

土层的概率模型及其在 桩基分析中的应用

李启信

W. White 楚 剑* 赵敏敏

(宾尼组合 (香港) 顾问工程师)

(澳大利亚新南威尔士大学大学学院)

提 要

本文讨论土层概率模拟的一些概念, 特别介绍随机场的理论及一些新发展。该理论考虑土性的变异及由抽样所做成的误差。本文亦提出一种分析粘性土中桩基承载力的概率分析方法, 并透过算例作具体说明。

一、前 言

众所周知, 土是一种变异性很大的工程材料, 即便在表面上看来均质的土层内, 特别是残积土, 不同地点的土性也会有很大的变异。

由于我们不能测量土层每一点的性质, 我们不能完全掌握土性在土层中的变化。因此将土性看成随机变量而用概率统计理论描述其变异, 就显得很有必要了。过去的一些研究通常都是沿用古典概率理论把土性看成一个单一的随机量, 如文献[1], [2]。这种模拟方法早已有学者提出是不正确的^[3~8]。可是这种错误方法目前还有人选用, 如文献[9]。

要正确地模拟土的性质, 就必须把土层看成一个随机场 (Random field)。这种观念最早由科内尔^[3]提出。其后胡^[4]、Lumb^[5, 8]、Vanmarcke^[7, 10]更提出一套完整的理论, 李与Lumb^[11]和李^[12]最近对随机场理论作了一些改进。虽然如此, 目前国内在这方面的研究还不多, 本文希望透过桩基的概率分析来具体说明一些理论的实际应用。

二、土层的概率特性

土层的概率模拟在文献[7, 10, 11, 12]有详细描述, 这里不再重复。但为方便起见, 以下将主要公式列出。对于一个均质土层, 将要考虑的土性记为 χ , 在土层某一点 $\underline{t}$, 可将 χ 表示如下(图1)

$$\chi(\underline{t}) = \mu + \varepsilon(\underline{t}) \quad (1)$$

到稿日期: 1987年10月27日

* 原为后勤工程学院建筑工程系(重庆)。现为新南威尔士大学研究生。

式中 μ 为土性的均值, $\varepsilon(\underline{t})$ 为随机分量, 其均值为零。

$\chi(\underline{t})$ 的概率特性可表示为

$$E\{\chi(\underline{t})\} = \mu \quad (2)$$

$$\text{var}\{\chi(\underline{t})\} = \sigma^2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\chi(\underline{t}), \chi(\underline{t}')\} &= \text{cov}\{\varepsilon(\underline{t}), \varepsilon(\underline{t}')\} \\ &= \sigma^2 \rho(\underline{v}) \end{aligned} \quad (4)$$

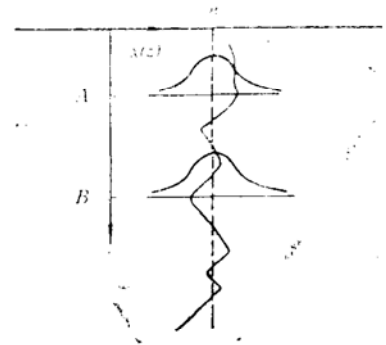


图1

式(3)和(4)中 σ^2 为土性的方差。 $\rho(\underline{v})$ 为自相关函数(Autocorrelation function)。对于均质土, σ^2 为常数, $\rho(\underline{v})$ 为相对距离 $\underline{v} = |\underline{t} - \underline{t}'|$ 的函数。要强调的是, 均值 μ 和方差 σ^2 为常数并不表示土性在每一点的值都相同, 其实现(Realization)不是每点都一样。如图1所示, 在点A的值可能大于均值 μ , 而在B点可能小于 μ 。常见的一维自相关函数为

$$\rho(v) = e^{-\frac{2v}{\delta}} \quad (5)$$

式中 δ 为相关距离。 δ 的大小代表了土性变化的程度。 δ 值小表示土性随距离的改变很大。相反, 土性的变化比较缓慢(图2)。一般相关距离为 3 m 以下^[13]。一般土工建筑如桩基, 其失效并不取决于土层某一点的强度而是土的强度的总和。比方说, 如果 $\chi(z)$ 为土在深度 z 的强度, 那么沿桩基长度为 L 的强度总和为

$$R = \int_0^L \chi(z) dz = L \cdot \tilde{\chi}_L \quad (6)$$

式中 $\tilde{\chi}_L$ 为 $\chi(z)$ 沿长度 L 的空间均值, 定义为

$$\tilde{\chi}_L = \frac{1}{L} \int_0^L \chi(z) dz \quad (7)$$

$\tilde{\chi}_L$ 的概率特性为

$$E\{\tilde{\chi}_L\} = \mu \quad (8)$$

$$\text{var}\{\tilde{\chi}_L\} = \sigma^2 \cdot \Gamma^2(L) \quad (9)$$

其中 $\Gamma^2(L)$ 为方差折减系数, 满足 $0 < \Gamma^2(L) \leq 1$ 。因此, 空间均值 $\tilde{\chi}_L$ 的变异比点的土性变异为小。 $\Gamma^2(L)$ 与自相关函数有关, 亦与 L 大小有关。对于式(5)的自相关函数, $\Gamma^2(L)$ 为^[13]

$$\Gamma^2(L) = \frac{\delta}{L} + \frac{\delta^2}{2L^2} \left\{ e^{-\frac{2L}{\delta}} - 1 \right\} \quad (10)$$

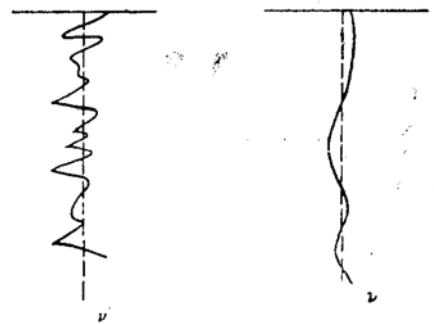


图2

当 $L > 3\delta$, 可以不考虑式(10)的第二项。那么 $\Gamma^2(L)$ 的计算变得相当简单。

以上我们假设了土性均值已知。现实情况是 μ 的值只能透过下式的样本均值 m 估计。

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (11)$$

这样便会带来统计上的误差, 因此需要对式(9)作以下修正^[11]。

$$\text{var}\{\tilde{\chi}_L\} = \sigma^2 \Gamma^2(L) + \text{var}\{m\} \quad (12)$$

式中 $\text{var}\{m\}$ 为样本均值 m 的方差, 可表示为^[12]

$$\text{var}\{m\} = \alpha \sigma^2 \quad (13)$$

α 定义为

$$\alpha = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho(\underline{v}_{ij}) \quad (14)$$

$\underline{v}_{ij}$ 为样本 i 和 j 的相对距离。如果我们沿一直线每隔距离 Δl 取样本, 对式(5)的自相关函数, α 的值可从图3查出。如果 $\Delta l/\delta$ 的比值越大, 在各抽样点的土性越接近互相独立, 而 α 的值亦会趋向相对于独立样本情况的最小值 $1/N$ 。因此从减少抽样所造成的误差这角度来看, 取样本的距离应尽可能大于 δ 。但另一方面, 如果取样本的距离太大, 便不能精确地估计自相关函数和相关距离。文献[12]对如何取样有进一步讨论。

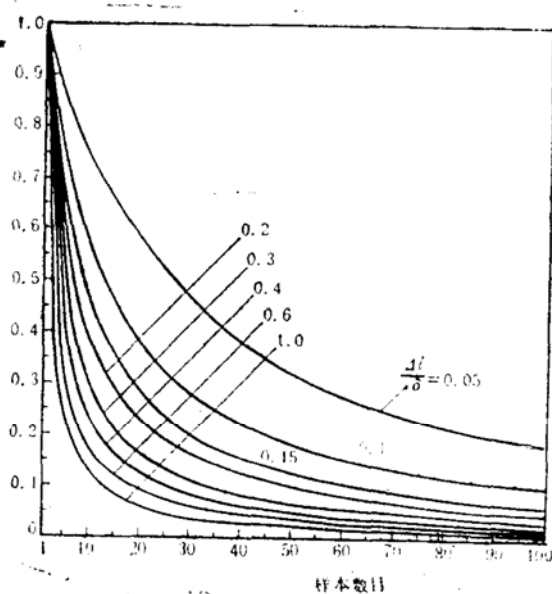


图 3

对于互不相关的样本, 一般用以下公式估计 σ^2 的估计值 s^2

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\chi_i - m)^2 \quad (15)$$

但由于土性有自我相关的特性, 我们需要对式(15)作以下修正^[12], 并把修正后的 s^2 记为 $\hat{s}^2$

$$\hat{s}^2 = \frac{s^2}{1 - \alpha} \quad (16)$$

在土工设计中, 很多情况下所测量得的土性并不是设计所需的参数, 或者在测量过程中有偏差而需要对所测得的土性进行修正。常用的模型为^[14]

$$\tilde{X}_C = \xi \tilde{X}_L \quad (17)$$

式中 $\tilde{X}_C$ 为修正后的空间均值, ξ 为修正系数。 ξ 和 $\tilde{X}_L$ 假设为互相独立。利用泰勒级数近似解得^[15]

$$E\{\tilde{X}_C\} = \bar{\xi} \cdot \mu \quad (18)$$

$$\text{var}\{\tilde{X}_C\} = \bar{\xi}^2 \{\sigma^2 \Gamma^2(L) + \text{var}\{m\}\} + \mu^2 \text{var}\{\xi\} \quad (19)$$

三、单桩的承载力概率分析

对于单桩, 其不排水轴向承载力 P_u 可按下式估计

$$P_u = P_{u1} + P_{u2} = C \cdot L \cdot \tilde{C}_L + A \cdot N_C \cdot s_b \quad (20)$$

式中 C 为桩的周长; A 为桩的截面面积; $\tilde{C}_L$ 为沿桩长的不排水粘着力空间均值; s_b 为桩端的不排水抗剪强度 s_u ; N_C 为承载力系数, 取其值为9; L 为桩的长度

为方便起见, 式(20)分为桩摩擦承载力 P_{u1} 和桩端承载力 P_{u2} 。不排水粘着力一般按下式计算

$$\tilde{C}_L = f \cdot \tilde{s}_L \quad (21)$$

其中 $\tilde{s}_L$ 为沿桩长 L 不排水抗剪强度 s_u 的均值。 f 为粘着力系数。图4为从文献[16, 17]整理出来的 f - $\tilde{s}_L$ 关系, 由于 f 的均值变化相当缓慢, 再加上 f 的变化范围比 $\tilde{s}_L$ 的大, 我们可近似地把 f 和 $\tilde{s}_L$ 看成互不相关并利用式(18)和(19)计算 $\tilde{C}_L$ 的均值和方差。 f 的均值和方差更加近似地用 $E\{f | \bar{s}_u\}$ 和 $\text{var}\{f | \bar{s}_u\}$ 估计。由于图4本身亦不十分精确, 似乎没有必要用太复杂的方法。我们不妨假设 f 的概率分布为一三角形分布, 如图4所示。图中 f_L, f_p, f_u 分别为 f 的下限值、最可能值和上限值。可得如下公式:

$$E\{f | \bar{s}_u\} = \frac{1}{3}(f_L + f_p + f_u) \quad (22)$$

$$\text{var}\{f | \bar{s}_u\} = \frac{1}{18}(f_L^2 + f_p^2 + f_u^2 - f_L f_p - f_L f_u - f_p f_u) \quad (23)$$

对于摩擦桩, 桩端的承载力一般只占总承载力的一个小比例。为简单起见, 可不考虑 s_u 的方差折减

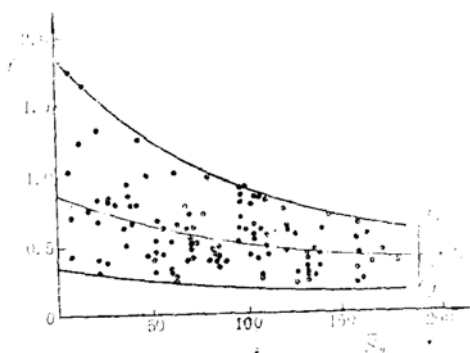


图 4

四、算 例

澳大利亚某地的土层主要为砂质粘土。圆锥触探试验所得的资料显示该土层为一均质土, 其土性随深度没有显著的变化, 可模拟成一均质随机场。由于估计自相关函数需要较多样本。大量的取样作强度试验并不可行。但我们可分析圆锥探头阻力, 估计其自相关函数和相关距离, 其方法在文献[18]有详细讨论。我们不妨假设从CPT所算得的结果也适用于其他土性指标如不排水强度。CPT试验的好处是比较经济, 同时可提供大量数据作分析, 测试距离 Δl 可以很小。资料显示CPT的自相关函数可由式(5)表示, 其相关距离为0.5m。假设我们在这地方取10个样本作强度试验, 每样本之间距离保持大于1m以减小抽样误差的方差, 得

$$\bar{s}_u = 50 \text{ kPa} \quad s^2 = 230 (\text{kPa})^2$$

由于取样距离大于 δ , α 的值接近最小值。所以

$$\alpha = \frac{1}{N} = 0.1$$

利用式(16), 得修正样本方差为

$$\hat{s}^2 = \frac{230}{1 - 0.1} = 256 (\text{kPa})^2$$

根据式(13), $\bar{s}_u$ 的方差为

$$\text{var}\{\bar{s}_u\} = \alpha \hat{s}^2 = 25.6 (\text{kPa})^2$$

以下计算长度为30m, 直径为0.5m的单桩承载力。

(一) 摩擦承载力

由于 $L \gg \delta$, 方差折减系数为

$$\Gamma^2(30) \approx -\frac{\delta}{L} = 0.0167$$

根据式(12)和(13), $\tilde{s}_L$ 的方差为

$$\text{var}\{\tilde{s}_L\} = 256 \times 0.0167 + 25.6 = 30 (\text{kPa})^2$$

由于土性的相关距离一般比桩长小很多, 方差折减相当可观。空间均值 $\tilde{s}_L$ 的方差通常由抽样误差 $\text{var}\{m\}$ 占主导。

从图4得出, 当 $\bar{s}_u = 50 \text{ kPa}$ 时, $f_L = 0.25$, $f_p = 0.65$, $f_u = 1.25$ 。利用式(22)和(23)得

$$\bar{f} = 0.72$$

$$\text{var}\{f\} = 0.0422$$

利用式(18)和(19)得

$$E\{\tilde{C}_L\} = \bar{f} \cdot \bar{s}_u = 36 \text{ kPa}$$

$$\text{var}\{\tilde{C}_L\} = \bar{f}^2 \text{var}\{\tilde{s}_L\} + \bar{s}_u^2 \text{var}\{f\} = 121 (\text{kPa})^2$$

因此

$$E\{P_{u1}\} = \pi d L E\{\tilde{C}_L\} = 1696 \text{ kN}$$

$$\text{var}\{P_{u1}\} = (\pi d L)^2 \text{var}\{\tilde{C}_L\} = 269 \times 10^3 (\text{kN})^2$$

式中 d 为桩直径。

(二) 桩端承载力

这里, 我们同样用 $\bar{s}_u$ 估计 s_b 的平均值。引用上节的假设, 即 $\Gamma^2 = 1$, 得

$$E\{s_b\} = \bar{s}_u = 50 \text{ kPa}$$

$$\text{var}\{s_b\} = \sigma^2 + \text{var}\{m\} = 282 (\text{kPa})^2$$

因此

$$E\{P_{u2}\} = \frac{\pi d^2}{4} \times N_C \times E\{s_b\} = 88 \text{ kN}$$

$$\text{var}\{P_{u2}\} = \left(\frac{\pi d^2}{4} \times N_C \right)^2 \text{var}\{s_b\} = 880 (\text{kN})^2$$

(三) 总承载力

总承载力的均值为

$$E\{P_u\} = E\{P_{u1}\} + E\{P_{u2}\} = 1784 \text{ kN}$$

由于计算摩擦承载力和桩端承载力时, 我们都用同一个强度均值 $\bar{s}_u$ 去估计 $\tilde{s}_L$ 和 s_b 的均值。因此 P_{u1} 和 P_{u2} 并不是互相独立的。但利用泰勒级数近似解求得

$$\text{cov}\{P_{u1}, P_{u2}\} = (\pi d L) \left(\frac{\pi d^2}{4} N_C \right) \cdot \bar{f} \cdot \left\{ \text{cov}\{\tilde{s}_L, s_b\} + \text{var}\{\bar{s}_u\} \right\} \quad (24)$$

虽然 $\text{cov}\{\tilde{s}_L, s_b\}$ 可利用文献[10]的公式算出, 但由于 $L \gg \delta$, $\text{var}\{\bar{s}_u\}$ 会占主导, 故此项可以不考虑, 因而得 $\text{cov}\{P_{u1}, P_{u2}\} = 1577 (\text{kN})^2$

$$\begin{aligned} \text{var}\{P_u\} &= \text{var}\{P_{u1}\} + \text{var}\{P_{u2}\} + 2\text{cov}\{P_{u1}, P_{u2}\} \\ &= 271 \times 10^3 (\text{kN})^2 \end{aligned}$$

P_u 的变异系数 Δ_R 为

$$\Delta_R = \frac{\sqrt{\text{var}\{P_u\}}}{E\{P_u\}} = 31\% \quad (25)$$

(四) 容许荷载

定义安全系数为

$$F = \frac{P_u}{P_s}$$

式中 P_s 为荷载。F一般近似地用对数正态分布描述, 失效或然率可按式求得^[19]

$$P_f = 1 - \Phi \left(\frac{\ln \left(\bar{F} \cdot \sqrt{\frac{1 + \Delta_R^2}{1 + \Delta_s^2}} \right)}{\sqrt{\ln[(1 + \Delta_R^2)(1 + \Delta_s^2)]}} \right) \quad (26)$$

式中 $\bar{F} = E\{P_u\}/E\{P_s\}$ 为均值安全系数, Δ_s 为 P_s 的变异系数, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数。

对以上算例, 如果 $\Delta_s = 0.2$, 要达到失效或然率不大于 10^{-3} , 利用式(26)可算得最小的均值安全系数为 $\bar{F} = 3$ 。亦即表示设计的荷载的均值不能大于总承载力均值的1/3。

四、结 语

结构概率分析在国内已有很多的研究成果。但在土工方面,概率分析的发展比国外缓慢。由于土并不是一种人为的工程材料,土性的差异远比人工制造的建筑材料如水泥,钢筋为大。另一方面,土工设计方法一般没有结构分析那么精确。所以土工设计的不确定性是相当大的。概率分析正是一种很好的处理这种不确定性的方法。但要注意一点,我们不能把结构概率分析方法完全搬到土工应用上。虽然两者有很多相似的地方,但土工概率分析不同之处,在于土性的变异应用随机场的理论去描述,而不能把它看成单一的随机变量。文献中出现很多谬误的分析往往都是由于这个原因。

本文介绍了土层概率模拟的一些新发展,并透过分析单桩的安全度具体地说明如何把概率分析理论应用在土工设计上,希望能引起读者对土工概率分析的兴趣。

参 考 文 献

- [1] Harr, M. E., *Mechanics of Particulate Media*, McGraw Hill, New York, 1977.
- [2] Smith, G. N., *The Use of Probability Theory to Assess the Safety of Propped Embedded Cantilever Retaining Walls*, *Geotechnique*, Vol. 35, No. 4, 1985, pp. 451—460.
- [3] Cornell, C. A., *First-order Uncertainty Analysis of Soils, Deformation and Stability*, *Proc. 1st ICASP*, Hong Kong, 1971, pp. 129—144.
- [4] Wu, T. H., *Uncertainty, Safety and Decision in Soil Engineering*, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 100, GT3, pp. 329—348.
- [5] Lumb, P., *Application of Statistics in Soil Engineering*, Chapter 3, *Soil Mechanics—New Horizon*, (Ed.) I. K. Lee, Newnes-Butterworth, 1974, pp. 44—111.
- [6] Lumb, P., *Spatial Variability of Soil Properties*, *Proc. 2nd ICASP*, Germany, 1975, pp. 397—421.
- [7] Vanmarcke, E. H., *Probabilistic Modelling of Soil Profiles*, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 103, GT11, 1977, pp. 1247—1265.
- [8] Castillo, E., Alonso, E. E., *Probabilistic Versus Deterministic Modelling: Filling a Gap*, *Proc. 11th ICSMFE*, San Francisco, Vol. 2, 1985, pp. 813—818.
- [9] Kuwahara, H., Yamamoto, M., *Safety Evaluation and Reliability-based Design of Braced Excavations*, *Proc. 5th ICASP*, Vancouver, Vol. 2, 1987, pp. 702—709.
- [10] Vanmarcke, E. H., *Random Fields: Analysis and Synthesis*, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1984.
- [11] Li, K. S., Lumb, P., *Probabilistic Design of Slopes*, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 24, pp. 510—535.
- [12] Li, K. S., *Probabilistic Approaches to Slope Design*, Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University College, The University of New South Wales, 1987.
- [13] Li, K. S., White, W., *Probabilistic Characterization of Soil Profiles*, *Research*

- ch Report No. 19, Department of Civil Engineering, University College, The University of New South Wales, 1987.
- [14] Wu, T. H., Lee, I-M., Potter, J. C., Kjerstad, O., Uncertainties in Evaluation of Strength of Marine Sand, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 113, No. 7, 1987, pp. 719-738.
- [15] Li, K. S., Discussion on 'Stability of Gravity Platforms on Clays: Reliability Analysis', by T. H. Wu and I-M. Lee, Submitted to *Geotechnique*.
- [16] Tomlinson, M. J., Some Effects of Pile Driving on Skin Friction, *Conference on Behaviour of Piles*, I. C. E., London, 1970, pp. 59-66.
- [17] Cragg, C. B. H., Krishnasamy, S. G., Probabilistic Analysis of Transmission Tower Foundation in Clay, *Proc. 5th ICASP*, Vol. 2, 1987, pp. 915-921.
- [18] Li, K. S., Application of Statistics and Probability in Soil Engineering, Paper Presented at Shaanxi Institute of Mechanical Engineering, Xian, Nov., 1988.
- [19] Lee, I. K., White, W., Ingles, O. G., *Geotechnical Engineering*, Pitman, Boston, 1983.

Probabilistics Modelling of Soil Profiles and Its Application in the Analysis of Pile Foundations

Li K.S.

(Binnie & Partners, Hong Kong)

White W., Chu J., Zhao M.M.

(Department of Civil Engineering, University College,

The University of New South Wales)

Abstract

Some concepts of probabilistic modelling of soil profiles are discussed. In particular, the theory of random field and some of its recent developments are discussed. The theory takes account of the uncertainty arising from the variability of soil properties and also the statistical uncertainty arising from sampling. The paper also discusses a method for assessing the reliability of the axial bearing capacity of piles in cohesive soils and the procedure is illustrated by means of an example.