

软土地基固结与沉降概率分析

李国周 欧阳葆元

(铁道部科学研究院, 北京)

提 要

本文应用可靠性理论, 通过对软土地基土性指标的概率统计处理, 对深圳机场场道软基加固试验段的地基沉降量、固结度及差异沉降进行了一次比较完整的概率分析; 推导了用砂井排水和超载预压方案加固软基时的沉降量和固结度的概率计算模式; 最后得出了固结度、沉降量和差异沉降的概率分析结果。

一、前 言

在软基上填筑土构筑物时, 地基的固结历时和沉降乃是设计中的关键问题。按照常规方法, 这些量值是根据室内试验得到的地基土性数据, 用 Terzaghi 固结理论和分层总和法近似地计算, 并把这样计算得到的“确定值”作为地基处理设计的依据。不可否认, 这种“确定性”的设计方法是不很合理的。因为地基土中各点的土性存在着先天变异性, 各种土性数据的取得又包含着一些不确定的因素, 这些变异性和不定性几乎贯穿于土工计算的各个环节中, 因此计算的地基固结度和沉降量就不可能是一个确定的值, 它们必然带有随机性。面对这种问题, 如果应用概率论和统计学的基本知识来处理这些不定性, 并在这个基础上进一步分析地基固结度和沉降量等的计算结果的可靠性, 这样得到的概率值就会比用“确定性”方法得到的单一值来得更加合理。本文的目的就是试图对深圳机场场道试验段软基的固结与沉降进行一次比较完整的可靠性分析, 并考察这种分析方法的实用性。

由勘察结果可知, 试验场区软土层厚约为8m左右, 在水平方向的变化不大。为了进行软基固结度与沉降量的概率预估, 根据场区的地质资料和土性测试数据将其划分成三层: 表层0~2m为高压缩性淤泥, 处于轻微超压密状态; 其下2~5m为压缩性特高、且处于轻微欠压密或接近正常压密状态的极软淤泥层; 再下5~8m为轻微超压密的高压缩淤泥或淤泥质土层。8m以下则为变质岩风化层, 压缩性较小。场区地下水位约在距地表1m深度处。由于施工前场区已被辟为鱼塘, 所以地基表面以下几乎常年受水浸泡。

软基加固采用了砂井排水和超载预压方案。竖向砂井为袋状, 井径7cm, 间距90cm, 按梅花形布置。荷载选用了顶面宽44m, 长132m、高6.5m的预压土(约相当于120kPa, 其中超载部分约占50kPa。)。填土施工是按规定的程序以较快的速度完成的, 基本上可保持场区各点填土荷载的等值性。下图所示为试验段的平面位置、场区软基的计算剖面及土性数据的分布特征。

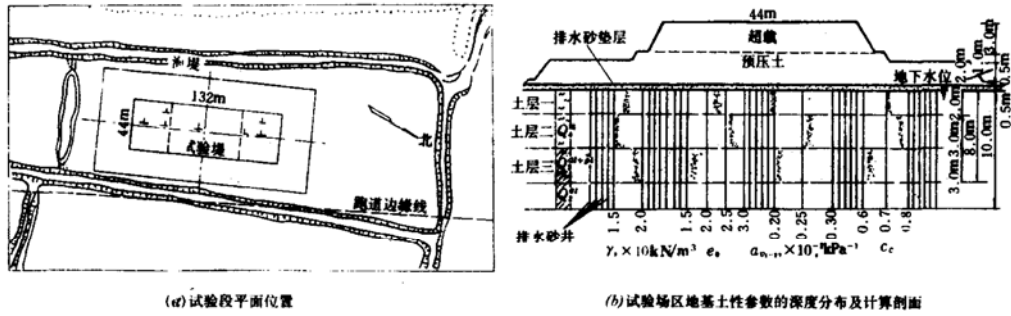


图1

二、计算数据的概率统计分析

(一) 计算变量的确定性与随机性

地基固结度与沉降量的计算结果受压缩土层厚度、荷载的大小、分布形式和加荷过程、地下水位以及参与计算的各种土性参数等的影响。根据场区的地质条件和预压填土实施的特点, 在分析计算中把土层厚度和地下水位都近似地当成确定性变量; 加荷变形条件则近似地按分级瞬时加荷的一向压缩情况处理, 忽略物理模型和计算模式的不定性; 至于各种土性计算参数则都被当成随机变量。因此, 对于本试验段来说, 数据分析的主要任务就是适当处理各种土性参数的变异性, 确定它们各自的概率统计特征。

(二) 土性参数的数字特征

试验场区的勘察结果为概率分析提供了比较丰富的土性测试数据。为了确定各种土性参数的统计特征值, 我们把图1中划分的三个压缩性软土层当成三个不同的统计母体, 对取自各个母体的各种土性参数的子样(容量都大于20), 在对其中的个别异常值作了统计处理以后, 分别按K-S检验法用计算机进行了概率分布类型的拟合检验。检验的结果表明, 场区各压缩性土层的各种土性数据都最接近于对数正态分布。

根据概率统计理论, 当对某一随机变量 X 做参数估计时, 一般可用其子样的均值 $\bar{x}$ 和方差 σ_x^2 来估计母体的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$, 其精确程度决定于子样容量 n 。子样均值 $\bar{x}$ 本身也是一个随机变量, 当子样服从非正态分布, 但其容量较大时, $\bar{x}$ 的方差 $\sigma_{\bar{x}}^2$ 可近似地用 $\frac{\sigma_x^2}{n}$ 表示。因此, 当用容量为 n 的子样均值来作为母体期望的估计值时, 如果用在子样差 $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ 上叠加一个子样均值的标差 $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ 来考虑子样容量大小对离散性的影响, 即把方差表为 $(\sigma_x + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}})^2 = (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^2 \sigma_x^2$, 这个方差就可近似地综合反映土性的空间变异性和由于子样容量的限制对土性离散度产生的影响。

另外, 由于从各土层的整个勘察空间 V 内抽样所得的子样均值 $\bar{x}$ 和方差 σ_x^2 乃是一种“点”土性统计特征值, 而在一些土工计算中常常需用各土层在计算所涉及的一定空间范围 ΔV 内的土性平均值 $\bar{x}_{(\Delta V)}$, 这种计算空间平均值的均值 $\bar{x}_{(\Delta V)}$ 与“点”土性均值 $\bar{x}$ 相同, 但其方差 $\sigma_{x(\Delta V)}^2$ 显然会小于“点”土性方差 σ_x^2 , 因此在计算中就需对 σ_x^2 值进行一定程度的折减。为了

进行这种折减,我们近似地采用根据土性的自相关距离 τ_0 与计算空间平均值 $\bar{x}_{(\Delta z)}$ 时所涉及的空间尺度 Δz 的比值来确定折减系数 $\Gamma(\Delta z)$ 的方法,这就是令 $\sigma_{x(\Delta z)}^2 = \Gamma(\Delta z)\sigma_x^2$,而

$\Gamma(\Delta z) = \frac{\tau_0}{\Delta z}$, 如果 $\Delta z \leq \tau_0$, 则不进行折减。在本文中 τ_0 和 Δz 都是沿深度方向的值,也就是只在深度方向进行了折减。

基于以上的考虑,就可确定土工计算中在用子样均值来代替母体期望时所需采用的方差表达式为 $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \cdot \frac{\tau_0}{\Delta z} \cdot \sigma_{x_0}^2$ 。这样就可将各种土性参数 X 的计算统计特征值表为

$$\text{均值 } \mu_{xd} = \bar{x} \cdots \cdots \quad (1)$$

$$\text{方差 } \sigma_{xd}^2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \cdot \frac{\tau_0}{\Delta z} \cdot \sigma_x^2 \quad (2)$$

但须指出,上式中的 σ_x 还包含着随机量测误差的成分,因此应用这个方差表达式时仍可能造成方差的超估。

下面把土层二的各种土性参数的 μ_{xd} 和 σ_{xd}^2 的计算结果列于表1,并以土容重 γ 为例来说明计算的全过程。

已知 γ 服从对数正态分布,根据容量 $n=42$ 的子样算得的均值 $\bar{\lg \gamma} = 1.175$;

方差 $\sigma_{\lg \gamma}^2 = 0.0045$ 。

在对数正态分布的条件下,子样的

$$\text{均值 } \bar{\gamma} = 10^{\bar{\lg \gamma} + \frac{1}{2} \sigma_{\lg \gamma}^2 \cdot \ln 10} = 10^{1.175 + \frac{1}{2} \times 0.0045 \times 2.303} = 15.13 \quad (3)$$

$$\text{方差 } \sigma_{\gamma}^2 = 10^{2\bar{\lg \gamma} + \sigma_{\lg \gamma}^2 \cdot \ln 10} (10^{\sigma_{\lg \gamma}^2 \cdot \ln 10} - 1) = 10^{2 \times 1.175 + 0.0045 \times 2.303} (10^{0.0045 \times 2.303} - 1) = 5.55 \quad (4)$$

表1

土层二各土性参数的计算数字特征

土性参数		μ_{xd}	σ_{xd}^2	σ_{xd}	$v_{xd} = \frac{\sigma_{xd}}{\mu_{xd}}$
天然容重 $\gamma(\text{kN/m}^3)$		15.13	0.47	0.69	0.045
孔隙比 e	18.3(kPa)	2.707	0.087	0.295	0.109
	50(kPa)	2.366	0.079	0.281	0.119
	100(kPa)	2.135	0.037	0.192	0.090
压缩 系数 $a, (10^{-2} \text{kPa}^{-1})$	18.3~50	1.076	0.019	0.138	0.128
	50~100	0.462	0.0057	0.075	0.162
	100~138.3	0.259	0.00067	0.026	0.100
压缩指数 C_c		0.784	0.0072	0.085	0.108
水平向固结系数 $C_h(\text{cm}^2/\text{s})$		6.21×10^{-4}	0.319×10^{-8}	0.565×10^{-4}	0.091
		5.97×10^{-4}	0.311×10^{-8}	0.558×10^{-4}	0.093
		5.76×10^{-4}	0.290×10^{-8}	0.539×10^{-4}	0.094
竖直向固结系数 $C_v(\text{cm}^2/\text{s})$		6.12×10^{-4}	0.414×10^{-8}	0.643×10^{-4}	0.105
		5.65×10^{-4}	0.301×10^{-8}	0.549×10^{-4}	0.097
		5.51×10^{-4}	0.293×10^{-8}	0.541×10^{-4}	0.098

注: 18.3kPa为土层二中间厚度处的有效自重应力。

由式(1)可知,土容重的计算均值 $\mu_{\gamma d} = \bar{\gamma} = 15.13 \text{kN/m}^3$ 。为求其计算方差

$\sigma_{\gamma_d}^2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \frac{\tau_0}{\Delta z} \sigma_{\gamma}^2$, 则还需要知道其自相关距离 τ_0 。为此可根据实际测试点和相应的取样间距选定不同的 τ 值, 从小到大代入自相关系数表达式

$$\rho(\tau) = \frac{\text{COV}(\tau)}{\sigma_{\gamma}^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\gamma(z_i) - \bar{\gamma} \right] \left[\gamma(z_i + \tau) - \bar{\gamma} \right] \right\} / \sigma_{\gamma}^2$$

求得一系列不同的 $\rho(\tau)$ 值, 当 τ 增大到某一数值 τ_0 , 恰使 $\rho(\tau_0) = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.718}$ 时, 这个 τ_0 就是自相关距离。这样对 γ 求得的 $\tau_0 = 0.19\text{m}$ 。因为土层二的计算空间平均值的厚度为 $\Delta z = 3\text{m}$, 把它们代入式(2)即得 $\sigma_{\gamma_d}^2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{42}}\right)^2 \times \frac{0.19}{3} \times 0.0555 = 0.0047$, 而其标差则为

$$\sigma_{\gamma_d} = \sqrt{\sigma_{\gamma_d}^2} = \sqrt{0.47} = 0.69。$$

三、沉降问题的概率分析

(一) 概率模式

在土力学中计算沉降 S 可用两种数学模式, 即

$$e-p \text{ 模式, } S_j = \frac{a_j}{1 + e_{1j}} h_j (p_{2j} - p_{1j}); \quad S = \sum_{j=1}^N S_j \quad (5)$$

$$e-\lg p \text{ 模式, } S'_j = \frac{C_{cj}}{1 + e_{1j}} h_j \lg \left(\frac{p_{2j}}{p_{1j}} \right); \quad S' = \sum_{j=1}^N S'_j \quad (6)$$

式中 $j=1, 2, \dots, N$ 为自上至下参与计算的土层号数; h_j 为第 j 土层的厚度; p_{1j} 土层 j 所受的应力初值; p_{2j} 为土层 j 所受的应力终值; a_j 为 p_{1j} 到 p_{2j} 压力区间内土的压缩系数; C_{cj} 为 p_{1j} 到 p_{2j} 压力区间内土的压缩指数; e_{1j} 为和 p_{1j} 对应的孔隙比。

将式(5)和式(6)在各随机变量的均值处分别展开成 Taylor 级数且取其一阶近似得

$$S_j(p_{2j}, p_{1j}, a_j, e_{1j}) = \mu_{sj} + T_1(p_{2j} - \mu_{p_{2j}}) + T_2(p_{1j} - \mu_{p_{1j}}) + T_3(a_j - \mu_{a_j}) + T_4(e_{1j} - \mu_{e_{1j}}) \quad (7)$$

$$S'_j(p_{2j}, p_{1j}, C_{cj}, e_{1j}) = \mu_{sj} + T'_1(p_{2j} - \mu_{p_{2j}}) + T'_2(p_{1j} - \mu_{p_{1j}}) + T'_3(C_{cj} - \mu_{C_{cj}}) + T'_4(e_{1j} - \mu_{e_{1j}}) \quad (8)$$

$$\text{式中 } \mu_{sj} = \frac{\mu_{a_j} h_j}{1 + \mu_{e_{1j}}} (\mu_{p_{2j}} - \mu_{p_{1j}}) \quad (9)$$

$$\mu'_{sj} = \frac{\mu_{C_{cj}} h_j}{1 + \mu_{e_{1j}}} \lg \left(\frac{\mu_{p_{2j}}}{\mu_{p_{1j}}} \right) \quad (10)$$

$$T_1 = \frac{\mu_{a_j} h_j}{1 + \mu_{e_{1j}}}; \quad T_2 = -T_1; \quad T_3 = \frac{(\mu_{p_{2j}} - \mu_{p_{1j}}) h_j}{1 + \mu_{e_{1j}}}; \quad T_4 = \frac{\mu_{a_j} (\mu_{p_{2j}} - \mu_{p_{1j}}) h_j}{(1 + \mu_{e_{1j}})^2};$$

$$T'_1 = \frac{\mu_{C_{cj}} h_j}{(1 + \mu_{e_{1j}}) \mu_{p_{2j}} \cdot \ln 10}; \quad T'_2 = \frac{\mu_{C_{cj}} h_j}{(1 + \mu_{e_{1j}}) \mu_{p_{1j}} \cdot \ln 10};$$

$$T'_3 = \frac{h_j}{1 + \mu_{e_{1j}}} \lg \left(\frac{\mu_{p_{2j}}}{\mu_{p_{1j}}} \right); \quad T'_4 = \frac{\mu_{C_{cj}} h_j}{(1 + \mu_{e_{1j}})^2} \lg \left(\frac{\mu_{p_{2j}}}{\mu_{p_{1j}}} \right);$$

$\mu_{p_{2j}}, \mu_{p_{1j}}, \mu_{a_j}, \mu_{C_{cj}}, \mu_{e_{1j}}$ 分别为 $p_{2j}, p_{1j}, a_j, C_{cj}, e_{1j}$ 的计算均值。

土层 N 在底面处的自重应力为 $p_{1N} = \sum_{j=1}^N h_j \gamma_j$, 于是其均值 $E(p_{1N}) = \mu_{p_{1N}} = \sum_{j=1}^N h_j E(\gamma_j)$, 方

差 $D(p_{1N}) = \sum_{j=1}^N h_j^2 D(\gamma_j) + \sum_{j,k=1, j \neq k}^N h_j h_k b_{jk}(\gamma)$; $p_{2N} = p_{1N} + \Delta p_N$; $\mu_{p_{2N}} = \mu_{p_{1N}} + \Delta p_N$; $D(p_{2N}) = D(p_{1N})$ 。

式中 Δp_N 为土层 N 处相应的附加应力, 假设其为一确定值; $b_{jk}(\gamma)$ 为 j, k 两土层的 γ 的协方差, 鉴于本试验工点各土层的成因、地质历史和应力历史不尽相同, 可以认为各土性参数对各土层的自相关性是很弱的, 故取 $b_{jk}(\gamma)=0$ 。

不难看出, 式(9)和(10)即为土层 j 的沉降量 S_j 和 S'_j 的均值模式。应用概率理论可得出相应于各均值模式的方差模式如下。

$$D(S_j) = T_1^2 D(p_{2j}) + T_2^2 D(p_{1j}) + T_3^2 D(a_j) + T_4^2 D(e_{1j}) + T_1 T_2 b_{p_{1j} p_{2j}} + T_2 T_3 b_{p_{1j} a_j} + T_3 T_4 b_{a_j e_{1j}} + T_1 T_3 b_{p_{2j} a_j} + T_1 T_4 b_{p_{2j} e_{1j}} + T_2 T_4 b_{p_{1j} e_{1j}} \quad (11)$$

$$D(S'_j) = T_1'^2 D(p_{2j}) + T_2'^2 D(p_{1j}) + T_3'^2 D(c_{cj}) + T_4'^2 D(e_{1j}) + T_1' T_2' b_{p_{1j} p_{2j}} + T_2' T_3' b_{p_{1j} c_{cj}} + T_3' T_4' b_{c_{cj} e_{1j}} + T_1' T_3' b_{p_{2j} c_{cj}} + T_1' T_4' b_{p_{2j} e_{1j}} + T_2' T_4' b_{p_{1j} e_{1j}} \quad (12)$$

式中 $D(\cdot)$ 为相应随机变量的计算方差; b_{jk} 为相应二随机变量 j 和 k 的计算协方差。

$$\text{总沉降量 } S \text{ 的均值 } E(S) = \sum_{j=1}^N E(S_j)$$

$$S \text{ 的方差 } D(S) = \sum_{j=1}^N D(S_j) + \sum_{j,k=1, j \neq k}^N b_{jk} = \sum_{j=1}^N D(S_j)$$

(二) 相关分析

从式(11)和式(12)可见, 要求土层 j 的沉降量 S_j 的方差 $D(S_j)$, 除了必须知道各随机变量的计算方差之外, 还必须知道该土层各随机变量之间的计算协方差, 也就是各个随机变量之间的相关性。一些学者认为, 对不完全相关的一般情况, 笼统地假定相关系数 $\rho=0.5$, 对计算结果不会有太大影响。但是本文下面的计算表明, 仅仅这样简单地假定并不一定总是合适的。

计算协方差 b_{ik} 的值可以直接用根据子样求得的相关系数 $\rho_{ik} = \frac{b'_{ik}}{\sqrt{b'_{ii} b'_{kk}}}$ 代入 $b_{ik} = \rho_{ik} \sqrt{b_{ii}} \cdot \sqrt{b_{kk}}$ 式中求得 (其中, b'_{ii} , b'_{kk} 分别为相应随机变量 i, k 的子样方差; b'_{ik} 为随机变量 i 和 k 的子样协方差; b_{ii} 和 b_{kk} 则分别为随机变量 i 和 k 的计算协方差。)。这是因为协方差和方差相似, “点”协方差比“计算空间”协方差大, 由相关系数 ρ 的表达式可知, 当分子、分母以同样的倍数乘之, 其值是不变的。

ρ 的计算结果表明, 地基沉降计算中, 各土性参数的互相关系数都比较大。例如, 对土层二, 压力区间为 18.3~50kPa 的各土性指标间的相关系数矩阵为

$$\begin{array}{c} p_2 \quad p_1 \quad a \quad e \\ \begin{array}{c} p_2 \\ p_1 \\ a \\ e \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -0.8973 & -0.9012 \\ & & 1 & 0.9677 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

其中 $p_1=18.3\text{kPa}$ 为根据测试结果算得, 而 $p_2=50\text{kPa}$ 则是人为指定的, 后者是一个定值。

(三) 最终沉降量的概率分析结果

在地基的沉降计算中, 由于 $e-p$ 曲线上压缩系数 a 是压力 p 的函数, 为了提高计算精度, 需要根据各土层的天然应力 p_i , 前期固结压力 p_c 和加载 Δp 后的应力 $p_2 = p_1 + \Delta p$ 划分成一定的压力区间分别计算, 然后求和。照此, 将土性参数的计算数字特征代入相应的概率模式(9)

和(11), 即可算得地基沉降量 S 的概率特征如表2。

已知地基土性参数都服从对数正态分布, 而在前面又通过按 Taylor 级数展开的方法把沉降量近似地化成土性参数和的形式, 可知最终沉降量 S 也近似地服从对数正态分布, 其概率特征值已在上表中给出。将其代入式(3), (4), 把 γ 改为 S , 可求得 $\lg S$ 的均值 $\overline{\lg S} = 2.1197$ 和标差 $\sigma_{\lg S} = 0.0286$ 。这就是说, $\lg S \sim N(2.1197, 0.0286^2)$ 。由正态概率密度函数可知, $\lg S$ 将以95.6%的概率处于 $[\overline{\lg S} - 2\sigma_{\lg S}, \overline{\lg S} + 2\sigma_{\lg S}]$, 亦即 $[2.0625, 2.1769]$ 的区间内, 或者说将以约95%的概率保证最终沉降量 S 处在 $[115.5\text{cm}, 150.3\text{cm}]$ 的区间内。

表2 地基沉降 S 的概率特征

土层	压力区间 (kPa)	均值计算结果		方差计算结果		备 注
		分区沉降量 (cm)	土层沉降量 μ_{sj} (cm)	分区方差 (cm^2)	土层方差 $D(S_j)$ (cm^2)	
1	5.3—19	6.0	41.2	5.27	25.34	5.3kPa为天然应力的平均值; 19kPa为前期固结压力的平均值; 125.3kPa为加载120kPa后的应力 平均值。
	19—50	18.3		17.52		
	50—100	14.2		2.42		
	100—125.3	3.7		0.126		
2	18.3—50	27.6	57.7	20.88	30.70	18.3kPa为天然应力的平均值; 138.3kPa为加载后的应力平均值。
	50—100	20.6		8.77		
	100—138.3	9.5		1.05		
3	36.8—71	5.9	33.1	2.10	19.54	36.8kPa为天然应力的平均值; 71kPa为前期固结压力的平均值; 156.8kPa为加载后的应力平均值。
	71—100	11.1		15.69		
	100—156.8	14.1		1.75		
总压缩层		$E(S)$	$=132.0$	$D(S)$	$=75.58$	$\sqrt{D(S)} = 8.69\text{cm}$

仿照以上步骤, 根据 e - $\lg p$ 曲线上压缩指数 C_c 的特点可以算出沉降量 S' 的概率特征如下表。

表3 沉降量 S' 的概率特征

土层	压力区间	均值计算结果		方差计算结果		备 注
		分区沉降量 (cm)	土层沉降量 μ_{sj} (cm)	分区方差 (cm^2)	土层方差 $D(S_j)$ (cm^2)	
1	5.3—19	6.8	41.7	2.41	55.87	同上表
	19—125.3	34.9		53.46		
2	18.3—138.3	55.7	55.7	35.78	35.78	同上表
3	36.8—71	5.6	30.5	1.14	26.14	同上表
	71—156.8	24.9		25.0		
总压缩层		$E(S')$	$=127.9$	$D(S')$	$=117.79$	$\sqrt{D(S')} = 10.8\text{cm}$

这就是说, $\lg S' \sim N(2.1053, 0.0368^2)$, S' 将以约95%的概率保证处在 $[107.6\text{cm}, 151.2\text{cm}]$ 的区间内。

通过比较可见, 上述两种概率模式的沉降量计算结果基本上是一致的, 但是由于 e - p 和 e - $\lg p$ 试验曲线的拟合情况不尽相同等原因, 致使二者之间也存在一定的差别。

根据现场实测, 预压土堤横断面中心处地面沉降板在填土完成8个月以后的实际沉降量

为123.7cm。按实测沉降曲线推算, 该值已接近最终沉降量。由此可见, 概率分析结果与实测值是比较吻合的。

四、固结问题的概率分析

用竖直砂井处理的软基固结乃是一个三维轴对称渗流固结问题, 其概率解如下。

(一) 概率模式

三维轴对称固结微分方程早已被下Terzaghi提出, 其极坐标表达式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (13)$$

式中 r 为计算点至砂井中心的水平距离; z 为计算点距地面深度; C_v 为竖向固结系数; C_h 为辐射向固结系数; $u(r, z, t)$ 为计算点在 t 时刻的超静水压力。

对于这个固结微分方程的解析解, 参考文献[3]做了详细的讨论, 并给出了当 t 较大时整个地基平均固结度 $\bar{U}_{rz}$ 的近似解

$$\bar{U}_{rz} = 1 - \frac{32}{\pi^2(r_e^2 - r_w^2)} \left(\frac{r_w}{x_1} \right)^2 \frac{J_1^2(kx_1)}{J_0^2(x_1) - J_1^2(kx_1)} \exp \left[- \left(\frac{\pi^2 C_v}{4H^2} + \frac{x_1^2 C_h}{r_w^2} \right) t \right] \quad (14)$$

式中 r_w 为砂井半径; r_e 为砂井的有效半径, $r_e = 0.525d$ (d 为井距); $k = \frac{r_e}{r_w}$; x_1 为高级超越方程

$$J_0(x)Y(kx) - J(kx)Y_0(x) = 0 \quad (15)$$

的第一个正零点; J_0 , J , Y_0 , Y 分别为第一、二类Bessel函数; H 为竖向排水距离; t 为固结时间。

为了下节研究差异沉降的需要, 在此引进一个“面固结度”的概念。所谓“面固结度”即某一曲面或平面上各点固结度的平均值。在差异沉降分析中有兴趣的是一个离砂井中心水平距离为 r 的竖直园桶面上的固结度, 其表达式可写为

$$\bar{U}_r = 1 - (1 - \bar{U}_z)(1 - U_r) = 1 + \frac{8}{\pi} \frac{J_1^2(kx_1)}{J_0^2(x_1) - J_1^2(kx_1)} U_0 \left(\frac{r}{r_w} x_1 \right) \exp \left[- \left(\frac{\pi^2 C_v}{4H^2} + \frac{x_1^2 C_h}{r_w^2} \right) t \right] \quad (16)$$

式中 $\bar{U}_z$ 为竖向平均固结度; U_r 为距砂井中心辐射向距离为 r 的点处的固结度; $U_0 \left(\frac{r}{r_w} x_1 \right) = J_0 \left(\frac{x_1}{r_w} r \right) Y_0(x_1) - J_0(x_1) Y_0 \left(\frac{x_1}{r_w} r \right)$ 为圆柱函数。

仿前可推得两种固结度的概率模式如下:

1. 平均固结度的均值

$$E(\bar{U}_{rz}) = 1 - \frac{32}{\pi^2(r_e^2 - r_w^2)} \left(\frac{r_w}{x_1} \right)^2 \frac{J_1^2(kx_1)}{J_0^2(x_1) - J_1^2(kx_1)} \exp \left[- \left(\frac{\pi^2 \mu_{C_v}}{4H^2} + \frac{x_1^2 \mu_{C_h}}{r_w^2} \right) t \right] \quad (17)$$

方差

$$D(\bar{U}_{rz}) = C_1^2 D(C_v) + C_2^2 D(C_h) + C_1 C_2 B_{hv} \quad (18)$$

式中 μ_{C_v} , μ_{C_h} 分别为 C_v , C_h 的计算均值; $D(C_v)$, $D(C_h)$ 分别为 C_v , C_h 的计算协方差; B_{hv} 为 C_v 和 C_h 的计算协方差, $B_{hv} = \rho \sqrt{D(C_v) \cdot D(C_h)}$; ρ 为 C_v 和 C_h 的相关系数, 由于试验数据不足, 计算中近似地采用 $\rho = 0.5$;

$$C_1 = \frac{8t}{H^2 \pi^2 (r_e^2 - r_w^2)} \left(\frac{r_w}{x_1} \right)^2 \frac{J_1^2(kx_1)}{J_0^2(x_1) - J_1^2(kx_1)} \exp \left[- \left(\frac{\pi^2 \mu_{cv}}{4H^2} + \frac{x_1^2 \mu_{ch}}{r_w^2} \right) t \right],$$

$$C_2 = \frac{32t}{\pi^2 (r_e^2 - r_w^2)} \frac{J_1^2(kx_1)}{J_0^2(x_1) - J_1^2(kx_1)} \exp \left[- \left(\frac{\pi^2 \mu_{cv}}{4H^2} + \frac{x_1^2 \mu_{ch}}{r_w^2} \right) t \right].$$

2. 圆桶面固结度的

$$\text{均值 } E(\overline{U_r}) = 1 + \frac{8}{\pi} \frac{J_1^2(kx_1)}{J_0^2(x_1) - J_1^2(kx_1)} U_0 \left(\frac{r}{r_w} x_1 \right) \exp \left[- \left(\frac{\pi^2 \mu_{cv}}{4H^2} + \frac{x_1^2 \mu_{ch}}{r_w^2} \right) t \right] \quad (19)$$

$$\text{方差 } D(\overline{U_r}) = C_1^2 D(c_v) + C_2^2 D(c_h) + C_2^2 C_1^2 B_{hv} \quad (20)$$

$$\text{式中 } C_1 = \frac{2\pi t}{H^2} \frac{J_1^2(kx_1)}{J_0^2(x_1) - J_1^2(kx_1)} U_0 \left(\frac{r}{r_w} x_1 \right) \exp \left[- \left(\frac{\pi^2 \mu_{cv}}{4H^2} + \frac{x_1^2 \mu_{ch}}{r_w^2} \right) t \right];$$

$$C_2 = \frac{8}{\pi} \frac{x_1^2}{r_w^2} t \frac{J_1^2(kx_1)}{J_0^2(x_1) - J_1^2(kx_1)} U_0 \left(\frac{r}{r_w} x_1 \right) \exp \left[- \left(\frac{\pi^2 \mu_{cv}}{4H^2} + \frac{x_1^2 \mu_{ch}}{r_w^2} \right) t \right];$$

其余符号意义同前。

(二) 概率分布特征

为了求解, 必须求得式(13)中第一个正零点 x_1 。已知 $r_w = \frac{7}{2} = 3.5\text{cm}$,

$r_e = 0.525 \times 90 = 47.3\text{cm}$, $k = \frac{r_e}{r_w} = 13.5$, 由Bessel函数定义通过微机用试算法得 $x_1 = 0.0695$ 。于是得

$$J_0(x_1) = 0.9983; \quad J_1(kx_1) = 0.4196。$$

按场区地基处理要求取固结时间 t 为100天, 将相应的参数值代入两种概率模式, 分别求得两种固结度的概率特征如下表。

表4 两种固结度的概率特征

土层	厚度(cm)	$\mu_{cv} \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{s}$	$\mu_{ch} \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{s}$	$E(\overline{U_{rzj}})$	$\sqrt{D(\overline{U_{rzj}})}$	$\lg(\overline{U_{rzj}})$	$\sigma_{\lg(\overline{U_{rzj}})}$
1	200	5.51	5.80	91.8%	2.72%	-0.0373	0.0129
2	300	5.76	5.98	90.2%	3.47%	-0.0448	0.0167
3	300	>34.8	>36.0	≈100%	/	/	/

(1) 平均固结度 $\overline{U_{rz}}$ 的概率特征

$$\text{整个压缩层的平均固结度 } \overline{U_{rz}} = \frac{\sum_{j=1}^N \overline{U_{rzj}} h_j}{\sum_{j=1}^N h_j} = 94.3\%, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad \text{这里 } N=3。$$

因 $\lg \overline{U_{rz}} \sim N(\lg \overline{U_{rz}}, \sigma_{\lg \overline{U_{rz}}}^2)$, 由此可以推算出, 就整个地基而言, 在加荷100天后, $\overline{U_{rz}}$ 有95%的可能性处于90.4%到98.4%之间。

(2) 圆桶面固结度 $\overline{U}_r$ 的概率特征

计算方法和平均固结度的相似。在此仅考虑离砂井中心最远、固结最慢的 $r=r_e$ 的圆桶面上的固结度。计算结果表明, 在加荷100天后, $\overline{U}_r$ 有95%的可能性处在90.2%到98.4%之间。

上面所得平均固结度 $\overline{U}_{rz}$ 的均值和按实测沉降曲线估算所得的结果(满载预压两个月后的实际 $\overline{U}_{rz}=93.3\%$) 相近。

五、差异沉降的概率分析

地基表面各点的沉降差异一般是由多种原因引起的, 例如压缩土层厚度的变异、各点荷载大小和加荷过程的不尽相同、各点固结程度的差别以及土性的空间变异性等。根据本试验段场地情况和加荷条件的特点, 本文只考虑后两种原因引起的差异沉降中的一小部分, 即后期差异沉降。所谓后期差异沉降是指地基在填土施工完成并经历一个规定的固结时间(本试验段规定为100天)以后可能进一步产生的沉降在各点上的差异。因为由在规定时间内各点已经完成的固结沉降差异(可称之为前期差异沉降)可以在铺筑道面以前采用追补填土的办法事先加以处理, 不至于对运营产生危害, 而后期差异沉降则需要在工程运行期间才会逐渐出现, 其危害性大, 且难以消除, 故必须将它限制在一定的容许范围之内。

当沉降量服从对数正态分布时, 对由土性空间变异性产生的总差异沉降 ΔS 可用下面的方法来估算, 即令 $\lg S_{\text{上}} = \lg \bar{S} + 2\sigma_{\lg S}$, $\lg S_{\text{下}} = \lg \bar{S} - 2\sigma_{\lg S}$, 于是有 $S_{\text{上}} = 10^{\lg \bar{S} + 2\sigma_{\lg S}}$, $S_{\text{下}} = 10^{\lg \bar{S} - 2\sigma_{\lg S}}$ 。而 $\Delta S = S_{\text{上}} - S_{\text{下}} = 10^{\lg \bar{S} + 2\sigma_{\lg S}} - 10^{\lg \bar{S} - 2\sigma_{\lg S}} = 150.3\text{cm} - 115.5\text{cm} = 34.8\text{cm}$ 。

式中 $S_{\text{上}}$ 为在95%的保证率下 S 的上限值; $S_{\text{下}}$ 为在95%的保证率下 S 的下限值。这样算得的总差异沉降 $\Delta S = 34.8\text{cm}$, 或相似地算得的 $\Delta S' = 43.6\text{cm}$, 其保证率为95%。

从安全角度出发, 取一定可靠度下固结度的下限值 $\overline{U}_F$, 按下式求相应可靠度下后期差异沉降的上限值, 即 $\Delta S_{\text{后}} = \Delta S(1 - \overline{U}_F)$ 。因此, 利用前面的分析结果不难得到两种沉降概率模式下、两种意义固结度上的后期差异沉降如下表。

表5 后期差异沉降

固结度	平均固结度		圆桶面固结度	
概率模式	$e-p$	$e-\lg p$	$e-p$	$e-\lg p$
$\Delta S_{\text{后}}(\text{cm})$	3.3	4.2	3.4	4.3

由此可见, 试验场区范围内, 地基加荷完成100天以后, 可以有不少于95%的保证率使后期差异沉降不超过4.3cm。

六、结束语

1. 本文对深圳机场场道试验段地基固结度与沉降量的概率分析结果与现场实测结果基本上可以印证。虽然在这一分析中对各随机变量不定性的处理还不够完善, 但这些分析结果已

经可以大大提高我们对该处软基的沉降性质和可能产生的差异沉降大小的认识。而且也只有在这种概率分析的基础上才有可能进一步进行工程的风险估计和优化设计,因此其实用前景是十分广阔的。

2. 软基固结与沉降问题的概率分析需要比较充分的土性测试数据和比较繁复的分析计算过程。这些要求在重大工程的设计中比较容易满足。但对于一般工程的常规设计来说,则只有在上述两个问题有了简化的解决办法以后,才有可能得到推广应用。

参 考 文 献

- [1] 欧阳葆元. 土的设计参数的概率统计方法研究途径. 铁道部科学研究院铁建所研究报告第0119号, 1989.
- [2] 包承纲, 吴天行. 多层地基沉降的概率分析. 中国科学, 1985-11.
- [3] 张俊智, 韩国荣. 软土地基砂井加固三向固结问题的Bessel解. 北方交通大学学报, 1986, (1).
- [4] 铁科院, 铁二局, 铁四院, 浙江大学. 深圳黄田机场场道软基加固试验排水固结堆载预压中间报告. 1988-12.
- [5] Baecher G B. Applied Geotechnical Reliability Analysis. M I T, 1983.
- [6] Freeze R A. Probabilistic One-dimensional Consolidation. Proc ASCE GTD, July, 1977.
- [7] Kaderabek T J, Reynolds R T. Settlements Beneath Preload Test Fill. Proc ASCE, GTD, June, 1979.
- [8] Vanmarcke E H, Fuleihan N F. Probabilistic Prediction of Levee Settlements. Proc 2nd ICASP, 1975.

Probabilistic Analysis of Consolidation and Settlement in a Soft Foundation Site

Li Guo-zhou, Ouyang Bao-yuan

(China Academy of Railway Sciences, Beijing)

Abstract

This paper, by using reliability theory, suggests a comprehensive probabilistic analysis on settlement, consolidation and differential settlement for foundation treatment field testing site in Shen-Zhen Huang-Tian Airport. The spatial variability and some uncertainties about the soil property constants were properly considered and two kinds of probabilistic models on calculating settlement and consolidation for soft foundation treatment by sand drain and preloading method were deduced. The analysis results verified that the possible posterior differential settlement will be less than the allowable value.