

地基非均匀沉降的可靠度分析

陈晓平 俞季民

(武汉水利电力学院, 430072)

提 要

本文将地基土看作一随机场, 建立了地基非均匀沉降的概率模型, 用二阶矩理论求出地基非均匀沉降的均值和变异系数, 并进行可靠度分析求出可靠指标 β 。通过对某住宅楼地基的实测资料进行计算和与实际值比较, 得出了与实际工程有益的结论。

一、前 言

地基非均匀沉降的计算, 是土质地基建筑物最重要的设计内容之一。其常用的方法是根据地基土的平均特性, 按分层总和法, 分别求出基础两边缘的沉降, 然后求其差值。这就是“确定性”计算方法。由于土是自然历史的产物, 组成复杂, 性质多变, 加之勘探、取样、试验等的随机性, 使得其性能指标的变异性比人工材料要大, 难以用确定性方法准确计算。探讨一种合适的描述方法, 是近20年来国内外学者所普遍关注的。本文以目前国内普遍采用的分层总和法公式为基础, 将土层看作一随机场, 建立了地基非均匀沉降的概率模型和可靠度分析模型, 并以某住宅楼地基为例进行了计算, 验证了模型的可行性。

二、概率分析模型

(一) 基本变量的概率特性

分层总和法公式的基本形式为

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{e_{1i} - e_{2i}}{1 + e_{1i}} \Delta H_i \quad (1)$$

式中的孔隙比 e_i 是沿深度方向、水平方向随机分布的, 属多维随机过程。土层厚度 ΔH_i 取决于土层的上边界和下边界, 其值亦沿纵横向随机变化。由于多维随机过程的概率分析需要十分详细的分布资料, 这一点在土工问题中很难做到, 并且本文的沉降分析是针对具体断面而言, 所以可将 e_i 、 ΔH_i 分别简化为沿深度方向和沿水平方向的一维随机过程, 通过测值来模拟其原位离散。显然, 测值数越大, 模拟的准确性越高。因此, 公式(1)中需考虑的随机变量有 e_1 、 e_2 和 ΔH 。

1. 孔隙比 e 的概率特性

在将孔隙比 e 看成一维随机因素时, 其均值和方差可通过下式计算:

$$\text{均值 } \mu_e = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m e_j \quad (2)$$

$$\text{方差 } \sigma_e^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (e_j - \mu_e)^2 \quad (3)$$

式中 m 为测值数。式(2)、(3)为离散测值点的统计特性,因而称为“点估计”。由于 e 是一沿深度方向的随机过程,其样本值沿深度方向存在着自相关性,因而统计特性必涉及一定的空间范围。根据概率知识,如果 x_1, x_2, \dots, x_n 是随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 的一组样本,那么它的平均值 μ_x 也应是一组随机变量。因此可以借助平均值的方差来估计样本值和总体的实际平均值的差异,两者有如下关系^[1]:

$$\sigma_{e(\Delta z)}^2 = \frac{\sigma_e^2}{n_e} \quad (4)$$

式中 $\sigma_{e(\Delta z)}^2$ 为孔隙比 e 在所研究的土层厚度中均值 μ_e 的方差,即“空间均值方差”; n_e 为独立样本个数,也叫 Vanmarke 当量数^[2],即在所研究土层内互不相关的测值个数,按下式计算^[3]:

$$n_e = \frac{\Delta Z}{\delta_e} \quad (5)$$

式中 ΔZ 为所研究的土层厚度; δ_e 称之为波动距离。描述样本中任两点之间表现出相当强的相关性时所对应的距离,具体计算可参阅文献[5]。

空间均值方差对沉降概率分析是十分有用的,因为沉降总是在一定厚度的土层中发生,所以在分析中所需要的总是“空间均值方差”而不是“点方差”。

2. 土层厚 ΔH_i 的概率特性

土层厚 $\Delta H_i = Z_{i+1} - Z_i$, 即 i 土层的上、下边界深度值之差。根据方差的基本性质, i 土层厚的均值和方差可一般表示为

$$\text{均值 } \mu_{\Delta H_i} = \mu_{z(i+1)} - \mu_{z(i)} \quad (6)$$

$$\text{方差 } \sigma_{\Delta H_i}^2 = \sigma_{z(i+1)}^2 + \sigma_{z(i)}^2 - 2\rho(Z_{(i+1)}, Z_{(i)}) \cdot \sigma_{z(i+1)} \cdot \sigma_{z(i)} \quad (7)$$

式中 μ_z 和 σ_z^2 可按式(2)、(3)计算, ρ 为相邻土层边界的相关系数。

根据随机过程理论,在将土层边界视为一随机过程而用式(7)进行计算时,必须保证分析中所用的测值是两两相互独立的,因此首先必须对钻孔资料进行检验。取随机变量自相关性的衰减规律为指数形式^[3]

$$\rho(\Delta X) = \exp\left(-\left|\frac{\Delta X}{du}\right|\right) \quad (8)$$

式中 ρ 为 X 与 $X + \Delta X$ 点 Z 的相关函数; du 为指数衰减参数,即相关距离。可取不同的 ΔX , 由下式计算 $\rho(\Delta X)$:

$$\rho(\Delta X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[\frac{Z(X) - \mu_z}{\sigma_z} \cdot \frac{Z(X + \Delta X) - \mu_z}{\sigma_z} \right] \quad (9)$$

将计算出的 $\rho(\Delta X)$ 代入式(8), 计算出 du , 当 $\Delta X > du$ 时, 即认为 $Z(X)$ 与 $Z(X + \Delta X)$ 是互不相关的。

(二) 随机变量的相关分析

非均匀沉降的计算涉及到多个变量、多层土,因此,正确估计各随机变量之间,各随机变量在各土层间的相关关系是十分必要的。

1. 孔隙比 e 在相邻土层的相关

孔隙比 e (包括 e_1, e_2) 直接受土质成因的影响, 如果上下两层土的生成历史和土体性质大体一致, e 就不会有完全独立的差异。根据这种自我相关特性, 由点测值按下式近似估计 e 在相邻土层 $k, k+1$ 的相关性^[5]

$$\rho(e_{k_i}, e_{k+1_j}) = \frac{1}{\Delta H_k \cdot \Delta H_{k+1}} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{e_{(k)i} - \mu_{e_k}}{\sigma_{e_k}} \cdot \frac{e_{(k+1)j} - \mu_{e_{k+1}}}{\sigma_{e_{k+1}}} \Delta Z_{(k)i} \cdot \Delta Z_{(k+1)j} \quad (10)$$

式中 M, N 分别为土层 $k, k+1$ 内的测值数; $\Delta Z_{(k)i}, \Delta Z_{(k+1)j}$ 分别为 $e_{(k)i}, e_{(k+1)j}$ 所能代表的区间。

2. 孔隙比 e_2 和 e_1 在同一土层的相关

根据土力学知识可知, e_2 和 e_1 的关系是十分密切的。类似于 e 的自相关考虑方法, 用点测值间的互相关性近似估计两随机过程空间均值的互相关性, 并考虑自相关性的影响, 首先对样本进行检验, 确保所采用的样本相互独立, 然后用下述公式进行计算:

$$\rho(e_2, e_1) = \frac{1}{\Delta H} \sum_{i=1}^M \frac{e_{2i} - \mu_{e_2}}{\sigma_{e_2}} \cdot \frac{e_{1i} - \mu_{e_1}}{\sigma_{e_1}} \Delta Z_i \quad (11)$$

3. 相邻土层厚度的互相关

工程中划分土层或依赖地基土的颗粒组成和物理状态指标, 或根据现场触探试验资料。由于不可能测量到土层每点的性质, 因而也就不能准确掌握土性在整个土层中的变化, 对于有些成因完全相同或近似相同的土层, 可能因为试验数据的不算大的差别而按规范规定被分作二个不同的土层, 因而相邻土层厚度的互相关性是确实存在的。按下式计算相关系数:

$$\rho(\Delta H_i, \Delta H_{i+1}) = \frac{\text{COV}(\Delta H_i, \Delta H_{i+1})}{\sigma_{\Delta H_i} \cdot \sigma_{\Delta H_{i+1}}} \quad (12)$$

式中 $\text{COV}(\Delta H_i, \Delta H_{i+1})$ 为相邻土层厚度的协方差, 按下式, 并用钻孔测值进行计算:

$$\text{COV}(\Delta H_i, \Delta H_{i+1}) = \frac{1}{2} [\sigma_{Z_{i+1}}^2 + \sigma_{Z_{i-1}}^2 - \sigma_{\Delta H_i}^2 - \sigma_{\Delta H_{i+1}}^2 - 2\rho(Z_{i-1}, Z_{i+1}) \cdot \sigma_{Z_{i-1}} \cdot \sigma_{Z_{i+1}}] \quad (13)$$

(三) 非均匀沉降的概率特性

土性指标的自我相关特性和随机变量互相关特性, 决定了相邻土层沉降的自相关性和相邻断面最终沉降的互相关性。根据随机函数的相关特性, 用下式计算相邻土层的相关系数^[3]:

$$\rho(S_i, S_{i+1}) = \frac{\sum_k [C_{V_{k(i)}} \cdot C_{V_{k(i+1)}} \cdot \rho(k_i, k_{i+1})]}{\left[\sum_k (C_{V_{k(i)}})^2 \cdot \sum_k (C_{V_{k(i+1)}})^2 \right]^{1/2}} \quad (14)$$

式中 $C_v = \sigma/\mu$, 为变异系数; 角标 $k=1, 2, 3$ 分别对应于 e_1, e_2 和 ΔH ; $i, i+1$ 分别代表相邻土层。

根据分层总和法计算公式和一次二阶矩理论, 非均匀沉降的概率特性可由随机变量的概率特性、相关性及其土层沉降的相关性描述如下:

$$\text{均值 } \mu_{\Delta S} = \mu_{S_A} - \mu_{S_B} = \sum_{i=1}^m \mu_{S_{A_i}} - \sum_{j=1}^n \mu_{S_{B_j}} \quad (15)$$

式中 $\mu_{S_{A_i}}, \mu_{S_{B_j}}$ 分别为断面 A, B 的平均沉降, 由式(1)计算, 式(1)中的 e_{1i}, e_{2i} 和 ΔH_i 分别以均值代入。

某一分层沉降的方差

$$\sigma_{S_i}^2 = \frac{1}{(1 + \mu_{e_{1i}})^2} \left[(\mu_{e_{1i}} - \mu_{e_{2i}})^2 \sigma_{\Delta H_i}^2 + \left(\frac{1 + \mu_{e_{2i}}}{1 + \mu_{e_{1i}}} \right)^2 \mu_{\Delta H_i}^2 \sigma_{e_{1i}}^2 + \mu_{\Delta H_i}^2 \sigma_{e_{2i}}^2 - 2\rho(e_{1i}, e_{2i}) \frac{1 + \mu_{e_{2i}}}{1 + \mu_{e_{1i}}} \mu_{\Delta H_i}^2 \cdot \sigma_{e_{1i}} \cdot \sigma_{e_{2i}} \right] \quad (16)$$

断面最终沉降的方差

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_{S_i}^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\rho(S_i, S_j) \cdot \sigma_{S_i} \cdot \sigma_{S_j}) \quad (i \neq j) \quad (17)$$

地基非均匀沉降的方差

$$\sigma_{\Delta S}^2 = \sigma_{S_A}^2 + \sigma_{S_B}^2 - 2\rho(S_A, S_B) \sigma_{S_A} \cdot \sigma_{S_B} \quad (18)$$

式(18)中 $\rho(S_A, S_B)$ 为断面A, B最终沉降的相关系数,可由式(14)计算,即将式(14)中角标*i, j*换为A, B,且样本为取自整个压缩层厚度的测值,而不是局限于某一分层。

三、可靠度分析

兹以 $[\Delta S]$ 表示地基的允许倾斜值,则地基非均匀沉降的功能函数为

$$Z = [\Delta S] - \Delta S_{AB} \quad (19)$$

极限状态方程为

$$Z = [\Delta S] - \Delta S_{AB} = 0 \quad (20)$$

式中 $[\Delta S]$ 和 ΔS_{AB} 均为随机变量,若都服从正态分布,则由二阶矩理论可知,可靠指标 β 可通过下式计算^[1]:

$$\beta = \frac{\mu_{[\Delta S]} - \mu_{\Delta S}}{\sqrt{\sigma_{[\Delta S]}^2 - \sigma_{\Delta S}^2}} \quad (21)$$

相应的失效概率为

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (22)$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 为标准化正态函数。

四、实例计算

某生活小区地基除表面人工填土外,均为第四纪全新世沉积物,天然土层具有典型的河湖沉积特点,且地质勘探表明有暗埋的沟塘。其中A号住宅楼东西走向,整板式基础。基础边缘东西断面的地质剖面如图1。

(一) 断面沉降概率分析

东断面(即前述公式中的A断面)的天然土层划分如图1(a),根据分层原则,取压缩层厚度为18.12m,压缩层内分为6层。

按前述概率模型求得基本随机因素概率特性如表1,2。将结果代入式(14)、(1)、(16),求得各分层沉降的概率特性如表3。

由此结果据式(15)、(17)可得东断面(即A断面)基底边缘的最终沉降概率特性为

均值 $\mu_{S_i} = 0.2592\text{m}$;

方差 $\sigma_{S_i}^2 = 0.0026\text{m}^2$;

变异系数 $C_{V_{s_i}}=0.196$

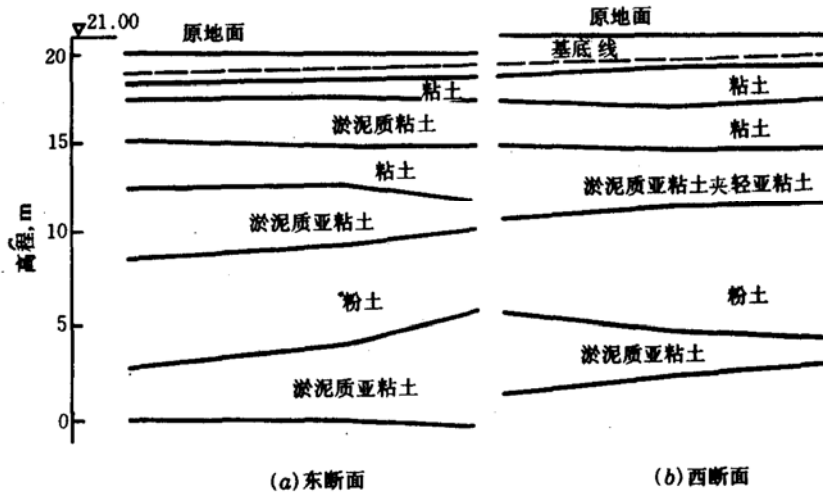


图1 东西断面地质剖面

表1 东(A)断面 e_1, e_2 概率特性

土层	1		2		3		4		5		6	
	e_1	e_2	e_1	e_2	e_1	e_2	e_1	e_2	e_1	e_2	e_1	e_2
n	4	4	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3
μ_e	1.129	1.114	2.29	2.18	1.14	1.116	0.934	0.918	1.338	1.296	0.900	0.885
σ_e^2	0.0091	0.00043	0.0035	0.00303	0.00303	0.00703	0.0038	0.0043	0.00475	0.00765	0.00823	0.0073
n_e	3		3		3		3		4		3	
$\sigma_{e_{\Delta H}}^2$	0.00303	0.000144	0.00117	0.00101	0.00101	0.00234	0.00127	0.00143	0.00119	0.00191	0.00274	0.00243
C_V	0.05	0.01	0.011	0.01	0.03	0.04	0.012	0.013	0.012	0.015	0.06	0.06
$\rho(e_1, e_2)$	0.648		0.499		0.748		0.607		0.519		0.425	
$\rho(e_{1i}, e_{2i+1})$		-0.0173	0.0302		0.0327		0.041		-0.0155			
$\rho(e_{2i}, e_{2i+1})$		-0.032	-0.0277		-0.024		0.0248		-0.0117			

表2 东(A)断面 ΔH 概率特性

土层	$\mu_{\Delta H}$	$\sigma_{\Delta H}^2$	$\rho(Z_i, Z_{i+1})$	$\mu_{\Delta H}$	$\sigma_{\Delta H}^2$	$C_{V\Delta H}$	$\rho(\Delta H_i, \Delta H_{i+1})$
1	1.76	0.696	0.5998	1.76	0.6926	0.473	-0.788
2	3.89	0.303		2.13	0.723	0.399	-0.584
3	6.25	0.543	0.6586	2.36	0.582	0.323	-0.382
4	9.56	0.435	-0.6596	3.31	1.305	0.345	0.271
5	14.92	2.233	0.6592	5.36	2.008	0.264	-0.601
6	18.12	1.072	0.3580	3.2	2.175	0.460	

对于西断面(即公式中的B断面), 也可用同样方法算出:

$$\mu_{S_i}=0.0821\text{m}; \quad \sigma_{S_i}^2=0.000209\text{m}^2; \quad C_{V_{S_i}}=0.55$$

表3 东(A)断面分层沉降概率特性

土层	1	2	3	4	5	6
$\rho(S_i, S_{i+1})$		-0.787	-0.584	-0.382	0.271	-0.809
μ_{S_i} (m)	0.0125	0.0712	0.0265	0.0274	0.0963	0.0253
$\sigma_{S_i}^2$ (m ²)	0.0000477	0.00106	0.000086	0.000106	0.00141	0.000219
$C_{V_{S_i}}$	0.55	0.46	0.35	0.38	0.39	0.59

(二) 基底非均匀沉降概率分析

为估计两断面沉降的互相关性, 本文将两断面压缩层内的土体作为母体, 以东断面的21个样点, 西断面的17个样点分别估计产生 μ_{S_A} , μ_{S_B} 的各随机变量的特性, 得出

$$\rho(e_{1A}, e_{1B}) = -0.348; \quad \rho(e_{2A}, e_{2B}) = 0.189$$

将计算结果代入式(14) (式中角标*i*, *j*换为*A*, *B*), 得出

$$\rho(S_A, S_B) = 0.17$$

由断面沉降概率分析结果及两断面随机变量的相关分析结果, 通过式(15)、(18)得出此住宅楼基底的非均匀沉降概率特性如表4。表中实测值为此楼竣工6个月后的实际资料。

表4 非均匀沉降概率特性

断面	均值		方差		变异系数	
	计算值	实测值	计算值	实测值	计算值	实测值
东	0.2591	0.2684	0.0026	0.00201	0.196	0.167
西	0.0821	0.0507	0.00209	0.00051	0.54	0.44
ΔS	0.177	0.2178	0.0031	0.0035	0.315	0.272

比较表中结果, 计算的非均匀沉降均值与实测值相差18%, 变异系数相差约16%, 分析其原因有下述几点:

1. 东断面距基底约3m处的淤泥质粘土层受荷后会有一定程度的侧向变形, 而分层总和法计算公式对此增加的沉降未能考虑。
2. 地基固结时间较短, 实测值尚不是最终沉降。
3. 可供计算采用的土性测值数较少, 影响了计算精度。

(三) 可靠度分析

尽管计算结果与实测值存在一定差异, 但从整体看, 计算的不确定性是合乎实际的。根据文献[2, 3]及国内外许多研究者的成果, 地基沉降符合正态分布。所以求出了均值和方差后, 即完全确定了非均匀沉降的概率密度函数, $\Delta S \sim N(0.177, 0.0031)$ 。假如选定某一保证率 $p=80\%$, 则可得出相应的非均匀沉降区间为 $[0.1057, 0.2483]$, 即可能发生的非均匀沉降落入此区间的概率为80%。

根据式(21)、(22), 取此建筑物地基的允许倾斜值为 $0.004^{[4]}$, 可算出 $\beta = -3.1$, 相应的失效概率 $p_f = 100\%$ 。即地基的破坏是无疑的, 实际情况与此预测结果相符。此住宅楼建成后即因过度倾斜而完全不能投入使用, 后经纠偏处理, 情况方有所改善。此结果说明, 在进行地基设计时, 沉降的可靠度分析是必要的, 此分析可预测沉降可能发生的范围和建筑物

正常使用的安全性, 并给出其失效可能性的量化值。

五、结 语

本文应用概率模型计算地基非均匀沉降, 分析了计算公式中各随机变量的概率特性及相关特性, 对一些不确定因素作了定量地研究和计算, 实例研究表明此模型对于正常固结土是可行的。根据沉降保证率和倾斜允许值, 可将最终计算结果表示成对应于不同保证率下的沉降置信区间或破坏概率, 这是可靠度分析的主要目的, 是确定性方法所不能得到, 而在实际工程中非常有用的结果。文中计算结果表明, 土层的变异性明显大于孔隙比的变异性, 是沉降不确定性的主要来源。此外, 相邻土层厚度相关系数在正负范围内变化, 对土层厚度的方差有直接影响。因此, 土层厚度概率特性分析是本文的一个较关键问题。

因在实例分析中未取得足够的样本, 故不得不对某些内容作出简化, 尤其是概率分析中的相关计算和可靠度分析中地基允许倾斜的取值, 这必定影响计算精度。因此, 如何在分析中正确处理小样本, 是岩土工程可靠度分析从理论到实践的关键一环。

目前, 上部结构研究已进入了“全概率阶段”, 相比之下, 基础工程在此方面还处于较落后状态, 特别是应用性研究还很不够。期待基础工程可靠度分析能尽快实用化。

参 考 文 献

- [1] Smith G N. 土木工程实用概率和统计. 曹焯康等译. 同济大学出版社, 1989. 94~120.
- [2] Vanmarke Erik H. Probabilistic Modelling of Soil Profiles. ASCE, 1977, 103(GT11): 1227~1246.
- [3] 包承纲, 吴天行. 多层地基沉降的概率分析. 中国科学, [A辑], 1985-11: 1038~1048.
- [4] 中华人民共和国国家标准. 建筑地基基础设计规范[GBJ 7-89]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989. 23~24.
- [5] 陈家银. 地基沉降的可靠性分析[研究生论文]. 武汉水利电力学院1989-06. 30~40.

Reliability Analysis of Non-Uniform Settlement of Foundation

Chen Xiao-ping Yu Ji-min

(Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering)

Abstract

Foundation soil was regarded as a random field, and a probabilistic model of the non-uniform settlement of foundation was established. Mean and coefficient of variation of non-uniform settlement of foundation were determined by first-order second-moment technique. Reliability analysis was then performed to compute the reliability index. As an example, the model was used for the calculation of the non-uniform settlement of a building. Values from calculation and measurement were compared and valuable conclusions were drawn.