

等应变条件下的砂井地基固结解析理论

谢康和 曾国熙

(浙江大学土木系, 杭州)

提 要

本文建立了等应变条件下较为完善的打穿软粘土层的砂井地基固结解析理论, 该理论较同样条件下现有理论更接近自由应变条件下严密的但极其复杂的解析理论。文中对巴隆(R.A. Barron)理论和汉斯(S. Hansbo)理论作了详细的分析和讨论, 阐述了考虑井阻作用时巴隆理论的不合理性和汉斯理论的近似性。最后根据本文理论编制了可用于IBM-PC微机的绘图软件, 绘制了常用砂井的平均径向固结度-径向固结时间因子等曲线。利用这些曲线, 能较方便地进行考虑井阻作用和涂抹作用的砂井地基设计。

一、引 言

砂井问世以来, 已在工程中大量应用。

翻开砂井理论的发展和应用史^[1-6]可以发现, 尽管砂井固结解析理论不能考虑荷载分布和侧向变形^[7], 但由于简便实用, 尤其是等应变条件下的砂井固结解析理论, 一直是国内外砂井地基设计的主要理论基础。

遗憾的是, 现有等应变条件下经典的巴隆理论^[1]和后起的汉斯理论^[8], 均或多或少存在着错误或不足之处。例如, 考虑井阻作用时, 巴隆导出的解仅当 $t = 0$ 时才满足径向固结基本方程; 而汉斯之解则忽视了井阻作用下砂井地基中的体积应变是随深度而变的这一事实。另外, 巴隆在文献[1]中给出的图10是错误的, 这一点汉斯已曾指出^[8]。这些只要仔细阅读文献[1]、[3]就可发现, 这些不足也表明了现有等应变条件下的砂井地基固结解析理论是不完善的。本文就此作了较详细的分析讨论。

为完善等应变条件下的砂井固结解析理论, 使砂井工程的设计更臻合理, 本文在现有理论的同样条件或主要假定下, 推导了满足径向固结基本方程及一切求解条件的精确解, 从而建立了较为完善的砂井固结解析理论。对比分析表明, 该理论给出的结果更加接近自由应变条件下严密的但极复杂的砂井固结解析理论^[4]。

笔者根据本文理论在IBM-PC微机上编制了计算和绘图软件, 绘制了大量曲线。文中给出了可考虑井阻作用和涂抹作用的平均径向固结度-径向固结时间因子等曲线, 以供设计砂井工程时选用。

二、本文理论的建立

(一) 计算简图

图1为打穿砂井地基计算简图。图中 l 为砂井计算长度, $l = H$; H 为粘土层竖向排水距离, 单面排水时, $H = H_s$, 双面排水时, $H = H_s/2$; H_s 为粘土层厚度; k_h, k_v 为地基水平向及竖向渗透系数; k_s 为砂井周围涂抹区内的水平向渗透系数, $k_s \leq k_h$; r_s 为涂抹区半径; k_w 为砂井材料渗透系数; r_w 为砂井半径; r_e 为砂井影响区的半径; p_0 为均布荷载; r, z 为径向及竖向坐标。

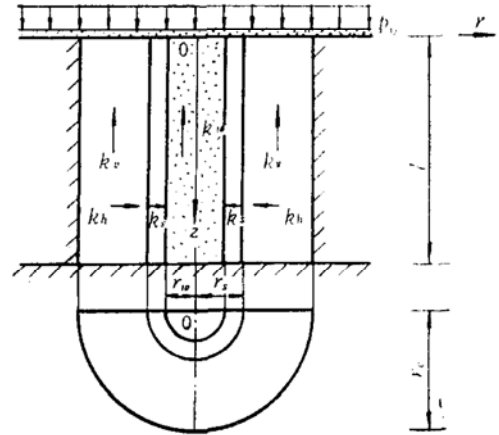


图1 打穿砂井地基计算简图

(二) 基本假定

同文献[1]、[3]本文作以下主要假定:

1. 等应变条件成立。即砂井地基中无侧向变形, 同一深度的平面上任一点的垂直变形相等。

2. 径向和竖向渗流可分别单独考虑、考虑竖向渗流时按太沙基一维固结理论; 考虑径向渗流时 $k_v = 0$ 。径竖向组合渗流可按文献[2]的方法考虑。

3. 砂井内孔压(即超静孔隙水压力, 下同)沿径向的变化很小, 可以不计; 任一深度 z 处从土体中沿井周流入砂井的水量等于砂井中向上水流的增量。

4. 除渗透系数外, 井料和涂抹区内土体的其他性质同天然地基。

(三) 径向固结基本方程及其求解条件

根据以上假定, 本文只需考虑径向渗流, 且可得以下方程, 即

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = -\frac{1}{E_s} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{k_s}{\gamma_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) &= \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} & r_w \leq r \leq r_s \\ -\frac{k_h}{\gamma_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) &= \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} & r_s \leq r \leq r_e \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$2\pi r_w dz \frac{k_s}{\gamma_w} \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=r_w} = -\pi r_w^2 dz \frac{k_w}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2}$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = -\frac{2k_s}{r_w k_w} \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=r_w} \quad (3)$$

其中 e_v 为仅考虑径向渗流时影响区内任一点的体积应变(与垂直应变相等), $e_v = e_v(z, t)$; E_s 为地基压缩模量; u_r 为仅考虑径向渗流时影响区内土中任一点的孔压, $u_r = u_r(r, z, t)$; \bar{u}_r 为仅考虑径向渗流时影响区内土中任一深度的平均孔压, $\bar{u}_r = \bar{u}_r(z, t)$; u_w 为仅考虑径向渗流时, 砂井内任一深度的孔压, $u_w = u_w(z, t)$; γ_w 为水容重; t 为时间。

方程(1)–(3)即为等应变条件下径向固结基本方程。其求解条件(即边界及初始条件)为

$$1. \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=r_e} = 0;$$

$$2. \quad u_w \Big|_{z=0} = 0;$$

$$3. \quad \frac{\partial u_w}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0;$$

$$4. \quad \bar{u}_r \Big|_{t=0} = u_0 = p_0;$$

$$5. \quad u_r \Big|_{r=r_w} = u_w.$$

(四) 方程的求解

对方程(2)两边关于 r 积分, 并利用求解条件 1, 可得

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\gamma_w}{2k_s} \left(\frac{r_e^2}{r} - r \right) \frac{\partial e_v}{\partial t} \quad r_w \leq r \leq r_s \quad (4a)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\gamma_w}{2k_h} \left(\frac{r_e^2}{r} - r \right) \frac{\partial e_v}{\partial t} \quad r_s \leq r \leq r_e \quad (4b)$$

对上式两边再关于 r 积分, 并利用求解条件 5, 得

$$u_r = \begin{cases} \frac{\gamma_w}{2k_s} \left(r_e^2 \ln \frac{r}{r_w} - \frac{r^2 - r_w^2}{2} \right) \frac{\partial e_v}{\partial t} + u_w & r_w \leq r \leq r_s \\ \left[\frac{\gamma_w}{2k_h} \left(r_e^2 \ln \frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2} \right) + \frac{\gamma_w}{2k_s} \left(r_e^2 \ln s - \frac{r_s^2 - r_w^2}{2} \right) \right] \frac{\partial e_v}{\partial t} + u_w & r_s \leq r \leq r_e \end{cases} \quad (5)$$

式中 $s = r_s/r_w$

地基中任一深度的平均孔压可表示为^[8]

$$\bar{u}_r = \frac{1}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^{r_e} 2\pi r u_r dr \quad (6)$$

将式(5)代入, 积分得

$$\bar{u}_r = \frac{r_w r_e^2}{2k_h} F_a \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + u_w \quad (7)$$

式中

$$F_a = \left(\ln \frac{n}{s} + \frac{k_h}{k_s} \ln s - \frac{3}{4} \right) \frac{n^2}{n^2 - 1} + \frac{s^2}{n^2 - 1} \left(1 - \frac{k_h}{k_s} \right) \left(1 - \frac{s^2}{4n^2} \right) + \frac{k_h}{k_s} \frac{1}{n^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) \quad (8)$$

$n = r_e/r_w$, 为井径比。

由式(4a), 方程(3)可写为

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = -\frac{\gamma_w}{k_w} (n^2 - 1) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (9)$$

结合方程(1), (9)及式(7), 可得

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} = -\lambda (\bar{u}_r - u_w) \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = -\rho^2 (\bar{u}_r - u_w) \quad (11)$$

上两式中 $\lambda = 8c_h/(d_e^2 F_a)$; $c_h = k_h E_s/\gamma_w$, 水平向固结系数; $\rho^2 = \frac{8k_h(n^2-1)}{k_w d_e^2 F_a}$ 。

从方程(10)和(11)中消去 \bar{u}_r , 得

$$\frac{\partial^3 u_w}{\partial z^2 \partial t} + \lambda \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} - \rho^2 \frac{\partial u_w}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

采用分离变量法, 可得方程(12)的通解为

$$u_w = (A \sin \eta z + B \cos \eta z) e^{-B_r t} \quad (13)$$

式中 A, B, η 为待定系数; $B_r = \lambda\eta^2(\rho^2 + \eta^2)$ 。

由求解条件 2 和 3, 得 $B = 0, A\eta\cos\eta l = 0$ 。

要使 u_w 有非零解, $\eta = M/l$ 必须成立。

于是可得 u_w 的特解为

$$\tilde{u}_w = A \sin \frac{Mz}{l} e^{-B_r t} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$\text{式中 } M = \frac{(2m+1)}{2} \pi; \quad B_r = \frac{\lambda M^2}{\rho^2 l^2 + M^2} = \frac{8c_h}{d_e^2} \left/ \left(F_a + \frac{8}{M^2} \frac{n^2 - 1}{n^2} G \right) \right.$$

$G = (k_h/k_w)(l/d_w)^2$, 称井阻因子。

将所有的特解叠加, 得

$$u_w = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{u}_w = \sum_{m=0}^{\infty} A \sin \frac{Mz}{l} e^{-B_r t} \quad (15)$$

式(15)代入式(11), 得

$$\bar{u}_r = \sum_{m=0}^{\infty} A \frac{\lambda}{\lambda - B_r} \sin \frac{Mz}{l} e^{-B_r t} \quad (16)$$

由求解条件 4, 并利用函数系 $\sin \frac{Mz}{l}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 在区间 $[0, l]$ 上的正交性,

$$\text{可得 } A = \frac{2}{M} \frac{\lambda - B_r}{\lambda} u_0。$$

至此, 由式(1)、(5)、(15)、(16), 可得到满足基本方程及其求解条件的精确解。即

$$u_r = \begin{cases} u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{k_h B_r}{k_s \lambda F_a} \left(\ln \frac{r}{r_w} - \frac{r^2 - r_w^2}{2r_e^2} \right) + \frac{\lambda - B_r}{\lambda} \right] \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_r t} & r_w \leq r \leq r_s \\ u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{B_r}{\lambda F_a} \left[\left(\ln \frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2r_e^2} \right) + \frac{k_h}{k_s} \left(\ln s - \frac{s^2 - 1}{2n^2} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{\lambda - B_r}{\lambda} \right\} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_r t} & r_s \leq r \leq r_e \end{cases} \quad (17)$$

$$u_{zw} = u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \frac{\lambda - B_r}{\lambda} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_r t} \quad (18)$$

$$\bar{u}_r = u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_r t} \quad (19)$$

进而可得地基任一深度的径向固结度 U_r 为

$$U_r = 1 - \frac{\bar{u}_r}{u_0} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_r t} \quad (20)$$

地基平均径向固结度 \bar{U}_r (即整个深度范围内 U_r 的平均值) 为

$$\bar{U}_r = 1 - \left(\frac{1}{H} \int_0^H \bar{u}_r dz \right) / u_0 = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-B_r t} \quad (21)$$

式(17)~(21)即为本文理论所给出的等应变条件下砂井固结问题的解答。

(五) 特例

1. 等应变条件下砂井的无井阻固结

不考虑井阻作用时, 砂井的固结称为无井阻固结。此时, $k_w \rightarrow \infty$, $G = 0$, $B_r = \lambda$ 。由级数理论, 可以证明

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} = 1 \quad (0 < z \leq 2H) \quad (22)$$

则由式(17)~(22), 可得等应变条件下砂井的无井阻固结解。即

$$u_r = \begin{cases} \frac{u_0}{F_a} \frac{k_h}{k_s} \left(\ln \frac{r}{r_w} - \frac{r^2 - r_w^2}{2r_w^2} \right) e^{-\lambda t} & r_w \leq r \leq r_s \\ \frac{u_0}{F_a} \left[\left(\ln \frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2r_s^2} \right) + \frac{k_h}{k_s} \left(\ln s - \frac{s^2 - 1}{2n^2} \right) \right] e^{-\lambda t} & r_s \leq r \leq r_c \end{cases} \quad (23)$$

$$u_{zw} = 0 \quad (24)$$

$$\bar{u}_r = u_0 e^{-\lambda t} \quad (25)$$

$$U_r = 1 - e^{-\lambda t} \quad (26)$$

$$\bar{U}_r = U_r = 1 - e^{-\lambda t} \quad (27)$$

2. 等应变条件下的理想井固结

作为无井阻固结的特例，若进一步不考虑涂抹作用，则称砂井的固结为理想井固结。

不考虑涂抹作用时， $s = \frac{k_h}{k_s} = 1$ ，代入式(23)–(27)，即可得理想井固结解。即

$$u_r = \frac{u_0}{F_i} \left(\ln \frac{r}{r_w} - \frac{r^2 - r_w^2}{2r_e^2} \right) e^{-\lambda t} \quad r_w \leq r \leq r_e \quad (28)$$

式中 $F_i = \frac{n^2}{n^2 - 1} \left(\ln n - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{n^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right)$

$u_w, \bar{u}_r, U_r, \bar{U}_r$ 的形式同式(24)–(27)。

式(23)–(25)也可由条件 $u_w = 0$ ，从式(10)、(1)及式(5)中直接解得。

(六) 平均径向固结度 \bar{U}_r 的近似计算式

若仅取式(15)中 $m = 0$ 所对应的特解作为 u_w 解，并近似地以下式取代求解条件4，即

$$\frac{1}{H} \int_0^H u_r |_{t=0} dz = u_0$$

则可得等应变条件下砂井地基平均径向固结度近似计算式^[8]。即

$$\bar{U}_r = 1 - e^{-\frac{8T_h}{F + \pi G}} \quad (29)$$

式中 $T_h = c_h t / d_e^2$ ，径向固结时间因子； F 是 F_a 的简化式，即

$$F = \ln \frac{n}{s} + \frac{k_h}{k_s} \ln s - \frac{3}{4}$$

显然式(29)符合第二作者提出的平均固结度普遍式的形式^[6]，即

$$\bar{U} = 1 - \alpha e^{-\beta t} \quad (30)$$

式中 \bar{U} 为平均固结度，对于式(29)， $\bar{U} = \bar{U}_r$ ； α, β 为系数及参数，对于式(19)， $\alpha =$

$$1, \beta = \frac{8c_h}{d_e^2(F + \pi G)}。$$

因此可非常方便地用于实际工程,特别当考虑逐渐加荷时^[8]。

三、本文理论与现有理论的比较及讨论

(一)与等应变条件下现有理论的比较

等应变条件下现有砂井固结解析理论主要是巴隆理论和汉斯理论。

1. 巴隆理论^[1]

巴隆给出的解答为

$$u_r = u_0 \left\{ \frac{f(z)}{F_b} \left[\ln \frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2r_e^2} + \frac{k_h}{k_s} \ln s \left(\frac{n^2 - s^2}{n^2} \right) \right] + 1 - f(z) \right\} e^{-\lambda_b f(z)t} \quad r_s \leq r \leq r_e \quad (31)$$

$$u_w = u_0 [1 - f(z)] e^{-\lambda_b f(z)t} \quad (32)$$

$$\bar{u}_r = u_0 e^{-\lambda_b f(z)t} \quad (33)$$

$$U_r = 1 - e^{-\lambda_b f(z)t} \quad (34)$$

$$\bar{U}_r = 1 - \frac{1}{H} \int_0^H e^{-\lambda_b f(z)t} dz \quad (35)$$

式中 $\lambda_b = 8c_h / (d_e^2 F_b)$; (36)

$$F_b = \frac{n^2}{n^2 - s^2} \ln \frac{n}{s} - \frac{3}{4} + \frac{s^2}{4n^2} + \frac{k_h}{k_s} \left(\frac{n^2 - s^2}{n^2} \right) \ln s; \quad (37)$$

$$f(z) = (e^{\rho_b(z^{-2}H)} + e^{-\rho_b z}) / (1 + e^{-2\rho_b H}); \quad (38)$$

$$\rho_b^2 = 8k_h(n^2 - s^2) / (k_w d_e^2 F_b); \quad (39)$$

显然,当 $k_w \rightarrow \infty$ 时, $\rho_b = 0$, $f(z) = 1$ 。

将式(31)~(35)与本文理论的式(23)~(27)比较可见,对于无井阻固结(即 $k_w \rightarrow \infty$),除式(31)和 F_b 与本文的式(23)和式(8)有差别外,其他均一致;对于理想井固结,两者无别。

造成差别的原因有两点:

(1)巴隆假定涂抹区不可压缩,但本文并无此假定。

(2)巴隆求 \bar{u}_r 时用下式:

$$\bar{u}_r = \frac{1}{\pi(r_c^2 - r_s^2)} \int_{r_s}^{r_c} 2\pi r u_r dr \quad (40)$$

与本文用的式(6)不同。

对于第一点，本文理论显然更精确；从平衡的角度上看，式(6)也更合理可取。不过，分析表明，这两点所造成的差别对结果的影响很小，可以不计。

对于有井阻固结，巴隆理论与本文理论完全不同。其原因是：巴隆解中的 u_w 并非如本文这样由联列求解方程(10)和(11)得到，而是由 $\bar{u}_r = u_0$ 及求解条件2和3，单独从方程(11)中直接得到。因此 u_w 及通过 u_w 而得到的 u_r 和 \bar{u}_r 解均仅当 $t = 0$ 时才满足基本方程。其结果是不合理的。这点也可从图2所示的各解结果对比曲线中看出。

即便如此，巴隆给出的考虑井阻作用的平均径向固结度 \bar{U}_r 的计算式还不是显式，计算 \bar{U}_r 时需进行数值积分。

还应提到的是，正如汉斯^[8]所指出的，巴隆在文献[1]中给出的图10是错误的。作为对此图的更正，本文给出图3。

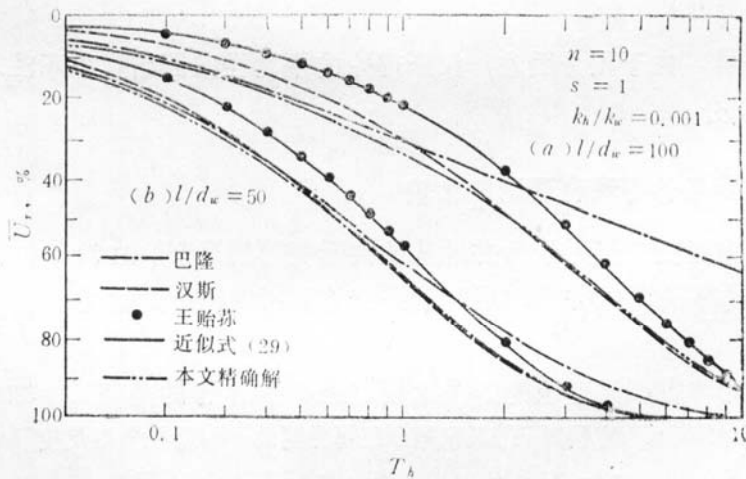


图2 各解结果对比曲线

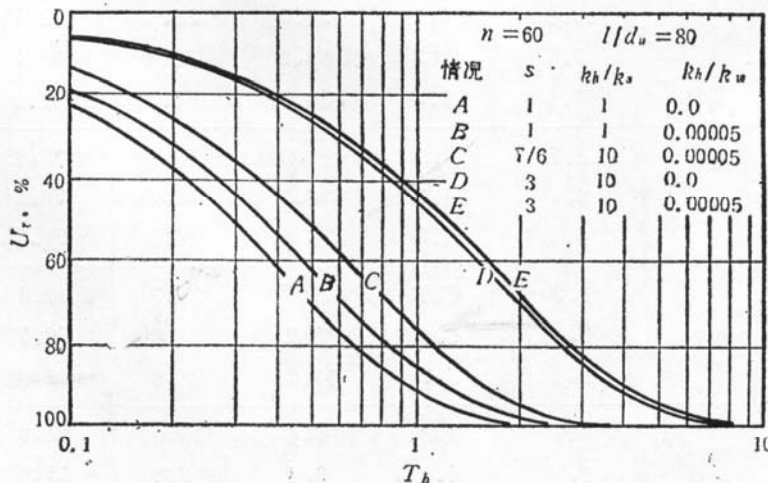


图3 井阻和涂抹作用对砂井地基固结的影响

2. 汉斯理论^[8]

汉斯只给出以下解:

$$\bar{u}_r = u_0 e^{-8T_h/\mu z} \quad (41)$$

$$U_r = 1 - e^{-8T_h/\mu z} \quad (42)$$

$$\text{式中 } \mu z = F_a + \frac{k_h}{k_w} \frac{4z}{d_w^2} (2H - z) \frac{n^2 - 1}{n^2} \quad (43)$$

可以看出,对于无井阻固结,汉斯解与本文解一致;对于有井阻固结,汉斯解则与本文不同。

从本文解可看出,有井阻固结的特征之一是:基本方程中的各量均与 z 有关。但汉斯在分析一开始就将 ε_v 当作与 z 无关的量,则对方程(9)两边关于 z 积分,并利用求解条件2和3得到 u_w 与 $\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$ 的关系,进而得到式(41)。但从式(41)可见, \bar{u}_r (或 ε_v)与 z 有关,这就与他原先的作法矛盾。因此汉斯解也只能看作一种近似解。不过从图2可见,该近似解与本文精确解还较接近。

与巴隆理论一样,由于积分困难,汉斯理论的平均径向固结度也不能写成显式,计算 \bar{U}_r 时需进行数值积分。

(二)与自由应变条件下现有理论比较

通常认为,自由应变更接近于砂井地基的实际变形情况^[3]。1974年,日本的吉国洋等人建立了自由应变条件下能考虑井阻作用的砂井固结解析理论^[4],这也是迄今理论上最为严密的砂井固结理论^[8,9]。

表1为本文理论与吉国洋理论的结果比较。表1中给出的是在 $L = 32G/\pi^2 = 0, 0.5,$

表1 由本文[A],吉国洋[Y]及汉斯[H]解得到的 $z=l$ 处径向固结度 $U_r(\%)$

($n=15, s=1, k_h/k_s=1, L=32G/\pi^2$)

L	T_h	T_h					
		0.02	0.05	0.10	0.20	0.50	1.00
0.0	Y	10.6	20.7	34.9	56.1	86.5	98.1
	H	7.8	18.3	33.2	55.4	86.7	98.2
	A	7.8	18.4	33.5	55.8	87.0	98.3
0.5	Y	6.7	14.9	26.8	46.0	78.4	95.5
	H	6.0	14.3	26.6	46.0	78.7	95.4
	A	6.0	14.2	26.4	46.0	78.7	95.6
3.0	Y	1.7	5.2	11.0	21.7	48.4	75.5
	H	2.8	6.8	13.2	24.6	50.7	75.7
	A	2.3	5.7	11.2	21.8	48.3	75.6
5.0	Y	0.6	2.8	6.4	13.8	34.6	61.1
	H	1.9	4.8	9.4	17.8	38.8	62.6
	A	1.3	3.3	6.8	14.0	34.5	61.0

3.0, 5.0 四种情况下, 不考虑涂抹作用时, $n = 15$ 的砂井 $z = l$ 处对应于不同 T_h 的径向固结度 U_r 。表中还列出了与本文理论接近的汉斯理论给出的结果。其中本文结果由式(20)计算, 吉国洋及汉斯结果均引自文献[3]表 1。

从表 1 可见, 本文解较汉斯解更接近严密解。这不仅说明本文理论较等应变条件下现有理论更精确, 同时也表明, 不论是无井阻固结还是有井阻固结, 等应变条件下给出的结果与自由应变条件下得到的结果是相近的。

应该指出, 吉国洋等人给出的严密解含有贝赛尔函数和双重无穷级数, 使用条件也很苛刻, 难以在工程应用中。为此, 我国学者王贻荪曾提出了自由应变条件下考虑井阻作用的折减井径法^[1]。

利用王贻荪法, 可将有井阻固结转化为理想井固结, 从而可利用现有理想井分析图表。这是该法的主要优点。但由于未曾给出 \bar{U}_r 显式, 不能在实际工程中用来求得逐渐加荷下较为精确的砂井地基平均固结度^[18]。

顺便指出, 王贻荪法是近似的。这主要因为在该法的推导过程中, 为通过竖向固结孔压 u_z 得到 $r = r_w$ 处与 z 无关的边界条件, 仅取了太沙基一维固结孔压解的首项作为 u_z ^[10], 这意味着定解条件 $u_z|_{t=0} = u_0$ 未得到满足。

王贻荪法的精度与笔者提出的近似式(29)相同, 两者给出的结果均较本文精确解保守(即给定时刻算得的 \bar{U}_r 较精确解给出的小, 见图 2)。在 $G \leq 0.5$ 或 $0.5 < G \leq 10$ 范围内且由式(29)算得 $\bar{U}_r \geq 65\%$, 它们与精确解(式(21))的相对误差小于 10%。

通过上述比较分析可知: 在等应变条件下, 对于无井阻固结, 现有理论与本文理论一致; 对于有井阻固结, 巴隆理论是不合理的, 汉斯理论是近似的, 其结果与本文尚接近。王贻荪法与本文的近似式(29)精度相同, 在一定范围内可用。本文理论与自由应变条件下的严密解十分接近。

四、本文理论的应用

现有能考虑井阻作用的砂井地基设计曲线很少, 而井阻作用对砂井地基固结的影响是较大的^[18]。为能在工程中较方便地进行考虑井阻作用的砂井地基设计, 笔者为本文理论编制了

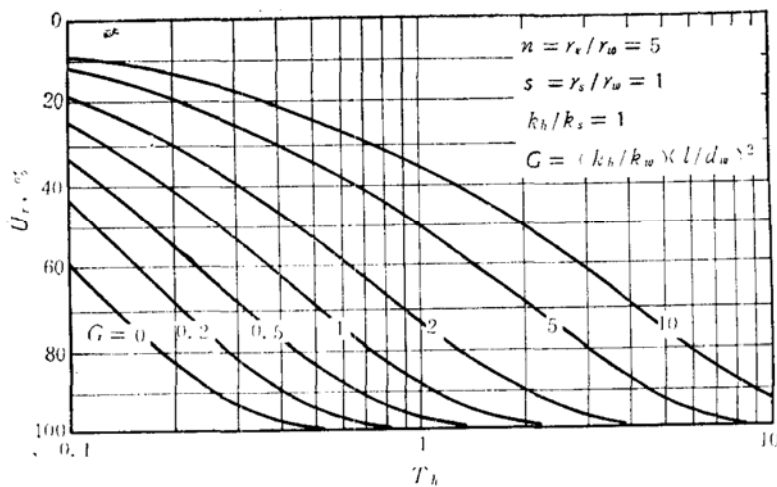


图 4 \bar{U}_r-T_h 曲线 ($n = 5$, 无涂抹)

可用于IBM-PC微机的计算和绘图软件，绘制了大量曲线。这里给出的曲线均系在微机绘制的底图上描就的。

图4—8为按式(21)计算绘制的平均径向固结度 \bar{U}_r -径向固结时间因子 T_h 曲线，可用于

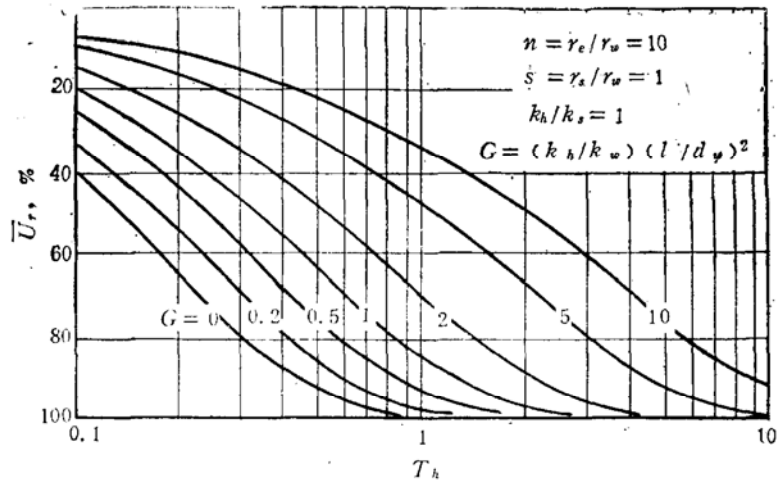


图5 \bar{U}_r - T_h 曲线($n=10$, 无涂抹)

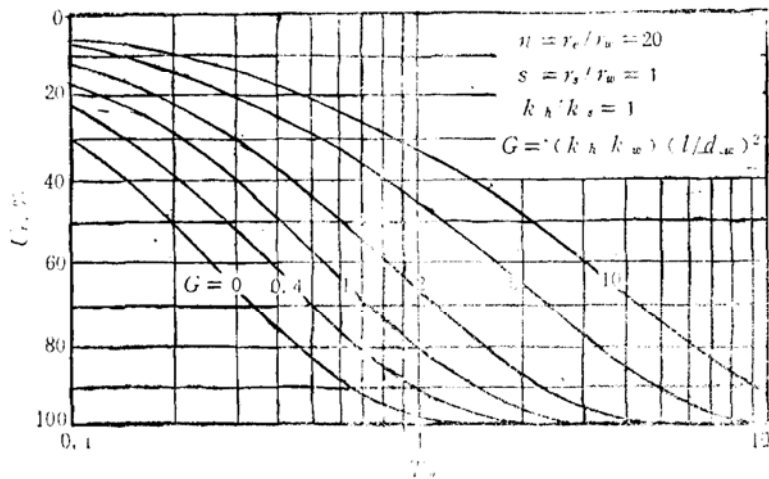


图6 \bar{U}_r - T_h 曲线($n=20$, 无涂抹)

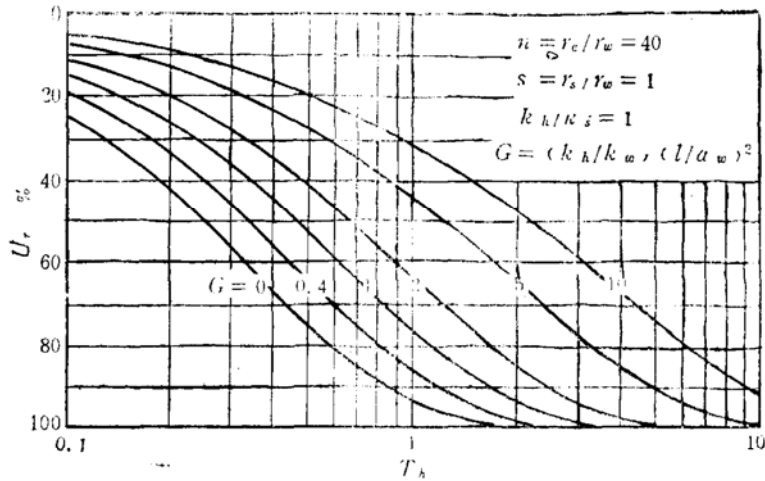


图7 \bar{U}_r - T_h 曲线($n=40$, 无涂抹)

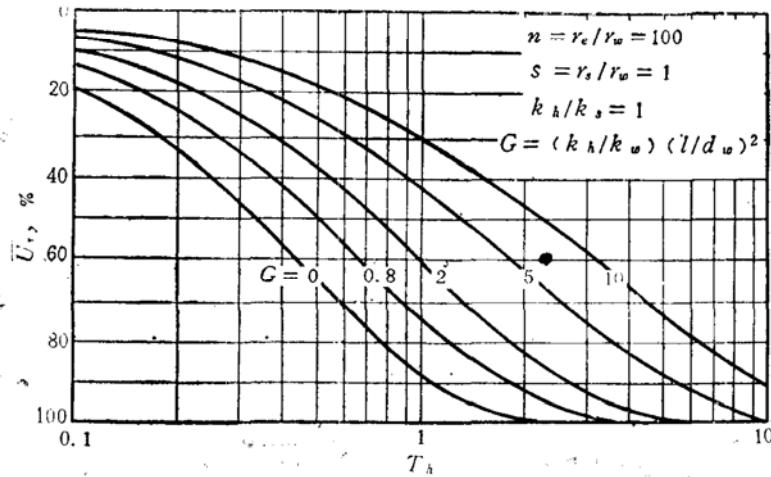


图8 \bar{U}_r-T_h 曲线($n=100$, 无涂抹)

不考虑涂抹作用且 $G \leq 10$ 的情况。

对于涂抹作用, 用放大井径比(即折减砂井直径)的方法^[10]予以考虑。即将井径比为 n , 需考虑涂抹作用(即 $s \neq 1, k_h/k_s \neq 1$)的原砂井转化为井径比为 n' ($n' > n$) 无涂抹作用的砂井(图9)。

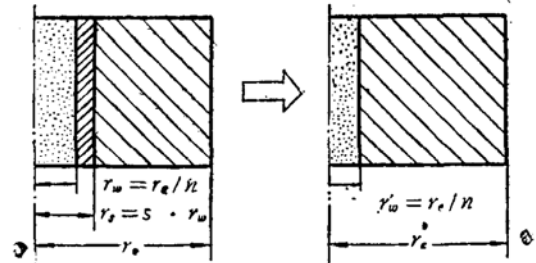


图9 有涂抹砂井与无涂抹砂井的转化

由本文理论, n' 与 $n, s, \frac{k_h}{k_s}$ 的关系为

$$\left(\ln n' - \frac{3}{4} \right) \frac{n'^2}{n'^2 - 1} + \frac{1}{n'^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{4n'^2} \right) - F_a = 0 \quad (44)$$

应用牛顿法, 并籍助于微机, 即可从此式由不同的 $n, s, \frac{k_h}{k_s}$ 求得相应的 n' , 绘制得

有关曲线。图10为常见范围内的 $n'-n, s, \frac{k_h}{k_s}$ 关系曲线, 可用于上述转化。

一旦转化完成后, 可利用图4—8进行分析或设计。

现举一简例说明图4—8, 图10的用法。

〔例〕设某砂井地基初步选定的砂井参数为: $n = 10, d_w = 30\text{cm}, l = H = 15\text{m}$ 。若

$\frac{k_h}{k_w} = 10^{-4}, s = 1.2, \frac{k_h}{k_s} = 5, c_h = 2c_v = 2 \times 10^{-3}\text{cm}^2/\text{s}$, 问能否满足 $\bar{U}_r |_{t=365} \geq 85\%$ 的

设计要求?

〔解〕由已知条件可得: $T_v = 0.014, T_h = 0.701, G = 0.25$ 。

则由 $T_v = 0.014$ 查太沙基曲线得 $\bar{U}_v = 13\%$ 。

由 $n = 10, s = 1.2, \frac{k_h}{k_s} = 5$, 查图10得: $n' = 20$ 。

由 $n = 20$ (即 n'), $G = 0.25, T_h = 0.701$, 查图6得 $\bar{U}_r = 85\%$ 。

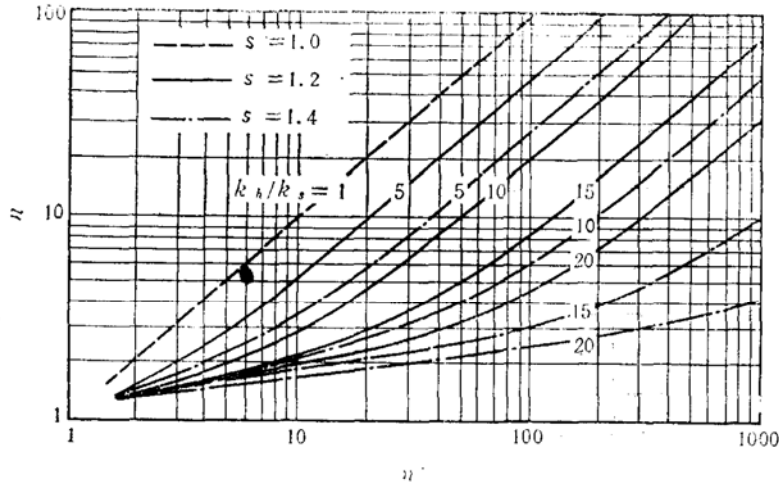


图10 $n, s, k_h/k_z$ (有涂抹)- n' (无涂抹)关系曲线

故 $t = 365$ 天时, 地基平均径向竖向组合固结度

$$\bar{U}_{r_z} = 1 - (1 - \bar{U}_z)(1 - \bar{U}_r) = 87\%$$

即选用的砂井参数满足设计要求。

另外, 如将本题作为有井阻无涂抹问题考虑, 则查图 5 得 $\bar{U}_r = 92\%$; 作为无井阻问题考虑, 则由图 10 及图 6 可得 $\bar{U}_r = 91\%$; 同样可由图 5 得到作为理想井问题 ($G = 0$) 考虑时的平均径向固结度 $\bar{U}_r = 97\%$ 。

因此, 本文曲线在实际工程中的应用是较为方便的。

五、结 论

等应变条件下现有砂井固结解析理论是不完善的。这主要表现在考虑井阻作用时, 巴隆理论不但不满足径向固结基本方程, 且其结果不合理; 而汉斯理论是近似的。本文建立的理论克服了上述不足, 给出的结果与自由应变条件下严密解相近, 且便于应用, 故是等应变条件下较为完善的砂井固结解析理论。

本文提供的曲线能较方便地用于考虑井阻作用和涂抹作用的砂井地基设计, 从而能使砂井工程的设计既更为合理又简便可行。

参 考 文 献

- [1] Barron, R.A., Consolidation of Fine Grained Soils by Drain Wells, Trans. ASCE, Vol. 113, 1948, pp. 718—742.
- [2] Carrillo, N., Simple Two and Three Dimensional Cases in the Theory of Consolidation of Soils, J. Math. Phys., Vol. 21, 1942, pp. 1—5.
- [3] Hansbo, S., Consolidation of Fine-grained Soils by Prefabricated Drains, Proc. 10th ICSMFE, (3), 1981, pp. 677—682, Stockholm.
- [4] Yoshikuni, H. (吉国洋), Nakanodo, H. (中ノ堂裕文), Consolidation of Soils by Vertical Drain Wells with Finite Permeability, 土質工学会論文報告集, (Soils and Foundations), Vol. 14, No. 2, 1974, pp. 35—46.

- [5] 浙江省水利电力局, 浙江大学土木工程系, 利用砂井处理土坝的软粘土地基, 浙江大学学报, 1975年第1期, 第119—135页。
- [6] 曾国熙、王铁儒、顾尧章, 砂井地基的若干问题, 岩土工程学报, 第3卷, 第3期, 1981年, 第74—81页。
- [7] Zeng, G. X., Xie, K. H., Shi, Z. Y., Consolidation Analysis of Sand-drained Ground by F. E. M., Proc. 8th Asian Regional Conf., Int. Society for Soil Mechanics and Foundation Engg, Vol. 1, 1987, pp. 139—142.
- [8] 曾国熙、谢康和, 井阻作用对砂井地基固结的影响, 第一届全国地基处理学术讨论会论文, 1986年, 上海。
- [9] 王贻荪, 考虑砂井阻力的折减井径法, 岩土工程学报, 第4卷, 第3期, 1982年, 第43—52页。
- [10] Richart, Jr. F.E., A Review of the Theories for Sand Drains, Proc. ASCE, Vol. 83, No. SM3, 1957, pp. 1—38.
- [11] Johnson, Stanley J., Foundation Precompression with Vertical Sand Drains, JSMFD, ASCE, Vol. 96, No. SM1, 1970. pp. 145—175.

Consolidation Theories for Drain Wells under Equal Strain Condition

Xie Kanghe, Zeng Guoxi

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

A new solution for the consolidation of soils with penetrating drain wells under the condition of equal vertical strain is presented and the effectiveness of existing analytical theories for drain wells under the same condition is investigated theoretically in this paper. It is found that, due to improper mathematical treatments, Barron's classical theory concerning well resistance is unable to give reasonable result while Hansbo's is an approximate one. The new one developed by the authors is theoretically more rigorous and the result is more close to that obtained from the rigorous but much more complicated solution developed by Yoshikuni et al. for free vertical strain condition. A sets of curves plotted based on the new solution are then given which can be used conveniently in practice for drain wells problems to take account of the effect of smear and well resistance on the rate of consolidation.