

土力学极限分析的滑移单元最优化 算法及侧土压力计算

董正筑 黄平
(中国矿业大学, 徐州)

提 要

本文介绍了 P. Gussmann 提出的滑移单元 (KEM) 法, 就挡土结构的侧土压力问题给出了一些计算实例。该方法采用有限单元离散化, 利用最优化过程求得最佳上限解。该方法可用于土和松散岩石的挡土结构、承载地基、边坡稳定性等问题的计算, 与传统的工程方法相适应, 便于工程应用, 而且对三维问题也提供了解决的途径。

一、概 述

土力学中挡土结构的侧土压力、边坡稳定性问题的传统工程方法大多采用极限分析法, 使用尝试法求最危险的滑移面。该方法计算繁杂, 在参数较多的情况下, 计算更加困难。而大多数数值计算方法, 如差分法、有限元法、边界元法等与传统的工程方法有很大的差距。另一方面, 在确定本构关系和模型所需的参数方面也有较大的困难^[1,2]。

P. Gussmann 1982年在 Edmonton 岩土力学数值方法会议上提出的滑移单元法 (Kinematical Element Method, 简称 KEM 法) 采用有限单元离散化, 在运动学分析的基础上, 计算耗散功与外力功, 根据不同问题确定相应的目标函数, 利用最优化过程求得最佳上限解^[3]。该方法可用于土和松散岩石的挡土结构、承载地基、边坡稳定性等问题的计算, 与传统的工程方法相适应, 便于工程应用, 而且对三维问题也提供了解决的途径^[4,5]。本文就挡土结构的侧土压力问题介绍 KEM 法, 给出一些计算的实例。

二、KEM 法原理

如图 1 所示的挡土结构, AB 为自由边界, AC 为挡土结构。KEM 法首先对土体进行任意的单元划分, 在平面问题中通常使用多边形的单元, 单元的边界为直线段。

结点的坐标以 x_i, z_i 表示, 单元 \textcircled{a} 与单元 \textcircled{b} 间的公共边界, 结点 i, j 之间的一段以 s 表示, 其倾角以 α_{ij} 或 α_{ji} 或 α_s 表示, 并以 x 轴正向反时针转动的方向为 α 的正向。引入如下的记号:

$$\left. \begin{aligned} z_{ij} &= z_i - z_j & z_{ji} &= -z_{ij} \\ x_{ij} &= x_i - x_j & x_{ji} &= -x_{ij} \\ L_{ij} &= L_{ji} = \sqrt{x_{ij}^2 + z_{ij}^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

倾角可用下式表示:

$$\sin \alpha_{ij} = z_{jd} / L_{ij}; \quad \cos \alpha_{ij} = x_{jd} / L_{ij} \quad (2)$$

设 n 边形单元 $\textcircled{1}$ 的结点为 (x_i, z_i) , 其面积为

$$A = 0.5 \sum_{i=1}^n (z_{i+1} - z_{i-1}) x_i \quad (3)$$

其中 $z_0 = z_n$ $z_{n+1} = z_0$

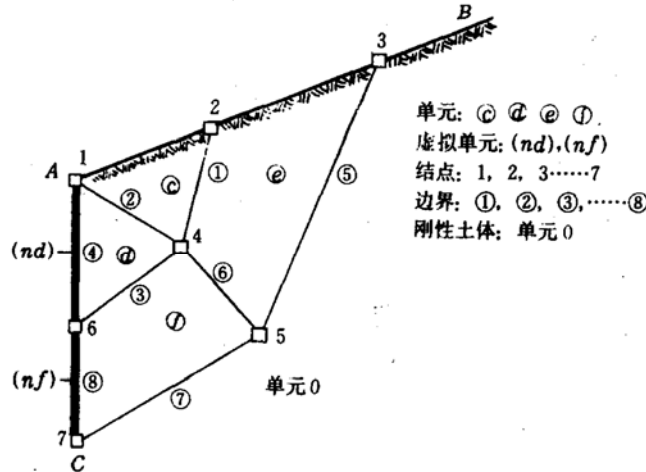


图1 单元划分网格

(一) 滑移单元的运动学分析

对滑移单元进行运动学分析, 其目的是根据假定的挡土结构的虚拟位移求出各单元的位置, 如图 2 (a) 所示, 按照极限分析方法, 假定土体发生剪切破坏, 采取如下假设: ①单元体的内部为刚性; ②滑移边界上应力满足库仑准则; ③本文重点在于介绍计算原理与方法。因此为简明起见, 假设各单元无剪胀, 相邻单元做平移滑动。在剪胀存在时, 计算原理与方法相同, 只是计算公式做相应的改动, 将另文加以介绍。

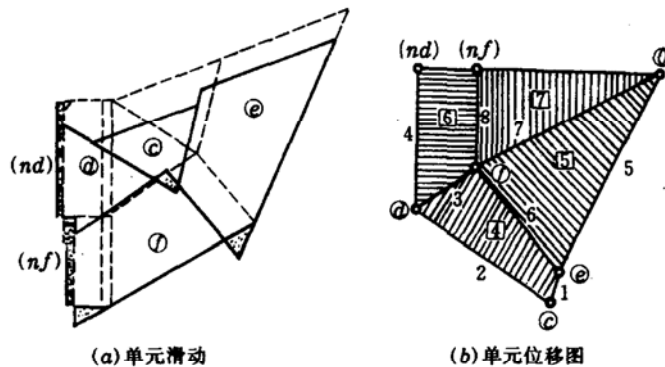


图2 滑移单元的运动学分析

土体发生破坏时, 挡土结构 (nd) , (nf) 虚拟单元首先发生滑移, 其位移虚设为已知。接着单元 $\textcircled{1}$ 一方面沿 (nf) 单元滑移, 一方面沿底部(虚拟单元 0)滑移, 其位移可由虚拟单元 0 (位移为零) 和 (nf) 的虚设位移求得, 然后依次可以确定 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{4}$ 、 $\textcircled{3}$ 单元的位移。各单元的位移图解如图 2 (b) 所示。图中, 结点坐标表示单元体的位移, 虚拟单元 0 (刚性土体) 位于原点, 表示其水平位移与垂直位移均为零。虚拟单元 (nf) 的虚拟位移为水平向左, 其与原点的

距离表示所设虚拟位移的大小。单元①一方面沿(nf)单元滑移,在位移图中以与边界⑧(图1)平行即垂直于结点(nf)的位移表示,另一方面单元①沿底部(虚拟单元0)滑移,以从原点出发,沿单元①与刚性土体共同边界(图1边界⑦)方向的位移来表示,上述两个方向的交点即是单元①的位移。其余单元②、③、④的位移可以按照同样的方法加以确定。

设 V_{ef} 表示单元①相对于单元②的相对位移矢量,其大小为 V_{ef} ,其方向平行于单元①、②的公共边界,因此分量可表示为

$$\left. \begin{aligned} V_{ef,x} &= V_{ef} \cos \alpha_{ef} \\ V_{ef,z} &= V_{ef} \sin \alpha_{ef} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

或者以单元①、②的绝对位移 V_x, V_z 表示

$$\left. \begin{aligned} V_{ef,x} &= V_x^f - V_x^e \\ V_{ef,z} &= V_z^f - V_z^e \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 $V_x^f, V_z^f, V_x^e, V_z^e$ 分别为单元①、②的绝对位移分量。

各单元位移的解析表示如下所述。从位移图可以看到,相邻单元②、③、④、①的位移形成封闭多边形,因此有如下的关系成立:

$$V_{ec} + V_{cd} + V_{df} + V_{fe} = 0 \quad (6)$$

或者下标以相应的界面的编号来代替,表示为

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_6 = 0$$

考虑其它的封闭多边形,得到

$$\left. \begin{aligned} V_7 + V_8 + V_{nf} &= 0 \\ V_5 + V_6 + V_7 &= 0 \\ V_3 + V_4 + V_8 + V_{na/nf} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

上式中 V_{nf} 表示虚拟单元(nf)虚设的位移; $V_{na/nf}$ 表示虚拟单元(nd), (nf)的相对位移。

上述的矢量方程写成标量形式后,便可得到总的单元体的位移方程

$$KV = V^*$$

其中 V 为各单元界面的未知相对位移; K 为各单元边界倾角 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 值形成的非对称系数矩阵, V^* 为含有预先设定的虚拟屈服边界单元的位移矢量。

(二) 静力学分析

静力学分析建立各单元的平衡条件,以求得各单元边界上的作用力。设单元①(图3)任意边界 s 的方向角为 α'_s , 其上作用的合力为 $S_s = (N_s, T_s)$ 。 N_s 为法向力,压力为正; T_s 为切向力,其符号由相对位移来决定。 N_s 由法向压力 N'_s 和静水压力 U_s 所决定, T_s 根据库仑准则由界面上的摩擦力 R_s 和粘聚力 C_s 所组成

$$\left. \begin{aligned} N_s &= N'_s + U_s = N'_s + u_s L_s \\ T_s &= R_s + C_s = R_s + c_s L_s \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

上式中 u_s 为静水压力系数; c_s 为粘聚系数; L_s 为边界 s 的长度。

设边界 s 上的受邻近单元的压力为 Q_s (压力为正), 它与法向之间的夹角为 ϕ_s , 则

$$N'_s = Q_s \cos \phi_s; \quad R_s = Q_s \sin \phi_s \quad (9)$$

合力 S_s 在坐标轴上的分量为

$$\left. \begin{aligned} S'_{sx} &= -[Q_s \sin(\alpha'_s + \phi_s) + C_s \cos \alpha'_s] + U_s \sin \alpha'_s \\ S'_{sz} &= Q_s \cos(\alpha'_s + \phi_s) - C_s \sin \alpha'_s + U_s \cos \alpha'_s \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

考虑到土体自重与外力作用 (设其分量为 P'_x, P'_z) 单元体的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum S_{sx} + P'_x &= 0 \\ \sum S_{sz} + P'_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

即

$$\begin{aligned} -\sum [(Q_s \sin(\alpha'_s + \phi_s) + C_s \cos \alpha'_s + U_s \sin \alpha'_s] + p'_x &= 0 \\ \sum [Q_s \cos(\alpha'_s + \phi_s) - C_s \sin \alpha'_s + U_s \cos \alpha'_s] + p'_z &= 0 \end{aligned}$$

其中求和是对单元 \textcircled{D} 的所有边界进行的。

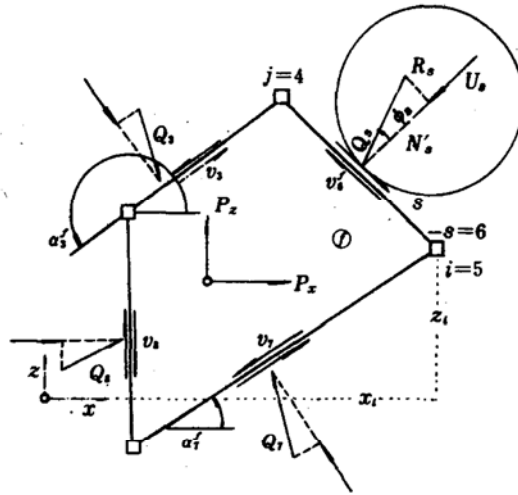


图 3 静力学分析

以图 1 中 \textcircled{C} 单元为例, 可得未知反力 Q_1, Q_2 的平衡方程

$$\begin{aligned} -\sin(\alpha_1^c + \phi_1)Q_1 - \sin(\alpha_2^c + \phi_2)Q_2 + p_x^c - C_1 \cos \alpha_1^c \\ - U_1 \sin \alpha_1^c - C_2 \cos \alpha_2^c - U_2 \sin \alpha_2^c &= 0 \\ \cos(\alpha_1^c + \phi_1)Q_1 + \cos(\alpha_2^c + \phi_2)Q_2 + p_z^c - C_1 \sin \alpha_1^c \\ - U_1 \cos \alpha_1^c - C_2 \sin \alpha_2^c + U_2 \cos \alpha_2^c &= 0 \end{aligned}$$

以矩阵的形式表示为

$$K^c q^c + f^c = 0 \quad (12)$$

式中

$$K_v = \begin{bmatrix} K_{1x}^c & K_{2x}^c \\ K_{1z}^c & K_{2z}^c \end{bmatrix}; \quad q^c = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}; \quad f^c = \begin{Bmatrix} f_x^c \\ f_z^c \end{Bmatrix}$$

$$K_{1x}^c = -\sin(\alpha_1^c + \phi_1); \quad K_{2x}^c = -\sin(\alpha_2^c + \phi_1);$$

$$K_{1z}^c = \cos(\alpha_1^c + \phi_1); \quad K_{2z}^c = \cos(\alpha_2^c + \phi_1).$$

$$f_x^c = p_x^c - C_1 \cos \alpha_1 - U_1 \sin \alpha_1 - C_2 \cos \alpha_2 - U_2 \sin \alpha_2$$

$$f_z^c = p_z^c - C_1 \sin \alpha_1 + U_1 \cos \alpha_1 - C_2 \sin \alpha_2 + U_2 \cos \alpha_2$$

因此各边界上的压力可以通过上述线性方程组求得。

对于其它单元可类似地推得求解界面上未知反力的方程, 最后可集成总的单元体的平衡方程

$$KQ + F = 0 \quad (13)$$

Q 为单元边界上的未知反力, K 为 $\sin(\alpha + \phi), \cos(\alpha + \phi)$ 所组成的矩阵, F 为已知外力 (包括重力) 及静水压力等。

(三) 虚功与目标函数

由平衡方程和各单元的虚位移, 我们可得到虚功方程, 首先我们计算滑移面上边界力的虚功。设 D_s 为某一滑移面 s 上的虚功, 它由该界面两侧单元的相对虚位移 V_s 与该界面上的合力 S_s 计算, 即

$$D_s = -V_{sx}S_{sx} - V_{sz}S_{sz} \quad (14)$$

其中虚位移 V_s 的分量由式(4)算得

$$V_{sx} = V_s \cos \alpha_s; \quad V_{sz} = V_s \sin \alpha_s$$

该界面上的合力 S_s 由式(10)计算为

$$\left. \begin{aligned} S_{sx} &= -\sin(\alpha_s + \phi_s)Q_s - C_s \cos \alpha_s - U_s \sin \alpha_s \\ S_{sz} &= \cos(\alpha_s + \phi_s)Q_s - C_s \sin \alpha_s + U_s \cos \alpha_s \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

代入式(14)后, 整理得

$$D_s = V_s(\sin \phi_s Q_s + C_s) = V_s(R_s + C_s) \quad (16)$$

下面对整体的虚功方程进行推导。由平衡方程(11), 分别乘以相应位移 V'_x, V'_z 后对整体所有单元求和

$$\sum_{j=1}^m [-V'_x(p'_x + \sum_s S'_{sx}) - V'_z(p'_z + \sum_s S'_{sz})] = 0 \quad (17)$$

该方程对于任意的虚位移或真实位移都是成立的。这里 m 为单元划分总数。指标 S 的求和是对每一单元的边界进行的。

利用关系式(5), 相邻单元之间, 例如单元①与单元②之间的绝对虚位移与它们之间的相对位移 V_s 有关系式

$$\begin{aligned} V'_x &= V_x^{n'} + V_{sx}, \\ V'_z &= V_z^{n'} + V_{sz}, \end{aligned}$$

对于相邻单元根据作用力与反作用力的关系有

$$S_{sx}^e = -S'_{sx}, \quad S_{sz}^e = -S'_{sz}$$

上述式(17)双重求和部分经整理后可改写为

$$-\sum_{j=1}^m (V'_x p'_x + V'_z p'_z) - \sum_{s=1}^n (V_{sx} S_{sx} + V_{sz} S_{sz}) - \sum_{r=1}^{m_r} (V_x^{n'} S_x^{r'} + V_z^{n'} S_z^{r'}) = 0 \quad (18)$$

其中求和指标 n 为边界个数, m_r 为虚拟滑移单元个数。在图(1)的单元划分中, $m=4, n=8, m_r=2$ 。

设

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^m (V'_x p'_x + V'_z p'_z) = \sum A' \\ D &= -\sum_{s=1}^n (V_{sx} S_{sx} + V_{sz} S_{sz}) = \sum D_s \\ \hat{A} &= \sum_{r=1}^{m_r} (V_x^{n'} S_x^{r'} + V_z^{n'} S_z^{r'}) = \sum \hat{A}' \end{aligned}$$

其中 A 的意义为外力的虚功; D 的意义为内部边界耗散虚功, 由式(16)计算; \hat{A} 的意义为虚拟单元边界上力的虚功, 在本问题中表示的是挡土结构(虚拟单元)对相邻土体单元作用力的虚功。

引入上述记号后, 式(18)可表示为

$$D = A + \hat{A} \quad (19)$$

这便是熟知的虚功方程。该方程也可按文献[6, 7]直接建立, 而不进行单元的静力分析。由于本文的方法中在相邻边界上的压力 Q 是作为最优化的约束条件出现的, 因此进行上述分析。将式(19)改写为

$$\hat{A} = D - A \quad (20)$$

根据 W. F. Chen 所表述的上限定理^[6,8]: “只要存在一个几何上容许的位移速度场, 按照外载荷所做的功率等于内部塑性变形耗散功率所计算得到的载荷, 大于或等于实际载荷。”实际可能的侧土压力应使虚功 \hat{A} 为最小。我们选取虚功 \hat{A}

$$\hat{A} = \sum (V_x^{n'} S_x' + V_z^{n'} S_z') \quad (21)$$

$$\text{或 } f = D - A \quad (22)$$

为目标函数, 其相应的实际的可能滑移单元应由相应的 $f^* = \min f(x)$ 所得到的结点来决定。

以上我们假定单元体无剪胀与压缩, 在剪胀与压缩存在时, 有类似的虚功计算式。

在挡土结构侧土压力的计算中

$$\begin{aligned} f &= V^{nd} S_i + V^{n'} S_s \\ &= V_x^{nd} S_{ix} + V_z^{n'} S_{iz} + V_x^{nd} S_{sx} + V_z^{n'} S_{sz} \end{aligned}$$

在倾角为 δ_s 的挡土结构与土体之间的摩擦角为 δ_v 时, 如令

$$\begin{aligned} V^{nd} &= V^{n'} = V_{res} \\ S_{res} &= S_i + S_s \\ V_x &= \cos \delta_s V_{res}, \quad V_z = \sin \delta_s V_{res} \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} S_{x,res} &= \cos \delta_v S_{res}, \quad S_{z,res} = \sin \delta_v S_{res} \\ f &= \cos(\delta_s - \delta_v) V_{res} S_{res} \end{aligned}$$

在计算主动侧土压力 E_a 时, S_{res} 即为边界上的侧土压力

$$f = -a E_a \quad (23)$$

这里 a 为一常数, 等于 $\cos(\delta_s - \delta_v) V_{res}$, 从而可得

$$E_a = -f/a \quad (24)$$

在计算被动侧土压力 E_p 时, 取

$$f = a E_p \quad (25)$$

(四) 最优化过程

最优化过程对选取的目标函数求出极值, 从而得到侧土压力的最佳上限解。这时相应的结点决定的单元构成实际可能的滑移机构。

上述最优化问题的数学形式为

$$\left. \begin{aligned} f^* &= \min f(x) \\ g_j(x) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

这里的约束条件为

$$\left. \begin{aligned} a_i x_1 + b_i x_2 + \dots + c_i &\geq 0 \\ A_j &> 0 \\ Q_k &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式(27)中第一式表明单元结点不可逾越土体原始边界,第二式要求单元的面积为正,它们可以通过计算式(3)加以校核。第三式要求界面之间无拉力存在,由式(13)确定。

可采用多种的最优化方法,本程序中采用DFP变尺度法,收敛较快,计算程序的流程图如图4。

上述计算程序流程的主要步骤为:

1. 先输入初始单元划分,以及有关的参数。
2. 通过运动学分析,求得各单元的位移;通过静力学分析,求得各界上的作用力;再计算相应的目标函数值。
3. 利用最优化过程,反复第2步,求得目标函数的极小值,以及相应的单元划分。
4. 根据求得的目标函数的极值,计算相应的侧土压力。

[例]如图5所示的挡土结构,我们采用图中所示的单元为初始滑移单元,最后得到实线所示的滑移单元;计算得到的主动土压力采用一单元时为331.0kN/m²,两单元时为354.4kN/m²,三单元时为354.5kN/m²,18单元时为359.3kN/m²(18单元时的初始滑移单元未画出)。

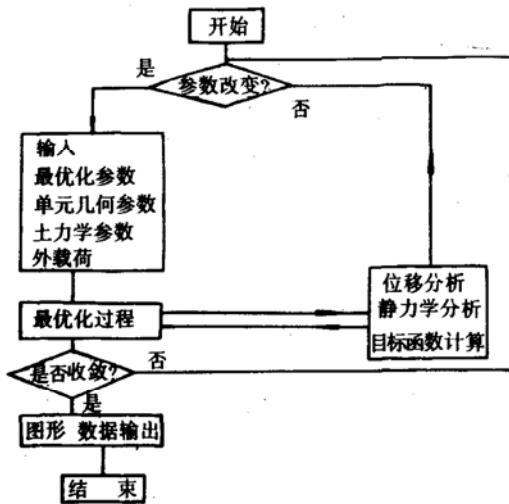


图4 KEM 计算程序流程图

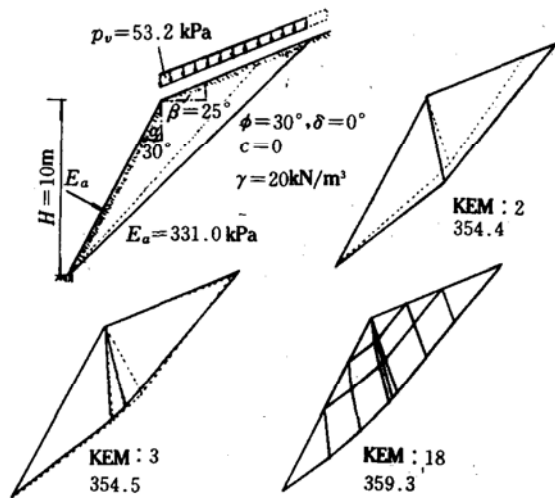


图5 多种滑移单元主动土压力计算

三、计算实例

根据滑移单元法计算的结果与Rosenfarb, Wai-fan Chen采用夹对数区(logsandwich)机理计算值^[6,9]的比较见表1与表2。计算中,所取单元数为2。

表1 主动土压力系数K_a比较表

| 内摩擦角 | 计算方法 | 主动土压力系数K _a | | | | |
|-------------------|-------|-----------------------|------------|------------|------------|------------|
| | | $\beta = 0^\circ$ | 10° | 20° | 30° | 40° |
| $\phi = 30^\circ$ | 文献[6] | 0.333 | 0.373 | 0.438 | 0.684 | |
| | KEM方法 | 0.333 | 0.372 | 0.434 | 0.634 | |
| $\phi = 40^\circ$ | 文献[6] | 0.217 | 0.237 | 0.266 | 0.316 | 0.511 |
| | KEM方法 | 0.217 | 0.237 | 0.266 | 0.311 | 0.428 |

表 2 被动土压力系数 K_p 比较表

| 内摩擦角 | 计算方法 | 被动土压力系数 K_p | | | | |
|-------------------|--------|-------------------|------------|------------|------------|------------|
| | | $\beta = 0^\circ$ | 10° | 20° | 30° | 40° |
| $\phi = 30^\circ$ | 文献 [6] | 3.00 | 4.01 | 5.25 | 6.74 | |
| | KEM 方法 | 3.00 | 4.08 | 5.26 | 6.83 | |
| $\phi = 40^\circ$ | 文献 [6] | 4.60 | 6.68 | 9.68 | 14.0 | 19.2 |
| | KEM 方法 | 4.60 | 6.68 | 9.73 | 14.2 | 21.1 |

对于粘聚力存在的情况, 库仑方法和朗肯方法不能直接应用。图 6 给出了 KEM 法计算的一些结果。图中

$$\lambda = c/\gamma h$$

c 为粘聚力系数, kPa; γ 为容重, kN/m³; h 为墙高, m。侧压力合力 E_a 为

$$E_a = K_a \gamma h^2 / 2$$

K_a 为主动土压力系数。

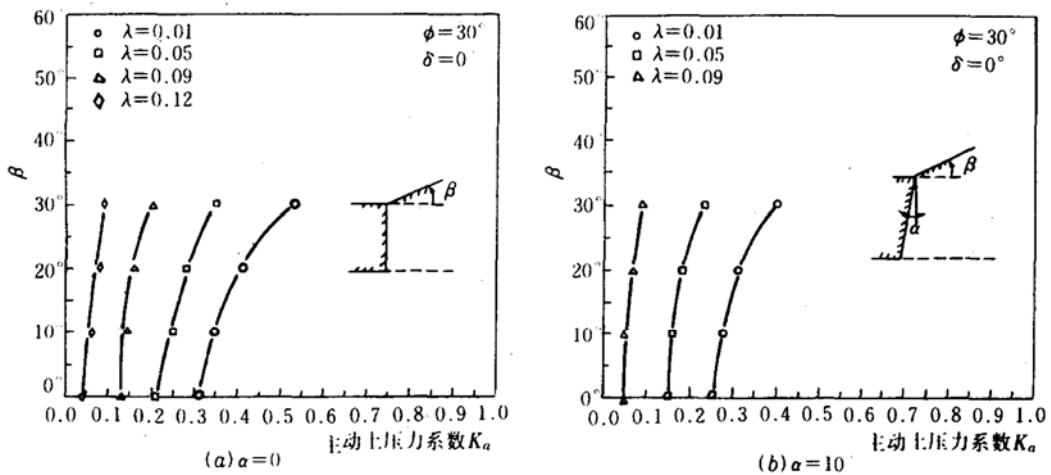


图 6 粘聚力存在时主动土压力系数的计算

四、结 语

极限分析的滑移单元最优化算法, 在对土体进行单元划分的基础上, 对单元的位移和静力平衡进行分析, 得到虚功方程。再根据具体问题, 确定目标函数。根据上限定理, 最优化的结果, 得到最佳上限解。这样, 在任意确定的滑移机构的基础上, 求得实际可能的滑移机构。本文就挡土结构侧土压力问题对该方法进行了介绍, 篇幅所限, 不考虑剪胀的影响, 方法的基本原理也适用于边坡稳定问题、地基承载问题, 以及相应的三维问题, 这些将另文加以研究。

本文的工作是在 P. Gussmann 教授直接指导下进行的, 并得到了中国矿业大学钱鸣高教授、李世平教授、狄乾生副教授的支持。水利水电科学研究院陈祖煜高级工程师提出了十分中肯的意见和建议, 在此一并表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Desai S, Chritian J. 岩土工程数值方法. 卢世深等译. 中国建筑工业出版社, 1981: 367~380.
- [2] 邹广电. 运用最优化方法研究土坡稳定分析圆弧法的数值解. 全国第一届土木工程计算力学会议论文集. 西南交通大学出版社, 1987: 252.
- [3] Gussmann P. Kinematical Elements for Soil and Rocks. Proc 4th Int Conf on Num Meth in Geomech. 1982: 47~52.
- [4] Gussmann P. Die Methode der Kinematische Element, Mitteilung 25. Baugrundinst, Stuttgart, 1986: 10~50.
- [5] Smolczyk U. Grundbau Taschenbuch Teil 1. Verlag Von Wilhelm Ernst & Sohn, 1980: 281~304.
- [6] Chen Wai-fan. Limit Analysis and Soil Plasticity. Elsevier Scientific Publishing Co, 1975: 47~58, 341~390.
- [7] 郑颖人, 龚晓南. 岩土塑性力学基础. 中国建筑工业出版社, 1989: 250~267.
- [8] Giam P S K, Donald I B. Soil Stability Analysis by an upper Bound Plasticity Method. Civil Engineering Research Report. ISBN 087469145, Australia, 1989, (2), 15~35.
- [9] Bowles J E. 基础工程分析与设计. 唐念慈等译. 中国建筑工业出版社, 1987: 280~290.

Kinematical Element Method in Limit Analysis for Lateral Earth Pressure

Dong Zheng-zhu Huang Ping

(Chinese University of Mining and Technology, Xuzhou)

Abstract

Kinematical Element Method (KEM) suggested by P. Gussmann is introduced in solving the problem of lateral earth pressure on retaining structures and computed results are given. Discrete model is applied to find the optimal upper limit solution. This method can be used in solving problems of stability of retaining structure, foundation and slope for soil and loose rock. It agrees with the traditional engineering methods and provides means in solving three dimensional problems.