

半解析法求水平承载桩的反应特性

阎树旺

S. Nordal

(天津大学水利系)

(挪威工学院)

提 要

研究水平承载桩反应特性的传统方法,如 k 法、 c 法及 m 法等,都是基于对土反力与桩水平位移关系随深度按某种规律变化的假设。本文在分析实测资料的基础上,得出了一个可精确描述水平承载桩弯矩的数学表达式;并以弹性梁理论为基础,进一步得出了剪力、土反力以及桩水平位移的计算公式。由本文方法反算的 p - y 曲线与API规范推荐方法结果吻合很好。本文给出了说明如何用之于设计的例题,并与以Janbu的构造 p - y 曲线的方法为基础的有限单元法分析结果进行了比较。

一、引 言

水平承载桩通常都假定满足弹性梁方程。现在已有各种数值方法来解这个方程。有时候能够找到一个解析解是很方便的。例如由测得的桩身弯矩反求桩-土的相互作用或桩的其它特性等情况。现存的解析解都是先假定土反力沿桩身分布,然后代入弹性梁方程求出解析解。但这些解一般与实测结果都显著不同。这主要是由于为了数学上可行,不得不对 p - y 关系做出与实际不符的简化造成的。

本文以现场实测的弯矩分布为依据,提出了一个横向承载桩弯矩沿桩身分布的表达式,可较好地描述或拟合现场试验数据资料。根据弹性梁理论,通过将弯矩表达式微分或积分,可得到剪力、土反力、扭转角以及水平位移沿桩身的分布。由此,既可用这些算式由实测弯矩反求 p - y 曲线,又可根据荷载及约束条件来确定桩的反应特性。

二、基 本 公 式

水平承载桩的弯曲特性通常用弹性梁方程来描述

$$E_p I_p \frac{d^4 y}{dz^4} = -p \quad (1)$$

式中 y 为桩身水平位移, p 为土反力, z 为深度, E_p 为桩的弹性模量, I_p 为桩横截面的惯性矩。

在简单的梁的弯曲理论中,轴力的影响通常忽略不计。

为了求方程(1)的解,一般都假定 p 与 y 满足某种简单关系,例如,采用文克尔(Winkler)假定

$$p = k_h y$$

这类假定往往得出以下形式的解

$$M(z) = e^{-\alpha z} (A \sin \alpha z + B \cos \alpha z) \quad (2)$$

此处 α , A 和 B 为待定常数,根据边界条件和 k_h 值来定出其大小。

将理论曲线与典型的试验结果相比较(图1)不难发现,两者有显著区别:如图1(b)所示,理论弯矩分布曲线上相邻零点间的距离都相等;而实测数据(图1(a))表明这个距离与曲线峰值都随深度迅速减小而趋近于零。由于弯矩的理论表达式与实测结果明显不同,可以想象,通过微分或积分弯矩表达式得到土反力、剪力、位移和转角的误差会更大。这些误差是由于为了数学上可解而不得不做与实际不符的土反力分布假定引起的。

从数学上讲,从弹性梁理论出发,假定土反力的分布就等于假定了弯矩 M 分布的曲线形状。这就提示我们,可以直接设一个与实测弯矩曲线吻合较好的函数,从而避开假设土反力随深度分布这一难题,再经过弹性梁方程去求 Q , p 和 y 等特性曲线。

我们通过研究发现,下列函数可较为精确地与实测数据相吻合。

$$M(z) = \exp \left\{ -\alpha \frac{\pi/2}{1 - \frac{z}{l}} \right\} \left(A \sin \frac{\pi/2}{1 - \frac{z}{l}} + B \cos \frac{\pi/2}{1 - \frac{z}{l}} \right) \quad (3)$$

式中 A , B 和 α 为待定常数; l 为桩的有效长度。

图2, 图3和图5给出了国内外一些著名的试验结果与式(3)的配合情况。对于图3和图

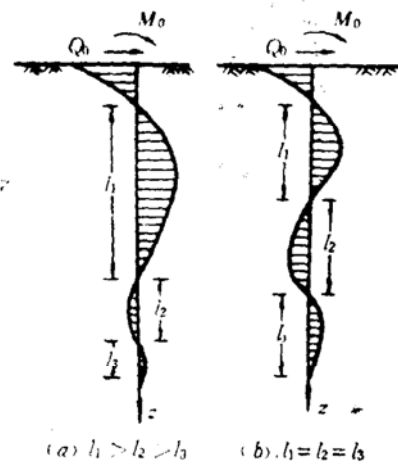


图1 试验结果和理论曲线的比较

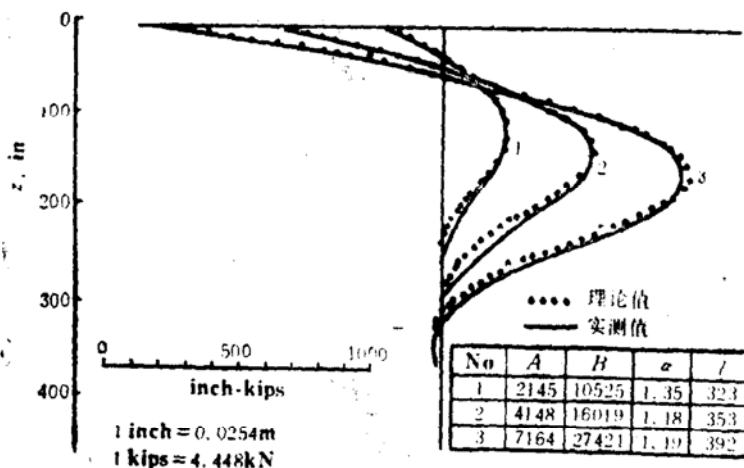


图2 弯矩分布

实测结果取自OTC1204, l单位为inch

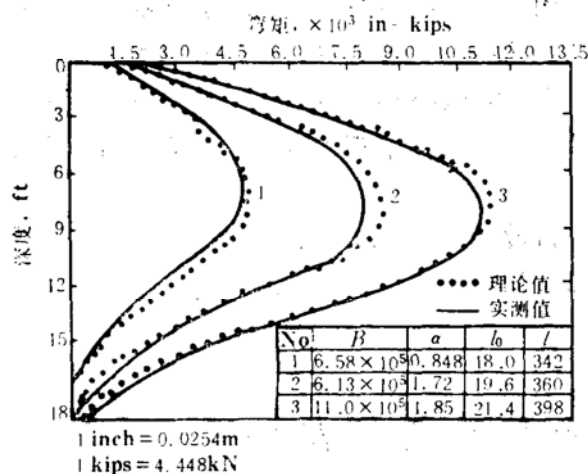


图3 硬粘土中24-in直径桩弯矩分布

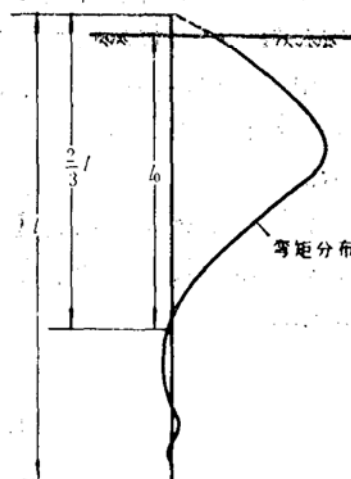
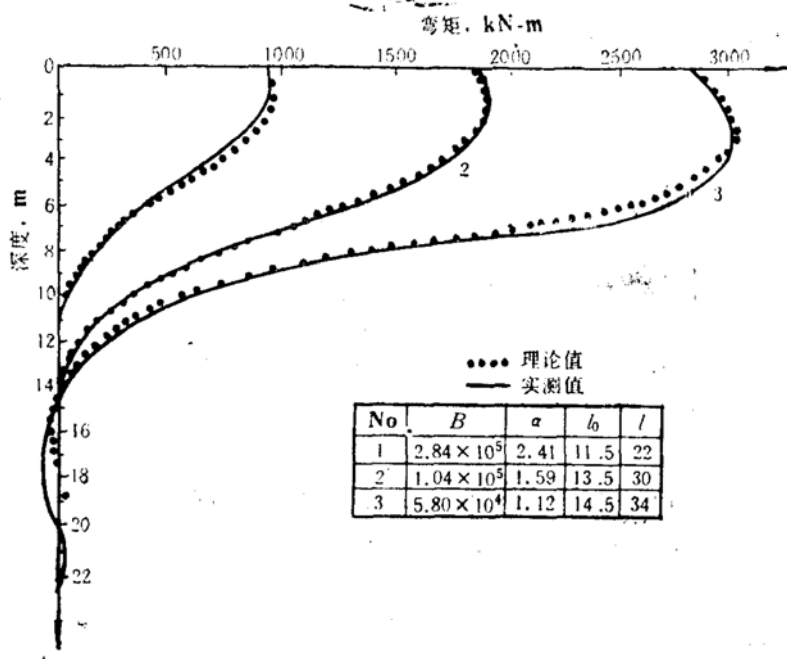
实测数据取自OTC2312, l_0, l 单位为inch图4 l_0 的定义

图5 渤海12号平台钢管桩试验结果

图中实测数据取自文献[2], l_0, l 的单位为m

5 一类的弯矩分布图形, 可将模拟函数(3)改写成

$$M(z) = \exp\left\{-\alpha \frac{\pi/2}{1 - \frac{z+2l/3-l_0}{l}}\right\} \cdot B \cos\left(\frac{\pi/2}{1 - \frac{z+2l/3-l_0}{l}}\right) \quad (3')$$

式中 l_0 的意义见图4。

式(3')的提出纯粹是为了拟合曲线的方便, 适合于桩顶只有水平力作用的情况。而式(3)为一般表达式。

显然, 对于一根能够正常工作的水平承载长桩来说, 只有上部的部分长度对荷载的反应

明显。非常长的桩是没有什么实际意义的。因此在式(3)与(3')中 l 均为桩的上部的对荷载有反应的有效长度。桩的有效长度可根据实测资料试算,或按后面各节的方法确定。

图2中理论模拟曲线的三个常数 A , B 和 α 可这样确定:在一条实测弯矩曲线上选三个点,将其坐标代入式(3)中,则得到关于 A , B 和 α 的三个超越方程,解此方程组即可得到 A , B 和 α 值。

图3和图5中理论模拟曲线的三个待定常数为 α , B 和 l_0 。 l_0 可直接由实测弯矩曲线上量得。在实测弯矩曲线上取两个点,将其坐标值代入式(3'),则可得到两个方程,解此方程组可得 α 和 B 值。

三、剪力、土反力及变形的表达式

如上所述,既然水平承载桩的实际弯矩分布可由式(3)或式(3')较为精确地近似,根据弹性梁理论,可通过微分或积分来得到剪力 Q ,土反力 p 和水平位移 y 的分布。以下我们只讨论一般式(3),将其改写为

$$M(z) = e^{-\alpha t}(A \sin t + B \cos t) \quad (4)$$

式中

$$t = \frac{\pi/2}{1 - \frac{z}{l}}$$

则深度 z 处的剪力

$$\begin{aligned} Q &= \frac{dM}{dz} \\ &= e^{-\alpha t}[(-\alpha A - B) \sin t + (-\alpha B + A) \cos t] D_1 \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$D_1 = \frac{dt}{dz} = \frac{\pi}{2l} \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{l}} \right)^2$$

令 $Q=0$,则得到弯矩取得极值的深度

$$z_m = l \left(1 - \frac{\pi}{2t_1} \right) \quad (6)$$

式中

$$t_1 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{A - \alpha B}{\alpha A + B} \right)$$

由于 $z_m \geq 0$,故 $t_1 \geq \pi/2$

在深度 z 处的土反力

$$\begin{aligned}
 p(z) &= \frac{d^2 m}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} \\
 &= e^{-\alpha z} \{ [(\alpha^2 D_1^2 - \alpha D_2 - D_1^2)A + (2\alpha D_1^2 - D_2)B] \\
 &\quad \times \sin t + [(D_2 - 2\alpha D_1^2)A + (\alpha^2 D_1^2 - \alpha D_2 - D_1^2)B] \\
 &\quad \times \cos t \} \quad (7)
 \end{aligned}$$

式中

$$D_2 = \frac{d^2 t}{dz^2} = \frac{\pi}{l^2} \frac{1}{(1 - \frac{z}{l})^3}$$

直接积分式(3)比较困难, 可用数值方法计算转角 θ 及位移 y

$$EI\theta = \int M dz \quad (8)$$

$$EIy = \int \int M dz dz \quad (9)$$

四、由实测弯矩反求 p - y 曲线

在室内或现场试验中, 沿深度的弯矩分布比较容易测定, 而土反力及桩水平位移 y 的分布较难确定, 特别是在软粘土中。

通常桩顶的荷载是分级施加的, 对每级荷载可测得一条弯矩分布曲线。用前面的方法可以得到一组 A , B 和 α 值, 代入式(7)和式(9)可以得到相应的 p 和 y 的分布曲线。对于某一确定的深度, 可根据不同荷载对应的 p 及 y 曲线, 得出一组 p - y 值, 在 p - y 坐标系中将各点连成曲线, 就得到了这一深度上的 p - y 曲线。

图6是由图2的弯矩分布得出的 p - y 曲线以及与美国API规范推荐方法结果的比较, 可见二者非常接近。

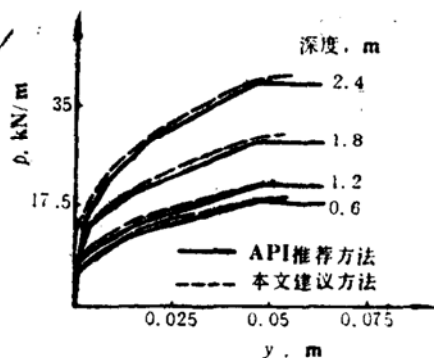


图6 软粘土中的 p - y 曲线

五、桩的特性分析

理论的价值在于能够由已知的荷载及边界条件来确定桩的弯矩、剪力、水平位移和土反力等反应特性。与其它理论方法一样,本文假定土和桩都是均质的,且桩为等截面的,至少在接近泥面的一定长度内是等截面的。

如上面所讨论的,水平承载桩的特性曲线(M, Q, p, θ, y)可由三个参数 A, B 及 α 来确定。通过引进边界条件,例如已知桩顶转角与水平力,或弯矩及水平力等,代入式(5)与式(8)或式(4)与式(5),总可以得到两个方程,而未知数则有三个(A, B 及 α)。所需的第三个方程无疑必定与土的特性有关。如果已知某一深度上的 $p-y$ 关系,则将其代入式(7)与式(9),就得到了所需的第三个方程。

作为一例,图7所示为一个水平承载桩置于中砂中,桩顶自由,水平力为 Q_0 ,桩顶弯矩为 M_0 ,即

$$M|_{x=0} = M_0 \quad (10)$$

$$Q|_{x=0} = Q_0 \quad (11)$$

代入式(4)与式(5)中,得到

$$M_0 = Ae^{-\frac{\pi}{2}\alpha} \quad (12)$$

$$Q_0 = \frac{\pi}{2l}(\alpha A - B)e^{-\frac{\pi}{2}\alpha} \quad (13)$$

又若某一深度 z_0 处的 $p-y$ 关系为

$$p|_{x=z_0} = \mu y^n|_{x=z_0} \quad (14)$$

将 $z = z_0$ 代入式(7)与式(9),结果再代入式(14),就得到了第三个方程。

设 $M_0 = 0$, $Q_0 = 100\text{kN}$, 桩长 $L = 21\text{m}$, $E_p = 210\text{GPa}$, $I_p = 8.47 \times 10^{-4} \text{m}^4$ 。又根据 Janbu 法得出的 $p-y$ 曲线定出 $z = 0$ 时 $\mu = 16.37$, $n = 0.618$ (图8), 故有

$$p|_{x=0} = 16.37(y|_{x=0})^{0.618} \quad (15)$$

为了确定桩的有效长度,采用 Janbu 关于最大弯矩所在深度的近似计算公式(参见文献[1])

$$z_M \approx \frac{Q_0}{p_r} \quad (16)$$

代入式(6)中,则有

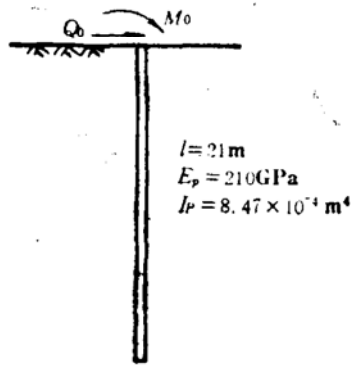
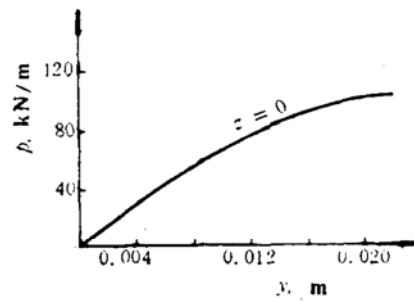


图7 边界条件

图8 $z=0$ 时的 p - y 曲线

$$l \approx \frac{z_M}{1 - \frac{\pi}{2t_1}} = \frac{Q_0}{p_r \left(1 - \frac{\pi}{2t_1}\right)} \quad (17)$$

因为 p_r 为土反力沿深度的平均值,一次不易估准,故实用时应经几次调整修正。

将上述结果代入式(12), (13)和(14),即可解出 A , B 和 α 值。

图9给出了计算结果,并与文献[3]中的有限元分析结果做了比较,可见二者吻合很好。

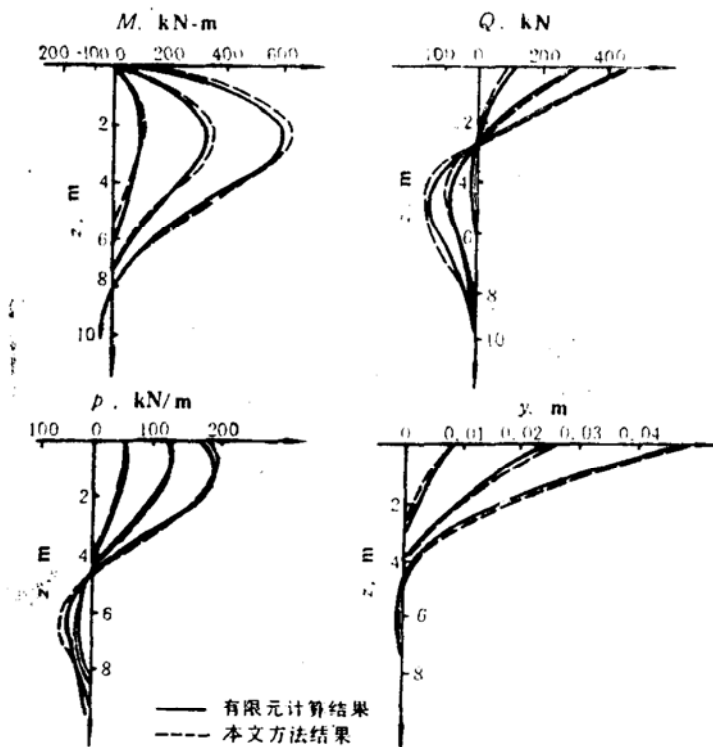


图9 分析解与有限元结果比较

六、结 语

本文根据实测弯矩的分布提出了水平承载桩反应特性的半解析解法,比假设土反力分布

的各种解析解法更接近实际情况。本文方法可用于由实测弯矩求 p - y 曲线的反分析,或在设计阶段由边界条件估计水平承载桩的反应特性。

参 考 文 献

- [1] Janbu, N., Simple Pile Foundation Analyses, 1982, NTH.
- [2] 刘楚凡等, 水平承载力试验研究报告, 海洋石油, 1980年第1期。
- [3] Grande, L.O., Nordal, S., Pile-Soil Interaction on Effective Stress Basis, Conf. on Recent Development in the Design and Construction of Piles, Inst. of Civil Eng., Vol.1, 1979, London.
- [4] Matlock, H., Correlations for Design of Laterally Loaded Piles in Soft Clay, 1970, O.T.C. 1204.
- [5] Reese, L. C., Field Testing and Analysis of Laterally Loaded Piles in Stiff Clay, 1975, O.T.C. 2312.

A Semi-Analytical Solution to the Behaviour of Laterally Loaded Piles

Yan Shuwang

Steinar Nordal

(Tianjin University)

(Norwegian Inst. of Technology)

Abstract

Conventional methods of researching the behaviour of laterally loaded piles are usually based on the assumptions of the relations between the horizontal displacement of the pile and the reactive force of soil along the depth. By analyzing the observed data from field tests, an equation is proposed in this paper, with which the bending moment distribution along a laterally loaded pile is simulated. According to the beam theory, then expressions of the soil resistance, shear force and deflection of the pile can be derived.