

堤坝饱和-非饱和渗流的数值分析*

高 骥

雷光耀

张锁春

(黄河水利委员会水利科学研究所, 郑州)

(中国科学院应用数学研究所, 北京)

提 要

本文介绍了堤坝渗流分析的一种新方法——饱和-非饱和渗流的数值分析。本方法是根据饱和-非饱和渗流规律建立的数学模型, 将堤坝内饱和区与非饱和区耦合在一起, 构成整体的分析模型。应用有限差分法编出程序, 上机计算。计算与试验对比表明, 无论是上游水位骤升还是突降, 两者基本上一致。自由水面线、等水头线以及等压线的分布情况都是合理的, 具有良好的规律性。

一、前 言

堤坝工程中渗流计算是一个很重要的课题。以往的渗流计算, 一般是以自由水面为边界, 在饱和区域内进行求解。但是, 由于土的基质势和重力势的作用, 产生非饱和流动, 自由水面边界不能真实地反映堤坝的渗流状态^[1]。所以上述方法不能有效地解决水位上升和降雨等引起的不稳定渗流问题。

对于洪峰来猛去速的河流, 一般呈现暴涨暴落的特点。此种洪水产生的渗流动态, 可能造成工程失事。因此, 不稳定渗流的计算研究, 具有重要的意义。

本文研究内容主要是根据饱和-非饱和渗流规律建立的数学模型, 将堤坝内饱和区与非饱和区耦合在一起, 构成整体的分析模型。然后应用有限差分法编出程序, 上机计算。同时, 用模型试验资料进行验证, 论述分析方法的可靠性和精度。

二、饱和-非饱和渗流分析的数学原理

(一) 饱和-非饱和渗流的数学模型

堤坝土体的饱和状态, 根据土的孔隙中含水的相对比例可划分成饱和区与非饱和区。自由水面(浸润线)以下的土体处于饱和状态(遗留的气体是以孤立气泡形式存在于孔隙水中)。液体的运动现象属于饱和渗流。而自由水面以上的土体则是处于非饱和状态。非饱和土是由固体骨架、孔隙水和气体三相所组成。当液体运动时, 气体在孔隙内呈停滞状态。这种流动属于非饱和流动, 也是两种不溶混流体同时流动的特殊情况^[2]。由于土粒与水分子之间的相

*本成果是水利电力部水利水电科学基金资助项目, 参加部分工作的有王笑冰和李成等。

互吸力以及水的表面张力产生毛细现象, 故在自由水面以上还存在一个饱和带, 带内液体发生流动, 且流线从不同方向穿越自由水面^[2,3,4]。上述两个区域的渗透水流就是饱和-非饱和渗流。

由于自由水面以下的压强大于一个大气压, 自由水面以上的压强小于一个大气压, 若取大气压为基准面, 则有

$$H = h + z \quad (1)$$

在饱和区, 上式 H 为饱和流全水头; h 为渗透压力水头。而在非饱和区, 则 H 为非饱和流全水头; h 为毛细管压力水头(负值); z 为某一点的垂直坐标。

从土体中取一微小的平行六面体, 根据质量守恒定律可得连续方程为

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \theta) \quad (2)$$

式中 ρ 为水的密度; v_x, v_y, v_z 分别表示 x, y, z 方向的流速; θ 为体积含水量。

按达西定律

$$\vec{v} = -k(\theta) \text{grad} H \quad (3)$$

式中

$$k(\theta) \begin{cases} = k_s & \text{(饱和区)} \\ = k(S_w) & 0 \leq S_w \leq 1, \quad \text{(非饱和区)} \end{cases}$$

上式中 k_s 为饱和渗透系数, $k(S_w)$ 为非饱和渗透系数, S_w 为饱和度。现将式(3)转换为流速分量, 并代入式(2), 得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho k(\theta) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho k(\theta) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho k(\theta) \frac{\partial H}{\partial z} \right] \\ & = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \theta) \end{aligned} \quad (4)$$

由于体积含水量 θ 与毛细管压力 h 成函数关系, 而毛细管压力又是坐标和时间的函数, 故式(4)右端项为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \theta) = \frac{\partial}{\partial h}(\rho \theta) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5)$$

然而体积含水量 θ 与土的孔隙率 n 、饱和度 S_w 有以下关系

$$\theta = n S_w \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)后, 由乘积求导得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \theta) = \left(\rho n \frac{\partial S_w}{\partial h} + \rho S_w \frac{\partial n}{\partial h} + n S_w \frac{\partial \rho}{\partial h} \right) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7)$$

现在把(4)式中两个独立变量化成只含一个“独立”变量 h 的方程。并且认为水的压缩性很小, 可以忽略不计。于是式(7)可以写成

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \left(n \frac{dS_w}{dh} + S_w \frac{dn}{dh} \right) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (8)$$

令 $\lambda = S_w$, $S_s = \frac{dn}{dh}$, $c'(h) = \frac{dS_w}{dh}$, 因此, 式(4)最终变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[k(h) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(h) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(h) \frac{\partial H}{\partial z} \right] \\ = [nc'(h) + \lambda S_s] \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \quad (9)$$

对二维流问题, 则上式简化为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(h) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(h) \frac{\partial H}{\partial z} \right] = [nc'(h) + \lambda S_s] \frac{\partial H}{\partial t} \quad (10)$$

式中 S_s 为贮水率。式(9)和(10)就是饱和-非饱和渗流的基本方程。

数值分析时, 需确定土的参数 $k(h)$, $h(\theta)$, $c'(h)$ 值。鉴于目前试验难以测定非饱和土的体变, 故本文计算时, 将 n 近似地视为常量, 即式(10)中右边 $nc'(h)$ 项用 $c(h) = \frac{d\theta}{dh}$ 近似代替。今将堤坝(图1)二维不稳定流问题列出定解条件如下:

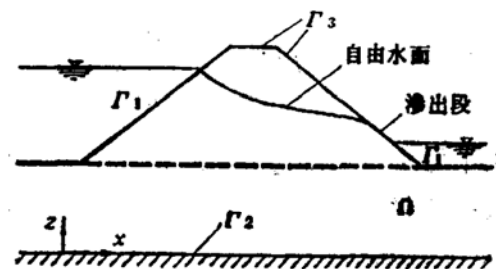


图1 堤坝工程边界条件

$$\text{初始条件} \quad H(x, z, 0) = H_0(x, z) \quad (11)$$

$$\text{边界条件} \quad H(x, z, t) = H_b(x, z, t) \quad \text{在} \Gamma_1 \text{上}, t \geq 0 \quad (12)$$

$$H(x, z, t) = z \quad \text{在渗出段上}, t \geq 0 \quad (13)$$

$$k_s \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n_0, x) + k_s \frac{\partial H}{\partial z} \cos(n_0, z) = 0 \quad \text{在} \Gamma_2 \text{上} \quad (14)$$

式中 n_0 为边界的外法线方向; (n_0, x) , (n_0, z) 是外法线方向 n_0 分别与 x , z 轴的夹角。若地面蒸发强度和降雨强度均已知, 且地面供水强度未超过入渗强度, 则大气边界条件为

$$\begin{aligned} k(h) \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n_0, x) + k(h) \frac{\partial H}{\partial z} \cos(n_0, z) \\ = E - I \end{aligned} \quad \text{在} \Gamma_3 \text{上} \quad (15)$$

式中 E 为单位时间内在单位面积土上蒸散发的水量; I 为单位时间内单位面积土的降雨

量。

上述方程(10)–(15)合起来, 便构成饱和-非饱和渗流的数学模型。

(二)有限差分法的计算公式

由于饱和-非饱和渗流的数学模型是由高度非线性的方程描述的, 必须依靠数值方法才能求解。因此, 本文采用有限差分法进行数值计算。

今设时间步长 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$), Δx 和 Δz 分别为 x, z 方向的步长, s 为迭代次数, 记向前差商为 Δx 及 Δz , 向后差商为 $\Delta \bar{x}$ 及 $\Delta \bar{z}$ 。于是相应式(10)的差分格式为

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}(2s)} \frac{h_{i,j}^{n+1(2s+1)} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + A_s \left[h_{i,j}^{n+1(2s+1)} - h_{i,j}^{n+1(2s)} \right] \\ = \Delta x \left[k_{i-\frac{1}{2},j} \Delta \bar{x} h_{i,j}^{n+1} \right]^{(2s+1)} + \Delta z \left[k_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta \bar{z} H_{i,j}^{n+1} \right]^{(2s)} \\ (i = 1, 2, \dots, i_0) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}(2s+1)} \frac{h_{i,j}^{n+1(2s+2)} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + A_s \left[h_{i,j}^{n+1(2s+2)} - h_{i,j}^{n+1(2s+1)} \right] \\ = \Delta x \left[k_{i-\frac{1}{2},j} \Delta \bar{x} h_{i,j}^{n+1} \right]^{(2s+1)} + \Delta z \left[k_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta \bar{z} H_{i,j}^{n+1} \right]^{(2s+2)} \\ (j = 1, 2, \dots, j_0) \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = [nc'(h) + \lambda s_s]_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (18)$$

$$A_s = a \times 0.15 \text{ MOD}(36-s, 4) \quad (19)$$

式中 I_0, J_0 分别是 x, z 方向网格心点最大数, $\text{MOD}(36-s, 4)$ 为 $(36-s)$ 除以 4 的余数。

在计算域内, 对所有网格中心点都列出差分方程(16)和(17), 以形成 x, z 方向的代数方程组。由于两个方向都是解三对角线的方程组, 故用应追赶法解算即得到问题的解。计算中交替使用方程(16)和(17), 直到相邻二次迭代结果之差的绝对值, 在各计算点上满足精度要求时便终止迭代。经计算比较, 由式(16)或式(17)开始计算, 结果不受影响。本文是从式(16)开始计算的。

三、数值分析中几个问题的处理

(一) 时间步长的自动选择

时间步长是数值分析中关键问题之一。本文计算中给出迭代次数的上下限, 超过上限则 Δt 除以 2; 在上下限之间则 Δt 不变。再给出每个 Δt 内压力水头增量的上下限, 超过上限则 Δt 除以 2, 若在上下限之间则 Δt 不变。当迭代次数小于其下限且压力水头增量小于其下限时, 将 Δt 乘以 1.5。如果 Δt 除以 2, 将原结果废弃, 用缩小后的 Δt 重新计算。有关的上下限值由数值试验确定。考虑到水位升降期, 水头变化急剧, 在计算的不同阶段, 尚需确定 Δt 的上下限, 以免 Δt 过小或过大。文中矩形均质土坝模型的计算全过程约需 110 时间步长, 初始步长为 1s, 最大步长为 200s。土坝上游坝壳三角形断面模型, 计算全过程约需 150 时间步长, 初始步长为 0.25d, 最大步长为 1.5d。

(二) 附加项的作用及系数的选取

计算式中引入形为式(19)的附加项, 其主要作用是使差分方程的特性产生变化。如在平衡态初值的情况下, 交替方向计算时, 饱和区不会出现求解 $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$ 和 $\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$ 两个方程, 因而避免了 h 值产生线性分布的情形。同时, 附加项的引入, 使代数方程组的系数矩阵具有严格的对角优势, 从而加速迭代收敛。

通过计算分析, 式(19)中系数 α 是采用不同数值, 矩形均质土坝模型 $\alpha = 0.33$, 土坝上游坝壳部分的三角形断面 $\alpha = 10^{-7}$ 。 α 值的选取, 目前尚无严格的方法, 有待进一步研究。

A_s 取值的方式对迭代收敛速度有关。经计算比较, 若 A_s 递减取值, 则在 A_s 的一个循环中, h 值在迭代中的增量逐渐增大。由此可知 A_s 按递增方式取值, 能提前完成迭代。我们通过两个模型的计算, 分别采用不同的误差限。在初期水位急剧变化期间, 迭代次数为 8—20 次; 在计算中、后期, 绝大部分迭代次数在 4 次以内。

引入附加项式(19), 改善了数值计算过程, 在一定的迭代精度下, 不会影响计算结果, 如土坝上游坝壳部分的三角形断面的计算, 当迭代绝对误差为 0.03cm 时, 一般迭代 4 次即结束。与方程(16)或(17)无附加项时等号两端的差值相比, 此时附加项的值大都很小。在 $MOD(36-s, 4) \neq 0$ 时, 附加项的值要比这个值小 10—100 倍。若将绝对误差限缩小 6 倍, 则在 $MOD(36-s, 4) = 0$ 时, 附加项的值比上述差值普遍小 1—2 个量级。由于迭代精度提高了, 迭代次数也相应增加到 8 次。但是零压力线位置在第 30d 时多下降 5—20cm。在第 100d 时多下降 30—80cm。显然这种差别是很小的。由此说明, 采用 0.03cm 的迭代精度能满足要求。又如在矩形均质土坝模型的计算中, 采用 0.001cm 的迭代误差限, 迭代一般在 4 次以内, 附加项的值比上述差值大体上小一个量级。

(三) 计算参数的处理

由文献[3]得知, 计算压力水头值有时会在正确值附近振荡, 使迭代无法达到精度要求。本文计算经验表明, 数值解的振荡在某些情形下与计算参数的处理有关。由于 $k(\theta)$ 值是实验数据, 并以数表形式给出。而 $c(h)$ 由 $h-\theta$ 关系线的斜率求出, 当 $h-\theta$ 关系线是折线时,

则 $c(h)$ 为阶梯形函数。因而在跳跃点附近的迭代计算会产生振荡现象, 即偶次迭代与奇次迭代求解的方程不同, 其结果分别收敛于不同的极限值。因此, 本文对计算参数都采用按 h 值线性插值方式, 有效地避免了上述振荡现象。

四、计算成果的比较分析

为了说明上述方法的正确性, 本文用矩形均质土坝和土坝上游坝壳部分作为算例。计算条件及计算成果分述如下:

(一) 矩形均质土坝模型

长315cm, 宽23cm, 高33cm。模型材料为均匀砂, 孔隙率 $n = 0.44$, 贮水率 $S_s = 0$, 饱和渗透系数 $k_s = 0.33\text{cm/s}$ 。非饱和砂土的持水曲线和相对渗透系数曲线如图2所示。初始条件因缺非饱和区初始的 h 分布, 故采用上下游水位均为10cm的平衡态, 当时间 $t > 0$ 以后, 上游水位骤升至30cm。计算域内按矩形网格划分。该模型是赤井浩一等作者的砂槽模型, 上述计算条件及参数均与砂槽模型试验相同^[6]。计算成果及试验比较示于图3—6。

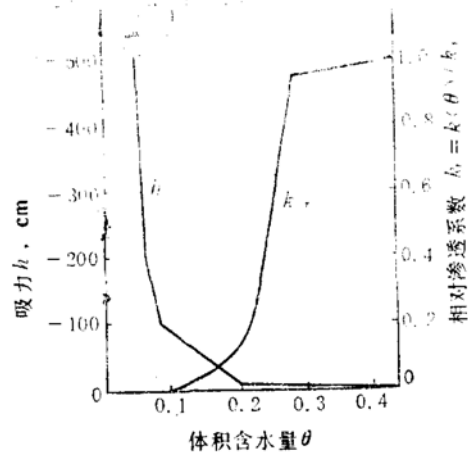


图2 均质土坝模型非饱和土的特性曲线

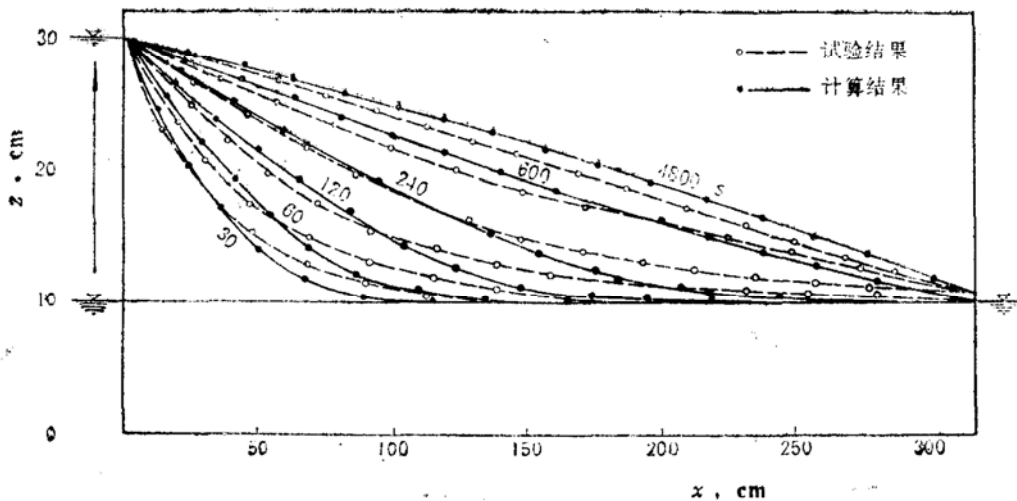


图3 自由水面数值解与砂模型试验比较

(二) 土坝上游坝壳部分的三角形断面

高2800cm, 底宽8000cm, 右边为直立式不透水心墙。坝壳土的孔隙率 $n = 0.32$, 贮水率 $S_s = 0$, 饱和渗透系数 $k_s = 4 \times 10^{-4}\text{cm/s}$, 非饱和土的持水曲线与相对渗透系数曲线见图7。初始条件是上游水位1600cm的稳定态, 在一天内, 水位由1600cm骤降到70cm, 详见图

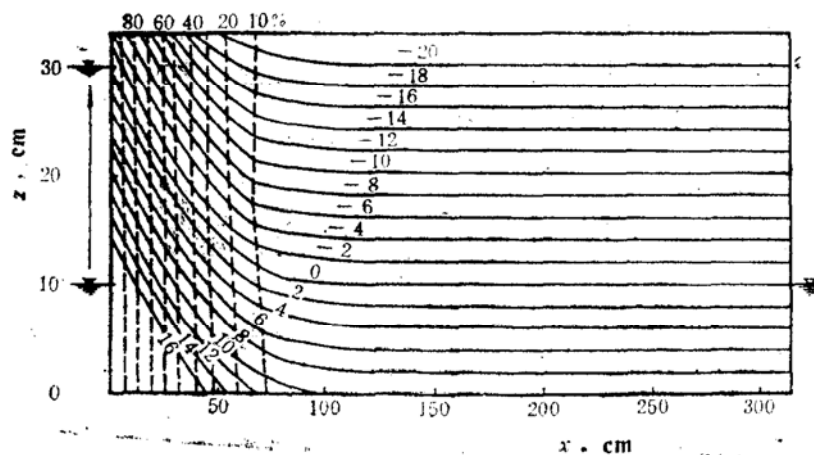
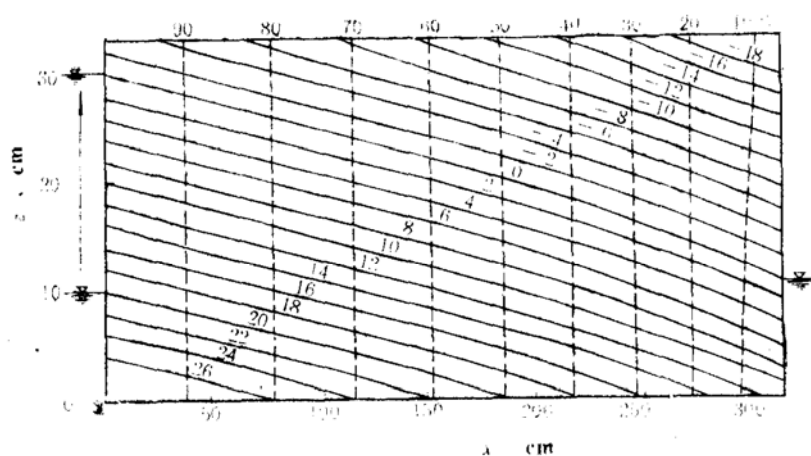
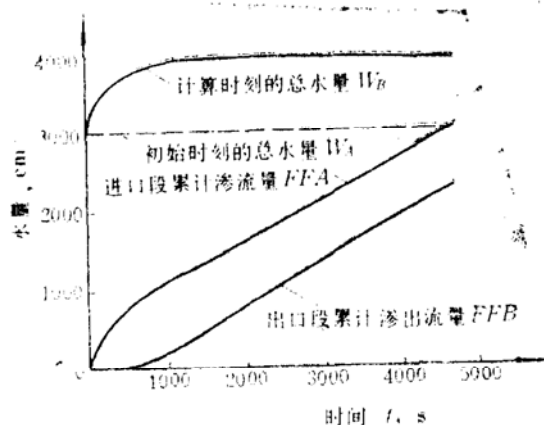
图4 时间 $t = 30s$ 的等压线及等水头线分布图5 时间 $t = 4800s$ 的等压线及等水头线分布

图6 坝内水量随时间的变化

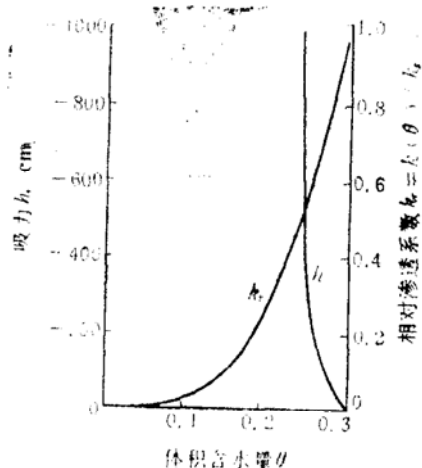


图7 坝壳三角形断面非饱和土的特性曲线

8中所附的过程线。计算域剖分为矩形网络, 为了便于计算, 斜边上三角形网格用矩形网格近似代替, 同时对左下和右上三角形亦作了近似处理。此算例与驹田广也等作者的粘滞模型试验条件相同^[6,7]。计算成果与试验比较绘成图8—11。

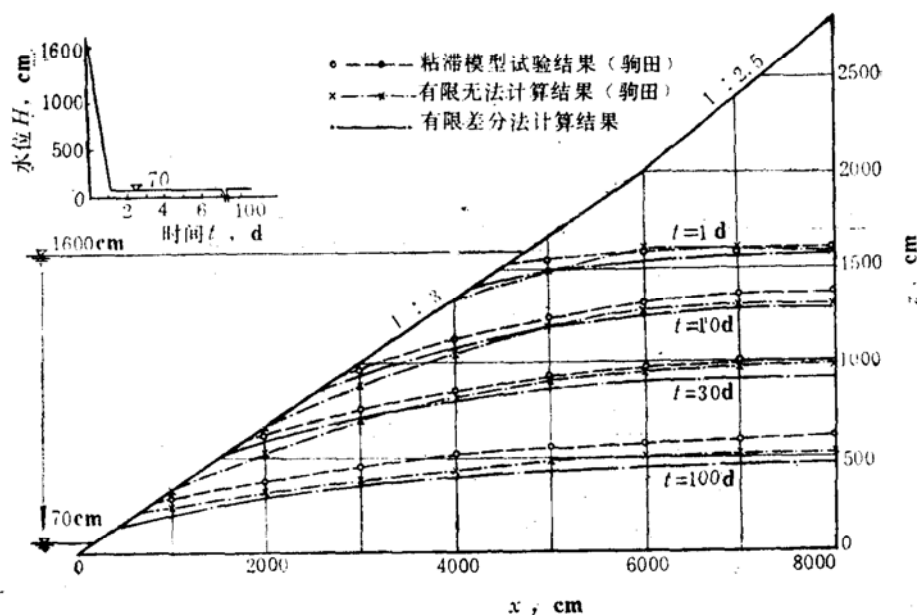
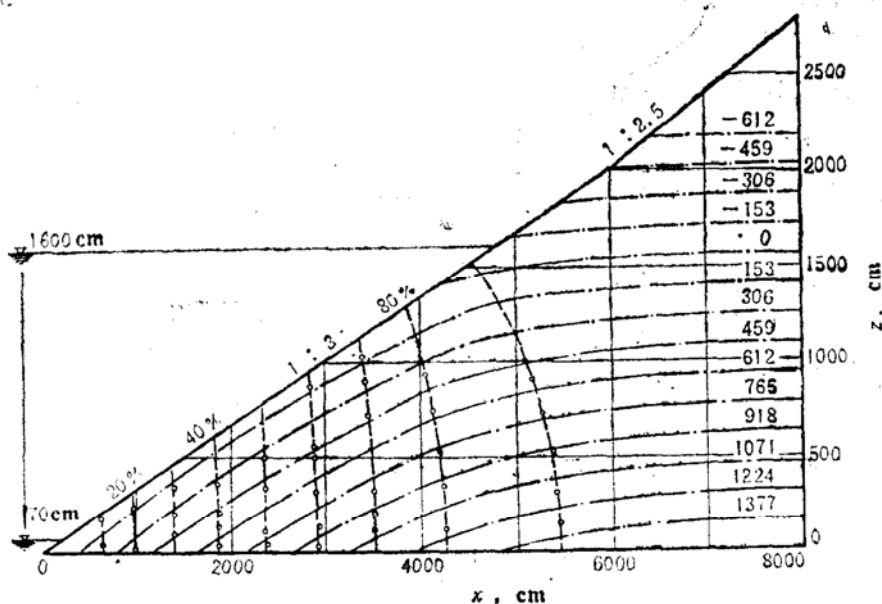
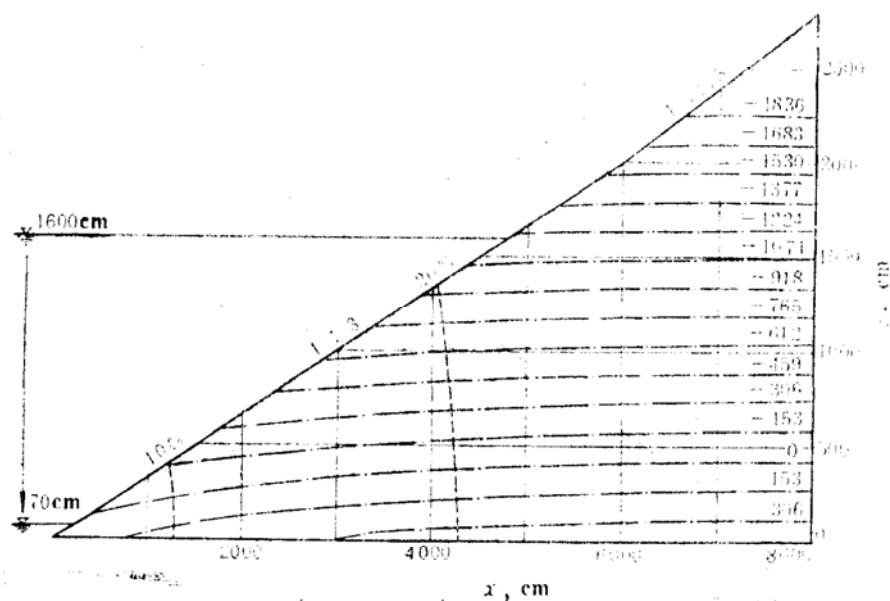


图8 自由水面数值解与粘滞模型试验比较

图9 时间 $t=1d$ 的等压线及等水头线分布

由图3和图8得知,自由水面(即零压力线)上压力水头 $h=0$,全水头 H 与位置高程 z 是相等的。上游水位骤升时,自由水面形状呈凹形曲线,而水位骤降时,则自由水面形状呈凸形曲线。两个模型自由水面的数值解与试验结果基本上一致。水面线的发展变化趋势都反映出正常的规律性。

在第一个模型的水位上升阶段(图4),靠近入渗面一带,等水头线密集,等压线弯曲,说明这一带的水流变化急剧。但当时间 t 到达3000s以后,坝体内的总水量 W_B 几乎没有什么变化,流量为一常值(图6)。此时流场内等水头线的分布比较均匀,等压线也不弯曲,呈平行的直线族(图5)。从而说明水流已处在平稳状态。

图10 时间 $t=100d$ 的等压线及等水头线分布

在第二个模型的水位骤降阶段,靠近上游坡脚一带,等水头线密集,等压线弯曲(图9),说明坝内水头压力急剧变化。由图11可知,30天以内的水量变化较大,而30天以后的水量变化就不大了,说明坝内排水量减少,并逐渐趋近于稳定状态。

计算过程中,用水量平衡法来检查数值分析的精度,即按下述计算值表示计算产生的相对误差: (初始总水量 + 边界的渗入与渗出累计流量 - 计算时刻总水量) / (计算时刻总水量)

分析结果,误差为1.5—4.2%,说明分析精度是高的。

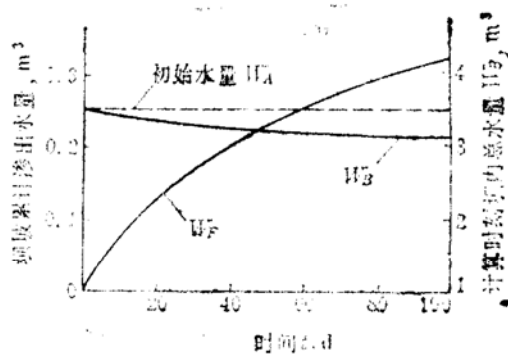


图11 坝内水量随时间的变化

五、结 语

本文根据数学模型以及数值分析研究,获得以下成果:

1. 两个模型各时刻的自由水面线的计算结果,与砂槽模型和粘滞模型试验结果基本一致。无论是上游水位上升还是下降,等水头线及等压线的分布都是合理的,具有良好的规律性。水量检查的相对误差为1.5—4.2%。说明饱和-非饱和渗流的数学模型,能正确地描述堤坝的渗流动态。

2. 通过两个模型的系统计算表明,本文采用的全隐式交替方向迭代法以及附加项的处理,应用于饱和-非饱和渗流的数值分析是可行的,计算精度也是高的。

3. 本文的研究成果表明,当上游水位骤升时,堤坝内自由水面向非饱和区推进,致使饱和区与非饱和区的范围不断变化,在毛细管压力和重力的作用下,非饱和区土的饱和度逐渐增大。反之,当上游水位骤降时,堤坝内自由水面不断下降,饱和区范围减小,非饱和区范

围增大, 致使土的饱和度逐渐减小。说明在不稳定流情况下, 饱和区与非饱和区的范围随时间变化, 两个区的水流互相联系、互相影响的。因此, 把两个区合起来研究堤坝工程的渗流动态, 比只在饱和区内作饱和渗流分析更接近实际。

4. 本文方法的特点是将堤坝的饱和区与非饱和区耦合在一起, 流场内不再有自由水面边界。零压力线就是自由水面。这样使得复杂的自由水面边界就变得容易处理了。所以本文方法对水位升降以及降雨等引起的不稳定渗流问题均可能进行分析。

参 考 文 献

- [1] C.S. 德赛等, 岩土工程数值方法, 中国建筑工业出版社, 1981年8月。
- [2] J. 贝尔, 多孔介质流体动力学, 中国建筑工业出版社, 1983年8月。
- [3] Freeze. R.A., Influence of the Unsaturated Flow Domain on Seepage Through Earth Dams, Water Res. Res., Vol. 7(4), 1971.
- [4] 吴世余, 毛管带对土坝渗流的影响, 安徽省水利科学研究所, 1980年2月。
- [5] 赤井浩一, 大西有三, 西垣诚, 有限要素法による饱和-不飽和的浸透流の解析, 土木学会 論文報告集, No. 264, 1977年。
- [6] 驹田广也, 饱和-非饱和土中的非定常浸透流解析, 电力中央研究所报告, No. 377015. 1978年。
- [7] 驹田广也等, 填筑坝在库水位急降时的不稳定渗流分析与稳定分析, 水利水运科技情报, 1978年增刊第3期。

Numerical Analysis on Seepage through the Saturated and Unsaturated Soils of Levees or Dams

Gao Ji

(Institute of Hydraulic Research YRCC, Zhengzhou)

Lei Guangyao Zhang Suochun

(Institute of Applied Mathematic, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

This article presents a new numerical method to analyze the seepage through the saturated/unsaturated soils of levees or dams. This method is based on the mathematical model established in terms of the seepage regulations of saturated and unsaturated soils and compiled by coupling the saturated zone with unsaturated zone as a whole. The model is computerized by means of finite-difference method. Under the drop down condition of the upstream water level, the calculated results compare fairly well to the test results.

The distribution of the seepage lines and isopotential line (isobaric lines) is reasonable and regular.