

圆板-地基三维系统耦联分析

姜忻良 丁学成

(天津大学土木系, 300072)

1. 前言

中厚圆板、厚圆板在任意荷载作用下难于求得解析解, 而对于在工程上经常遇到的这类板在弹性地基上的分析更是如此。本文根据柱坐标下圆柱体承受任意荷载时应满足的极点条件^[1], 选取了合适的位移函数, 采用样条有限层法, 对三维地基上的圆板进行了计算, 对地基上圆板的位移进行了分析, 并与简化地基的情况作了比较。

由于所设函数和方法的合理性, 不但使圆板在一般荷载作用下 $r=0$ 处的位移保持连续, 应力应变不再奇异, 而且使计算规模大为减小, 使得涉及到地基这样庞大的三维问题能在微机上得以求解。本文方法适用于烟囱、冷却塔、圆形水池及圆形构筑物基础板等工程的设计计算。

2. 位移函数

圆板-地基系统如图1所示。圆板是线弹性的, 地基土为层状分布。圆板与地基之间的接触面上保持法向协调, 在水平方向可以自由滑动。圆板按垂直于 z 轴方向分为若干层, 并将地基(圆柱体形)也分若干层。每层位移在径向(r)、环向(θ)、轴向(z)分别用样条函数、三角级数、线性插值函数作为位移函数。类似于文献[2], 圆板层单元与地基层单元位移函数均可表为

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^{I+1} \sum_{j=0}^J [(1-\eta)a_{ij} + \eta\bar{a}_{ij}] \Phi_i(r) \cos j\theta + [(1-\eta)a_{i1} + \eta\bar{a}_{i1}] \cos \theta \\ v &= \sum_{i=0}^{I+1} \sum_{j=0}^J [(1-\eta)b_{ij} + \eta\bar{b}_{ij}] \Phi_i(r) \sin j\theta + [(1-\eta)a_{i1} + \eta\bar{a}_{i1}] \sin \theta \\ w &= \sum_{i=1}^{I+1} \sum_{j=0}^J [(1-\eta)c_{ij} + \eta\bar{c}_{ij}] \bar{\Phi}_i(r) \cos j\theta + [(1-\eta)c_{i,1} + \eta\bar{c}_{i,1}] \bar{\Phi}_{-1}(r) \cos \theta \\ &\quad + [(1-\eta)c_{i,0} + \eta\bar{c}_{i,0}] \bar{\Phi}_0(r) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

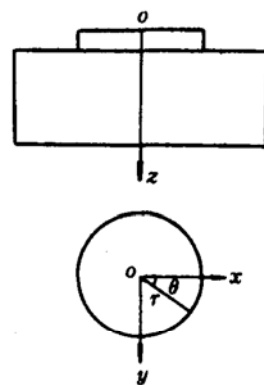


图1

其中 u, v, w 分别为 r, θ, z 方向的位移; $\eta = \frac{z-z_1}{z_{12}}$ (z_1, z_{12} 为层单元上表面坐标值和厚度); 板和地基的项数 I 取值不同。 $\Phi_i(r), \bar{\Phi}_i(r)$ 均为经线性组合的三次样条基函数^[3], 形式分别为

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(r) &= \phi_0 - 4\phi_{-1}; \quad \Phi_1(r) = \phi_1 - \frac{1}{4}\phi_0; \quad \Phi_2(r) = \phi_2; \quad \dots\dots; \quad \Phi_{I-2}(r) = \phi_{I-2}; \\ \Phi_{I-1}(r) &= \phi_{I-1} - \frac{1}{4}\phi_I; \quad \Phi_I(r) = \phi_I - 4\phi_{I+1}; \quad \Phi_{I+1}(r) = 6\phi_{I+1}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\bar{\Phi}_{-1}(r) = -2\phi_{-1} + \frac{1}{2}\phi_0; \quad \bar{\Phi}_0(r) = \phi_0; \quad \bar{\Phi}_1(r) = \phi_{-1} - \frac{1}{2}\phi_0 + \phi_1; \quad \bar{\Phi}_2(r) = \phi_2; \quad \dots\dots \quad (3)$$

当 $i=2, 3, \dots\dots, I+1$ 时, $\bar{\Phi}_i(r)$ 形式同 $\Phi_i(r)$, 其中

$$\phi_i = \phi \left(\frac{r}{\Delta r} - i \right) \quad (i = -1, 0, 1, \dots\dots, I, I+1)$$

而

$$\phi(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (x+2)^3 & x \in [-2, -1) \\ (x+2)^3 - 4(x+1)^3 & x \in [-1, 0) \\ (2-x)^3 - 4(1-x)^3 & x \in [0, 1) \\ (2-x)^3 & x \in [1, 2) \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases}$$

将位移函数写成矩阵形式

$$\{\bar{u}\} = [u \ v \ w]^T = \sum_{j=0}^J [H]_j \{\delta\}_j + [H_0][a_1 \ \bar{a}_1]^T = [H]\{\delta\} \quad (4)$$

其中 $\{\delta\} = [\{\delta\}_0^T \ \{\delta\}_1^T \ \dots\dots \ \{\delta\}_J^T \ a_1 \ \bar{a}_1]^T$, 而 $\{\delta\}_j = [A_j^T \ \bar{A}_j^T \ B_j^T \ \bar{B}_j^T \ C_j^T \ \bar{C}_j^T]^T$ 为未知参数列阵, ($j=0, 1, \dots\dots, J$)。

弹性力学柱坐标三维问题的应变矩阵为

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= [\epsilon_r \ \epsilon_\theta \ \epsilon_z \ \gamma_{r\theta} \ \gamma_{\theta z} \ \gamma_{zr}]^T \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial r} \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{v}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right]^T \\ &= [N]\{\delta\} \end{aligned} \quad (5)$$

应力矩阵为

$$\{\sigma\} = [\sigma_r \ \sigma_\theta \ \sigma_z \ \tau_{r\theta} \ \tau_{\theta z} \ \tau_{zr}]^T = [D]\{\epsilon\} \quad (6)$$

其中 $[D]$ 是各层材料的弹性矩阵。

由最小势能原理可以得到层单元刚度方程

$$[K^e]\{\delta\} - \{f\} = 0 \quad (7)$$

其中 $[K^e]$ 是由 $(J+3)^2$ 个子矩阵组成的矩阵, 令第 l 行第 j 列的子矩阵为 $[K_{lj}^e]$, 由三角函数

的正交性可以得到

$$[K_{ij}^e] = 0 \quad (l \neq j; l, j = 0, 1, 2, \dots, J) \quad (8)$$

层单元刚度矩阵集成整体刚度矩阵同一般有限元法, 注意到板与地基交接处的法向位移协调, 最后得到圆板-地基系统的刚度方程

$$[K]\{\Delta\} - \{F\} = 0 \quad (9)$$

式中 $[K]$ 为系统的刚度矩阵, $\{F\}$ 为系统的荷载矩阵。当 $l \neq j$ 时, 式(8) $[K_{ij}^e] = [0]$, 方程对 j 已不再耦联, 因此可以按 j 分别求解。由式(9)求得 $\{\Delta\}$ 后, 则可由式(4)~(6)分别求得圆板-地基系统的位移、应变、应力分量。

3. 圆板和层状地基的耦联分析

3.1 圆板内力

圆板半径 $R_p = 3.2\text{m}$, 厚度 $h_p = 0.9\text{m}$, $E_p = 17.5\text{GPa}$, $\mu_p = 0.2$, 将板均匀分为 3 层。地基按地质条件分为 4 层, 地基参数: $E_{11} = 250\text{MPa}$, $h_{11} = 3\text{m}$, $\mu_{11} = 0.4$; $E_{12} = 500\text{MPa}$, $h_{12} = 4\text{m}$, $\mu_{12} = 0.4$; $E_{13} = E_{14} = 750\text{MPa}$, $h_{13} = h_{14} = 4\text{m}$, $\mu_{13} = \mu_{14} = 0.47$ 。地基外侧取到 $R_t = 16\text{m}$, 板 I 取为 8, 地基 I 取为 16。板上荷载函数分别为

$$p_1(r, \theta) = q_0 + \frac{q_1 r \cos \theta}{R_p}, \quad p_2(r, \theta) = q_0 + \frac{q_2 r^3 \cos \theta}{R_p}$$

其中 $q_0 = 1000\text{kPa}$, $q_1 = 500\text{kPa}$, $q_2 = 100\text{kPa}$ 。部分计算结果分别列于表 1, 表 2 和表 3。

表 1 $p_1(r, \theta)$ 作用下板位移和内力值 (板上表面)

$r(\text{m})$	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2
$w(\text{mm})$ ($\theta = 0$)	16.052	16.476	16.469	16.409	16.383	15.923	15.395	14.136	12.952
$w(\text{mm})$ ($\theta = \pi$)	16.052	14.940	13.379	11.863	10.537	8.973	7.549	5.560	3.656
$\sigma_r(\text{MPa})$ ($\theta = 0$)	-8.267	-8.204	-8.188	-8.203	-7.916	-6.691	-4.824	-1.609	-0.002
$\sigma_r(\text{MPa})$ ($\theta = \pi$)	-8.267	-8.008	-7.275	-6.624	-5.986	-4.615	-3.293	-0.947	-0.013

由表 1、表 2 可以看到, 由于所设位移函数满足圆心处的极点条件, 在一般荷载作用下, 圆心处的位移保持连续, 应力应变不再奇异。表 3 给出了板与地基交接面处的合力与合力矩的数值, 它应该与外合力、外力矩相平衡, 比较两数值可以看到, 沿板半径取 8 个点的情况下, 最大误差仅在 3.78% 之内, 这对于两种不同介质的三维问题, 结果是令人满意的。

3.2 圆板沉降

圆板尺寸与材料特性同前, 板上仅有 q_0 作用。为分析地基沿不同深度对圆板沉降的影响, 假定地基沿深度为匀质的, $E_t = 500\text{MPa}$, 地基侧边取 $R_t = 16\text{m}$ ($5R_p$)。计算结果列于表 4。表 4 中 w_0 为板上表面中心点位移值; w_s 为中心处总沉降量。从表 4 可以看到, 当所取的地基深

度不断增加时, 沉降趋于一定值。根据一定值可以得到所取土层深度对沉降的贡献, 当 h_t 仅是 $\frac{1}{2}R_p$ 时, 沉降就占总沉降量的一半; $h_t = \frac{3}{2}R_p$ 时, 沉降占总沉降的90%以上, 而当地基深度取到板半径的3~4倍时, 即可模拟圆板与无限深地基的耦联分析。同样, 周边取到板半径4~5倍时, 也足能模拟无限远处的耦联分析。(当 $h_t = 16\text{m}$ 、 $R_t = 12.8\text{m}$ 时, $w_0 = 0.009135\text{m}$; $R_t = 19.2\text{m}$ 时, $w_0 = 0.009153\text{m}$)。由此还可以看到, 在实际工程常用的简化计算中, 对于各层材料性质不同的地基, 对每层土要做适当的加权平均才能正确反映耦联特性。

表2 $p_2(\tau, \theta)$ 作用下板位移和内力值(板上表面)

$r(\text{m})$	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2
$w(\text{mm})$ ($\theta=0$)	16.052	16.604	16.750	16.876	17.080	16.892	16.660	15.700	14.808
$w(\text{mm})$ ($\theta=\pi$)	16.052	14.812	13.098	11.396	9.840	8.004	6.284	3.996	1.800
$\sigma_r(\text{MPa})$ ($\theta=0$)	-8.267	-8.051	-7.875	-7.804	-7.562	-6.467	-4.778	-1.621	-0.002
$\sigma_r(\text{MPa})$ ($\theta=\pi$)	-8.267	-8.161	-7.593	-7.022	-6.339	-4.838	-3.338	-0.935	-0.014

表3 外荷、板与地基交接处内力值

荷载函数	合内力(MN)	外荷(精确值)(MN)	合力矩(MN·m)	外力矩(精确值)(MN·m)
$p_1(\tau, \theta)$	30.95	32.17	12.49	12.87
$p_2(\tau, \theta)$	30.95	32.17	17.69	17.57

表4 三维地基 q_0 作用下板中心处位移值(上表面)

$h_t(\text{m})$	1.6	3.2	4.8	6.4	8	9.6	11.2	12.8	14.4	16
$w_0(\text{mm})$	4.644	7.641	8.493	8.832	8.871	9.033	9.126	9.147	9.180	9.180
$w_0/w_s(\%)$	50.59	83.24	92.52	96.21	96.63	98.40	99.41	99.64	100	100

3.3 简化地基模型后圆板的沉降

若假定土完全处于侧限状态, 土的位移函数仅保留式(1)的第三式, 这样三维地基成为一维状态。将式(1)第三式写成矩阵形式, 用与前面类似的方法, 就能得到土完全侧限状态下的圆板-地基刚度方程。

圆板和地基的尺寸及各参数同前, 计算结果列于表5。从表5中可以看到与表4类似的结果。比较两条沉降曲线(图2)可以看到, 当地基深度、地基侧边取到一定范围后, 侧限后位移比三维情况下的略小, 而当取较小厚度时, 数值差别较大。

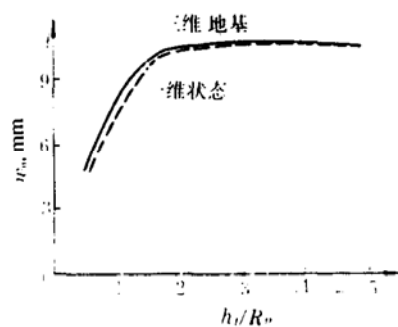


图2

表 5

侧限状态 q_0 作用下板中心位移值(上表面)

$h_t(\text{m})$	1.6	3.2	4.8	6.4	8	9.6	11.2	12.8	14.4	16
$w_0(\text{mm})$	4.401	7.218	8.400	8.730	8.796	8.934	9.063	9.093	9.090	9.090
$w_0/w_s(\%)$	48.42	79.41	92.41	96.04	96.77	98.28	99.70	100	100	100

4. 结 语

本文选取了满足圆柱体极点条件的位移函数,采用样条有限层法对圆板-地基系统作了分析。这种方法具有精度高而计算量小等特点。通过圆板-地基系统的研究可以发现,决定主要沉降的是板下约 $h_t = \frac{3}{2}R_p$ 范围内的土层;当地基深度取到板半径的3~4倍,地基外侧取到板半径的4~5倍时,即可模拟圆板与无限深远地基边界的耦联分析;而用假定土完全侧限的方法所得的结果略小于三维状态下的计算结果,但计算规模大为减小,这种处理方法适用于分析实际工程中大量的地基问题。

参 考 文 献

1. 姜忻良, 丁学成. 三维圆柱体的极点条件及其样条函数解法. 天津大学学报, 1991(2): 84~91.
2. 姜忻良, 丁学成. 液体-结构-桩基-土体系相互作用动力分析. 天津大学学报, 1992(1): 62~70.
3. 秦 荣. 结构力学的样条函数方法. 广西人民出版社, 1985. 9~64.

请您及时订阅1994年《人民黄河》

《人民黄河》是水利部黄河水利委员会主办的水利水电综合性技术杂志。设有“水文泥沙、水资源、防洪治河、黄土高原整治、水土保持、水利水电工程、灌溉供水、水政与法制、管理与改革”等栏目。内容丰富, 信息量大; 还承接水利水电行业各类广告业务。

本刊为月刊, 每月20日出版, 16开本, 64面, 全年订价14.4元。明年继续自办发行, 欲订购者, 可直接汇款到《人民黄河》编辑部。同时, 请在汇款单附言中注明收件人姓名、地址、邮编及份数。

本部地址: 郑州市金水路11号

邮 编: 450003