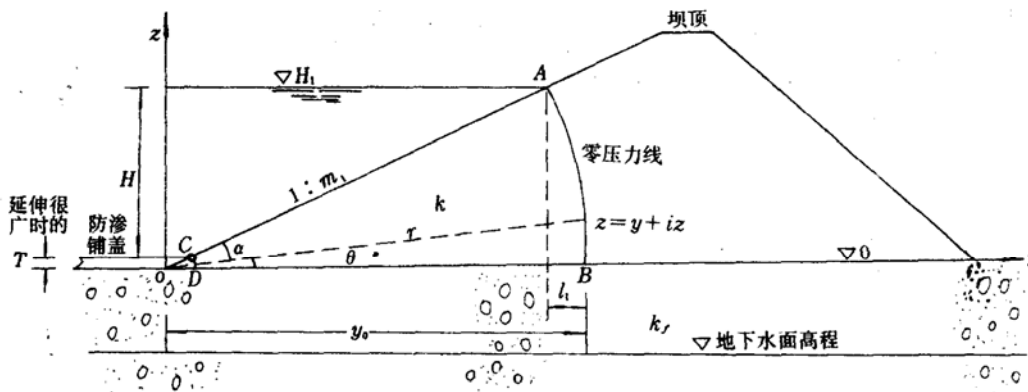


图1 悬坝的轮廓和坐标系

b) 在浸润线(零压线) \widehat{AB} 上，势函数 $\phi = -kz$ ，即浸润线上的压力水头 $h_p = 0$ ，其流函数 $\psi = q$ ；

c) 在坝底线 \overline{OY} 上，势函数 $\phi = 0$ ；

d) 设上游坡趾的邻域，圆弧 \widehat{CD} 为不透水边界， \widehat{CD} 是一条流线，其流函数 $\psi = 0$ 。可近似取 $\overline{OC} = \overline{OD} = \epsilon \rightarrow 0$ 。

2.2 理论公式的推导

(1) 基本变换关系

在上述假设及计算条件下, 图1的渗流场可以用势函数 ϕ 和流函数 ψ 构成的复平面 W 来描述。 W 平面任意点的位置可以表示为

$$\left. \begin{aligned} W &= \phi + i\psi = Re^{i\beta} \\ R &= \sqrt{\phi^2 + \psi^2} = |W| \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 R, β 依次为复平面 W 中某点的模及幅角, 而坝体横断面 X 中点的位置可以表示为

$$\left. \begin{aligned} X &= y + iz = re^{i\theta} \\ r &= \sqrt{y^2 + z^2} = |X| \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 r, θ 依次为复平面 X 中某点的模及幅角,

用下式将流场复变函数 ϕ, ψ 同坝体 X 断面的复平面相联系, 并作保角变换

$$X = cW^2 \quad (5)$$

从式(3)~(5)知变换的对应关系为

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -kz\sqrt{\frac{c_m H}{r+y}} \\ \psi &= k\sqrt{c_m H(r+y)} \\ \beta &= \arg W = \arctg \frac{\psi}{\phi} \pm 2k\pi \\ R &= \sqrt{\frac{r}{|c|}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

反变换为

$$\left. \begin{aligned} y &= c(\phi^2 - \psi^2) \\ z &= 2c\phi\psi \\ \theta &= \arg X = \arctg \frac{z}{y} \pm 2k\pi \\ r &= cR^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(6)、(7)中 c, c_m 为由渗流场条件所确定的常数, 其值见下文。

(2) 渗流计算公式的推导

a) 渗流量计算公式的推导

由式(7)的 y, z 表达式消去 c , 得

$$\frac{y}{\phi^2 - \psi^2} = \frac{z}{2\phi\psi} \quad (8)$$

由图1已知 A 点的坐标为: $y = m_1 H, z = H$ 。其映象点的坐标为: $\phi = -kH, \psi = q$ 。将这些条件代入式(8), 得坝体单位宽度 b 的渗流量 q 为

$$q = c_m kH \quad (9)$$

式(9)中 c_m 为渗流场的几何参数, 表示为

$$c_m = m_1 + \sqrt{1 + m_1^2} \quad (10)$$

式中 m_1 为坝上游坡的坡率, 见图1。再将点 A 的上述已知条件代入式(7)第2式, 得渗流

场条件常数为

$$c = -\frac{1}{2c_m k^2 H} = -\frac{n_1^2}{2c_1 k^2} \quad (11)$$

式(11)中, 已令

$$c_1 = n_1^2 c_m H \quad (12)$$

式(11)、(12)中

$$n_1 = \frac{\psi}{c_m k H}$$

故 n_1 为单宽渗流量同流函数的比值。

b) 流线方程式的推导

将式(9)代入式(6)第2式, 可得 $\psi = \sqrt{k(r+y)q}$, 考虑到 $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, 故有

$$z = \frac{c_1}{n_1} \sqrt{n_1^2 - \frac{2}{c_m} \frac{y}{H}} \quad (13)$$

式(13)即为悬坝渗流场流线的普遍方程式。

c) 浸润(零压)线方程式的推导

浸润线是压力水头为零的特殊流线, 该线的流函数值为 $\psi = q$, 即流量百分数, $n_1 = 100\%$ 。从式(13)可知, 浸润线方程式可以化为无量纲的表达式如下:

$$\frac{z}{H} = c_m \sqrt{1 - \frac{2}{c_m} \frac{y}{H}} \quad (14)$$

d) 坝底出逸段长度 y_0 的计算公式

从图1知, 在坝底出逸段最远点B, $y = y_0$, $z = 0$, $\phi = 0$, $\psi = c_m k H$ 。将这些条件及 c 值(见式(11))代入式(7)中 y 的表达式, 得

$$y_0 = \frac{1}{2} c_m H = \frac{q}{2k} \quad (15)$$

e) 等势线方程式的推导

令式(6)中的势函数 ϕ 为 $\phi = -n_2 k H$, 或 $n_2 = -\frac{\phi}{k H}$, 从而可推导出

$$\frac{z}{H} = \frac{n_2^2}{c_m} \sqrt{1 + \frac{2c_m}{n_2^2} \frac{y}{H}} \quad (16)$$

式(16)为浸润线上各位势值所在点的位置方程式。对整个渗流场(包括浸润线边界)可以用 n_1 作为参数写出下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{H} &= \frac{1}{2} n_1^2 \left(c_m - \frac{n_2^2}{c_m} \right) \\ \frac{z}{H} &= \frac{n_1 n_2^2}{c_m} \sqrt{1 + \frac{2c_m}{n_1^2} \frac{y}{H}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

f) 渗流水力梯度 i 的计算公式的推导

按经典定义

$$i = \frac{1}{k} \frac{d\phi}{ds} = -H \frac{dn_2}{ds}$$

从式(16)求出浸润线上 n_2 值, 得

$$n_2 = \pm \sqrt{\frac{c_m(r-y)}{H}}$$

故
$$i = -H \frac{dn_2}{ds} = -\sqrt{c_m H} \cdot \frac{d\sqrt{r-y}}{ds} \quad (18)$$

式中
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dz_2}{dy}\right)^2} dy$$

从流线方程式(13)可解得

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{c_1}{z} \quad (19)$$

将式(19)代入上式

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{z}\right)^2} dy \quad (20)$$

可以证明: 在同一 n_2 值的前提下, 在任意一条 $n_1 = a$ (a 为常数)的流线上的 n_2 值的点, 其坐标 y_a, z_a 和浸润线($n_1 = 1$)上同一 n_2 值的点的坐标 y_1, z_1 呈下列关系:

$$y_a = n_1^2 y_1 \quad z_a = n_1^2 z_1$$

于是 $\sqrt{r_1 - y_1} = \frac{1}{n_1} \sqrt{r_a - y_a}$ 。为使整个流场计算方便, 将符号加以统一, 从而可以求出

$$d\sqrt{r-y} = \frac{y-r-c_1}{2n_1 r} \frac{dy}{\sqrt{r-y}} \quad (21)$$

将式(20)、(21)代入式(18), 得

$$i = \frac{r-y+c_1}{2n_1^2 r} \cdot \frac{1}{\sqrt{(r-y)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{c_1}{z^2}\right)}} \quad (22)$$

由于 $r-y \approx \frac{z^2}{2y}$, $r+y \approx y + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2$ ^①, 又从式(13)可解得 $2c_1 y = c_1^2 - z^2$, 以及 $c_1 = r+y$ 而有

$$\sqrt{(r-y)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{c_1}{z^2}\right)} \approx 1$$

故得 i 值的近似表达式^② $i = \frac{r-y+c_1}{2n_1^2 r}$ 。再将 $c_1 = r+y$ 代入, 则

$$i = \frac{1}{n_1^2} \quad (23)$$

此近似表达式的误差不超过小数后第二位, 既可满足实用精度, 又可避免如式(22)的繁冗计算。

由式(23)知 $\frac{di}{ds} = 0$, 说明在同一条流线上水力梯度 i 可视为常量。由于 $n_1 = \sqrt{\frac{z_1}{H}}$, z_1 为入渗点在上游坡面的高程, 故 i 同 n_1, z_1 的关系如图2。

^①关于简化的根据及详细推导, 拟另文介绍。

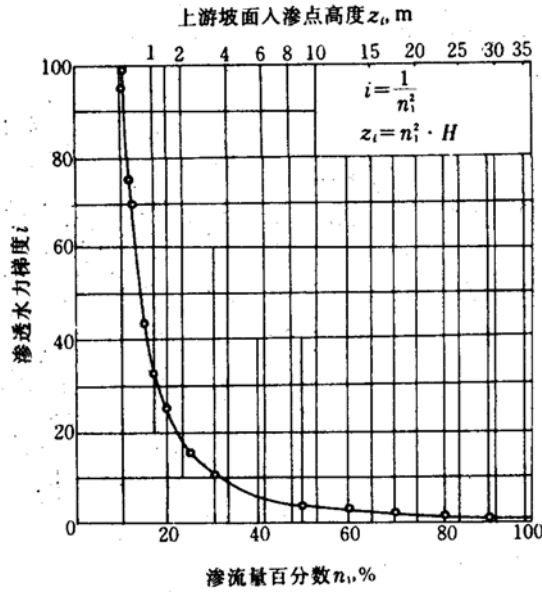


图2 $i-n_i-z_i$ 关系线

- 注 1. 纵座标指某一条 n_i 流线的渗透水力梯度
- 2. 当作用水头 $H=35.9\text{m}$ 时, 则如此图

3. 工程应用实例

陕西羊毛湾水库总库容1.2亿 m^3 , 设计灌溉农田33万亩, 1969年末开始蓄水。大坝为黄土均质坝, 并确认为悬坝^[4]。最大坝高为47.6m, 坝顶长488m, 坝的上游部分的计算横断面如图3。坝址位于渭河支流漆水中游, 距武则天和唐高宗的合葬墓乾陵仅数公里。由于坝基

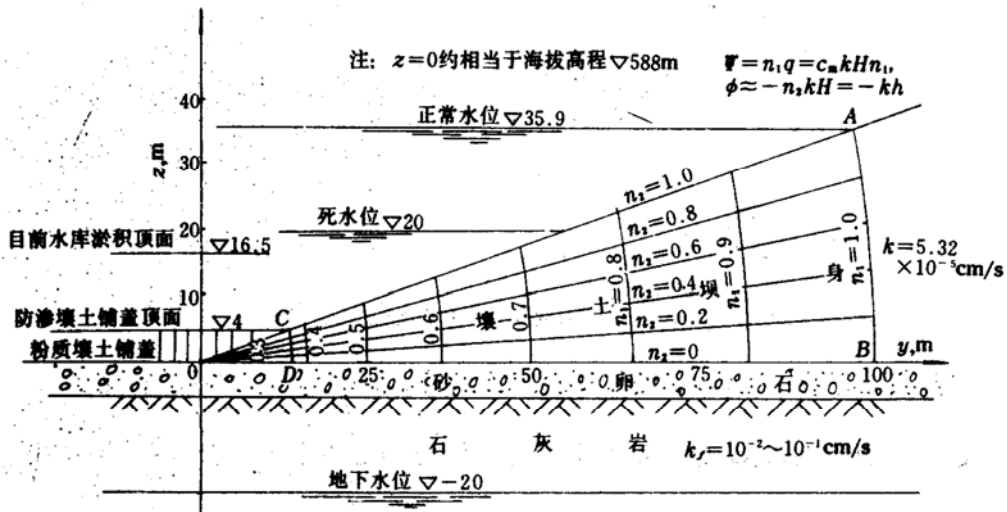


图3 羊毛湾水库大坝横断面上游部分及其流网

砂砾石及其下的灰岩溶洞发育, 且与区域性大断层连通, 地下水向库外大量排出。而坝前防渗铺盖很长, 并有水库粘性土淤积, 故坝基地下水位很深, 以致大坝蓄水初期竖向渗透水力

梯度很大, 引起坝坡破坏, 多次塌坑, 需要对坝的渗流安全性作系统的分析和评价。现用本文推导出的公式计算。

已知坝身渗透系数 $k=5.32 \times 10^{-5} \text{cm/s}$, 坝基砂砾石及灰岩等可达 $10^{-3} \sim 10^{-2} \text{cm/s}$ 以上。正常蓄水时坝前水深 $H=35.9 \text{m}$, 上游坝坡率 $m_1=2.78$, 参见图 3。

按式 (9)、(10)、(11)、(12) 可以算得: $c_m=5.734$, $c=-1.15 \times 10^8 \text{d/m}^3$, 坝身每米长的渗流量 (其中不包括通过铺盖的渗水量) $q=0.11 \text{L/s} \cdot \text{m}$, $c_1=205.85 \text{m}^2$ 。

按式 (13) 和式 (14) 计算流线和浸润线。按式 (16) 或式 (17) 计算等势线, 从而算出的流网如图 3。再由式 (22) 或 (23) 计算渗透水力梯度沿坝横断面的分布如图 4, 及 $i-z_i-F_s$ 关系如图 5。从图 2、图 4、图 5 可知: 如果渗透破坏的临界水力梯度 $i_c=10^{[6]}$, 则在水库淤积前,

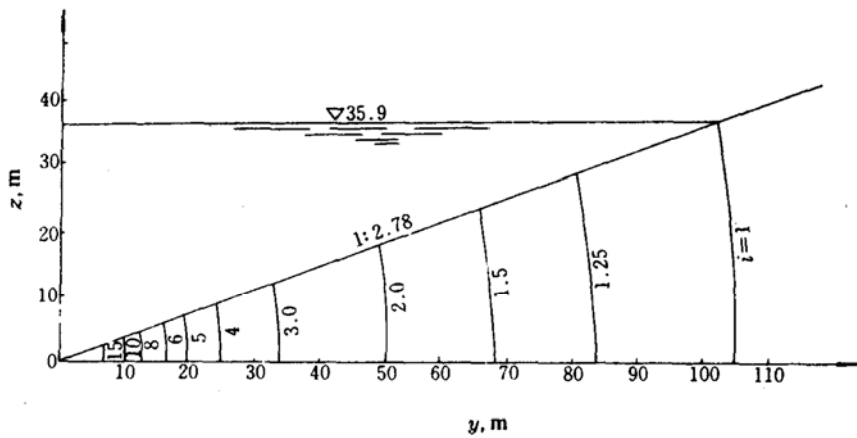


图 4 渗透水力梯度 i 在坝横断面上的分布

上游坝趾尖端部分的渗透安全系数小于 1。这同该库蓄水初期上游坡多次发生的塌坑一致。经坝前淤积粘性土厚度达 7~17m 后, 安全系数 F_s 已提高到 2~4.8。这与补救塌坑后, 该水库已多年高水位运行, 迄无事故发生是一致的。

杨正华、王士军^[5]曾用有限元法计算了羊毛湾坝的渗流, 结果如图 6。西北水科所^[6]还作过渗流模拟试验, 刘嘉忻^[7]用有关资料统计后, 提出了浸润线在坝底投影长度 l 同坝前水深 H 的关系。笔者考虑了原型观测资料后, 改写 $l-H$ 关系为

$$l=0.9315 \exp(0.05687H) \quad (24)$$

按图 1 的几何关系, l 相当于 l_1 , 而 l_1

$$=\left(\frac{1}{2}c_m - m_1\right)H=0.087H。$$

在几种稳定库水位下, 用式 (24) 及上式分别计

算 l 、 l_1 , 其结果同出逸段长度 y_0 比值的相对误差 $\left(\frac{l-l_1}{y_0}\right)$, 在常遇库水位下仅约 2%~3%, 只在尚未观测过的罕迁库水位 (如校核洪水位、死水位), 才达到 5%~6%。因此本文的公式

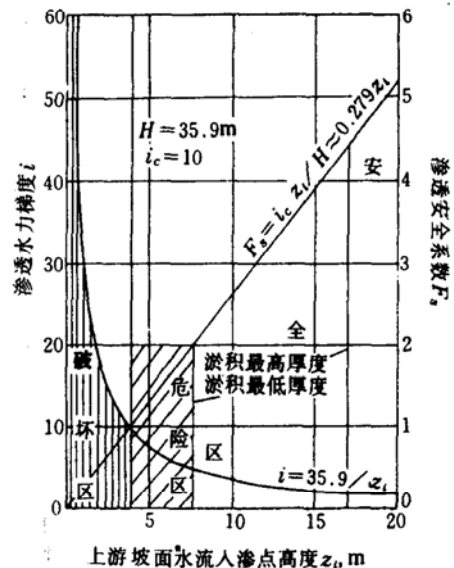


图 5 羊毛湾坝 $i-z_i-F_s$ 关系线

与原观资料统计出的式(24)吻合。

涂敏强等^[8]曾用1:160的比尺,制成重35kg的羊毛湾坝离心模型,置于半径2.5m的离心机上,以0~160g的离心加速度模拟蓄水时黄土的湿陷和渗流作用。实测的浸润线如图7。比较图3和图6,7,可知,用本文公式算出的浸润线、等势线和出逸段长,同有限元法及离心模型试验都很吻合。0+330断面

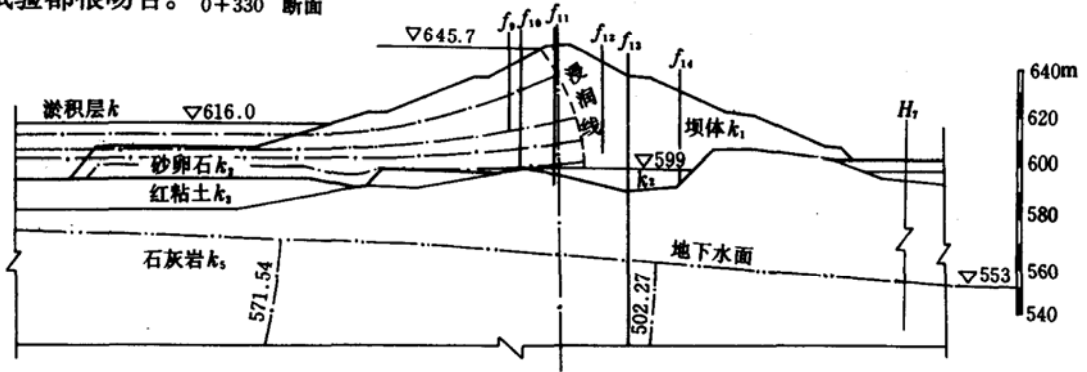


图6 羊毛湾坝渗流有限元法计算的结果

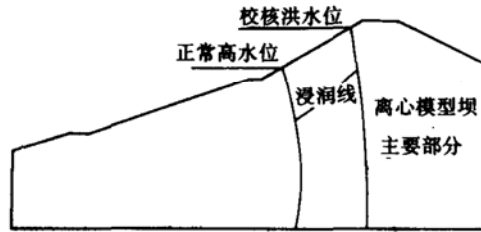


图7 羊毛湾坝离心模型试验结果

此外,用本文公式(9)算出的坝身(不含铺盖)单宽渗流量远小于有限元法算出的坝身连同铺盖的总渗流量,而且库水位愈低,用式(9)算出的渗流量愈小。这是合理的,原铺盖仅厚4m比坝身流线短,水力梯度大,铺盖应当是主要渗水区。

4. 结 语

(1) 本文推导出的理论公式(9)、(13)~(17)、(22)或(23),它们相互协调,共同构成计算悬坝渗流的理论公式系列,具有简捷、方便的优点。

(2) 用本文理论公式计算羊毛湾悬坝渗流的结果,同渗流原型观测分析、现场检查、有限元法计算、室内渗流模拟试验、大坝离心模型试验等五种途径获得的结果都能相互吻合。计算结果的误差均在实用允许范围之内。故本文提出的理论公式,可以应用在本文假设的条件相当的土坝工程中。这对土坝设计和已建坝的安全监测和性态分析等都将发挥经济效益和社会效益。

(3) 本文的保角变换关系式(5)在上游坡趾,即 $r=0$ ($y=0, z=0$)处是多值的奇点,因而不可解析。但是只要扣除以 o 点为中心、以无穷小量 $r=\epsilon$ ($\epsilon \rightarrow 0$)为半径所划的圆,则圆外坝区及其在 W 平面上的映象都是可解析的。这是复变函数经常采用的奇点解决办法,因而可行。就实用而言,取 $r \leq \frac{T}{\sin \alpha}$,以圆弧 \widehat{CD} 作为一条割缝,则割缝以右的区域都是可

解析的, 故本文公式可以适用。

(4) 悬坝的流线和浸润线都是急剧降落并在坝底出逸的陡降型抛物线。悬坝的等势线是斜率平缓、经过原点的高阶曲线型射线簇, 愈靠近坝底愈可视为直线, 如图3。

(5) 悬坝的渗透水力梯度, 沿同一条流线的值可近似视为常数, 即 $i = \frac{1}{n_1^2}$ 。愈近上游坡趾处 n_1 愈小, 故 i 值愈大, 渗透安全系数愈小(图2, 4, 5)。所以上游坡趾至铺盖顶面上下、以及渗径很短的其他局部(例如岸坡凸起处)是最易发生渗透破坏的部位, 应加强防护、监测和检查。

(6) 悬坝坝身的渗流量绝大部分来自上游坡淹没区的下部, 故减小下部坝体的透水性较有利于减小坝身的渗漏损失。

参 考 文 献

1. Árpád Kézdi and Laszlo Rethati. Handbook of Soil Mechanics, Vol 4. (Application of Soil Mechanics in Practice: Examples and Case Histories). Chapter 2. pp. 45~91, Amsterdam—Oxford—New York—Tokyo, 1990.
2. 周保中. 土坝渗流计算. 见: 毛昶熙主编. 渗流计算分析与控制. 北京: 水利电力出版社, 1990.
3. 李君纯. 悬库上土坝渗流的计算. 水利部大坝安全监测中心技术部研究报告, 1991—09
4. 李君纯. 羊毛湾水库大坝安全论证总报告. 见: 陕西省水利水土保持厅等合编, 羊毛湾水库大坝工程安全论证会文件汇编, 1991-05, 17~50.
5. 杨正华, 王士军, 羊毛湾水库坝前淤积对坝基渗透稳定的影响, (同上汇编), 325~356.
6. 西北水利科学研究所. 羊毛湾水库大坝渗流试验小结. 1982-06.
7. 刘嘉炳, 杨正华. 羊毛湾水库土坝渗流稳定分析报告. (同上汇编), 231~257.
8. 涂敏强, 易进栋. 羊毛湾水库大坝离心模型试验, (同上汇编), 505~516.

Theoretical Formulae for Seepage Through Suspended Dam

Li Jun-chun

(Dam Safety Monitoring Center, Ministry of Water Resources, PRC)

Abstract Seepage patterns are quite different between "suspended dam" and nonsuspended dam and there are no theoretical formulae for seepage through suspended dam. Systematical theoretical formulae of this topic is presented and example is given. The theoretical results are found to be in good agreement with results obtained by other methods — prototype observation, centrifuge model, analogous seepage model, inspection in-situ and FEM. It is concluded that the theoretical formulae presented are not only correct with reliable precisions, but also useful and simple for this kind of practical problems.

Key words suspended dam, seepage, theoretical computation, foundation of dam.