

# 高层框架与箱形基础的整体计算

## ——半解析半残数法

刘开国

(湖北工业建筑设计院, 武汉)

### 提 要

本文提出一个简便方法: 将地基视为弹性半空间体, 用解析法求出地基的刚度矩阵; 同时将框架连续化, 求出其等效刚度; 然后根据整体结构的微分方程, 用最小二乘配点法进行计算。文中分别研究了以下三种计算模型: ①不考虑框架刚度; ②只考虑框架的剪切刚度; ③同时考虑框架的剪切刚度和柱的轴向刚度。并附算例以资比较。

### 一、概 述

如何计算地基基础与上部结构的整体工作, 是一个有实际意义和带有方向性的课题。笔者曾提出过一些计算方法<sup>[1,2]</sup>, 本文在这些方法的基础上, 进一步提出半解析半残数法。此法将地基视为弹性半空间体, 用解析法求出地基的刚度矩阵; 并将框架连续化将箱基视为弹性地基梁, 进而导得弹性地基梁与高层框架整体工作的微分方程, 然后用最小二乘配点法进行计算。

最小二乘配点法是加权残数法的一种, 根据试函数满足微分方程及边界等情况可分为: ①内部法; ②边界法; ③混合法。本文分别采用了内部法和混合法, 对第三种计算模型采用的是分区混合法, 这是残数法的一个发展。

设有一边值问题待解, 其微分方程及边界条件为

$$Fw - f = 0 \quad (\text{区域}V\text{内}) \quad (1)$$

$$Gw - g = 0 \quad (\text{边界}S\text{上}) \quad (2)$$

式中  $w$  为待求的函数;  $F, G$  为算子;  $f, g$  为不含  $w$  的项。

设试函数为

$$\tilde{w}(d, x) \approx w(x) \quad (3)$$

式中  $x$  为所有的独立变量;  $d$  为待定参数矢量。

将式(3)代入式(1)、(2)得

$$\text{内部残数 } R_I(d, x) = F\tilde{w} - f \quad (V\text{内}) \quad (4)$$

$$\text{边界残数 } R_B(d, x) = G \tilde{w} - g \quad (S \text{ 上}) \quad (5)$$

我们在  $V$  域内及  $S$  边界上, 选择一系列的点  $x_i$  代入式(4)、(5), 则得加权残数方程组

$$\begin{pmatrix} R_1(d, x_1) \\ \vdots \\ R_l(d, x_m) \\ WR_B(d, x_{m+1}) \\ \vdots \\ WR_B(d, x_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \tilde{w}(d, x_1) - f(x_1) \\ \vdots \\ F \tilde{w}(d, x_m) - f(x_m) \\ W[G \tilde{w}(d, x_{m+1}) - g(x_{m+1})] \\ \vdots \\ W[G \tilde{w}(d, x_r) - g(x_r)] \end{pmatrix} \quad (6)$$

以矩阵表之

$$[R] = [A]_{r \times n} \{d\}_{n \times 1} - \{f\}_{r \times 1} \quad (7)$$

式中  $[A]$  为系数矩阵;  $\{d\}$  为参数矩阵;  $n$  为参数  $d$  的数目;  $r$  为内部和边界点的配点数, 且  $r > n$ ;  $W$  为边界权函数与内部权函数之比, 一般常取 1。

$$\text{令 } [I] = [R]^T [R] \quad (8)$$

根据最小二乘法, 应使  $[I]$  为最小, 故由

$$\frac{\partial [I]}{\partial \{d\}} = 0 \quad (9)$$

$$\text{导得 } [A]^T [A] \{d\} = [A]^T \{f\} \quad (10)$$

由式(10)可以解出  $d_i$ 。

以上可用 BASIC 语言编出程序, 用 PC-1500 微机计算。

## 二、地基刚度的解析解

在弹性半空间体表面上, 有一单位集中荷载作用于  $b \times c$  矩形平面的中点  $i$  上, 则在  $k$  点上产生的绝对沉降为

$$w_{ki} = \frac{1 - \mu_0^2}{c\pi E_0} F_n \quad (11)$$

式中  $E_0, \mu_0$  为地基的压缩模量及泊松比;  $F_n$  为沉降函数, 见文献[2]表 1。

将箱型基础视为弹性地基梁, 沿梁长分成十等段, 每段长为  $c$ , 各段上有均匀的地基反力, 即假定基础梁下的地基反力沿梁呈阶梯形分布。设各分段的地基反力为  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{10}$ , 地基在这些反力作用下, 各点均将产生沉降, 设各分段中点的沉降为  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_{10}$ , 其值可由文献[2]表 1 查出, 则任一分段  $k$  中点的沉降可表达为

$$w_k = \sum_{i=1}^{10} w_{ki} c p_i = \sum_{i=1}^{10} w_{ki} P_i \quad (12)$$

$$\{W\} = c[D]\{p\} = [D]\{P\} \quad (13)$$

式中  $[D]$  为地基的柔度矩阵, 且为  $10 \times 10$  阶对称矩阵;  $\{W\} = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_{10}\}^T$ ;

$$\{P\} = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{10}\}^T.$$

由式(13)求逆得

$$\{P\} = [D]^{-1}\{w\} = [K]\{w\} \quad (14)$$

式中  $[K]$  为地基的刚度矩阵, 且为  $10 \times 10$  阶对称矩阵。

### 三、三种计算模型

#### (一) 不考虑框架刚度

第一种计算模型为不考虑框架的整体作用, 将箱基按弹性地基梁计算。根据弹性地基梁的微分方程

$$EIw''''(x) + p(x) - q(x) = 0 \quad (15)$$

由梁两端自由的边界条件(见图1), 设试函数为

$$w = w_{a0} + \sum_{m=1}^n w_{am} \bar{\phi}_m(x) = [\bar{\phi}]\{w_a\} \quad (16)$$

$$[\bar{\phi}] = [1, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3, \dots]$$

$$\{w_a\} = \{w_{a0}, w_{a1}, w_{a2}, w_{a3}, \dots\}^T$$

式中  $\bar{\phi}_m(x) = \sin \lambda_m x + \text{sh} \lambda_m x - \alpha_m (\cos \lambda_m x + \text{ch} \lambda_m x)$

$$\bar{\phi}_1(x) = 3.0356 + \phi_1(x)$$

$$\bar{\phi}_2(x) = \phi_2(x)$$

$$\bar{\phi}_3(x) = 3.0000 + \phi_3(x)$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \lambda_m L - \text{sh} \lambda_m L}{\cos \lambda_m L - \text{ch} \lambda_m L}, \text{取值如下:}$$

$m$	1	2	3
$\lambda_m L$	4.7300	7.8532	10.996
$\alpha_m$	1.01781	0.999223	1.000034

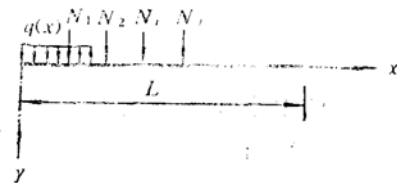


图1

将式(16)代入式(15)得内部残数

$$R_I = EIw''''(x) + p(x) - q(x) \quad (17)$$

我们在梁上选择10点, 其位置即梁上十等段的中点, 则得残数方程组

$$\begin{aligned}
 R_{I_1} &= EIw_1'''' + p_1 - q_1 \\
 R_{I_2} &= EIw_2'''' + p_2 - q_2 \\
 &\vdots \\
 R_{I_{10}} &= EIw_{10}'''' + p_{10} - q_{10}
 \end{aligned} \tag{18}$$

写成矩阵

$$[R] = [A]\{w_a\} - \{q\} \tag{19}$$

因  $\{w\} = [B]\{w_a\}$  (20)

则  $\{p\} = \frac{1}{c}[K][B]\{w_a\} = [L]\{w_a\}$  (21)

$$[B] = \begin{bmatrix}
 1 & 1.472726 & -1.214950 & 2.092755 \\
 1 & 2.400480 & 0.234821 & 3.883181 \\
 1 & 3.237506 & 1.168588 & 4.242279 \\
 1 & 3.878802 & 1.248071 & 3.088667 \\
 1 & 4.227840 & 0.525070 & 1.784543 \\
 1 & 4.227840 & -0.525070 & 1.784543 \\
 1 & 3.878802 & -1.248071 & 3.088667 \\
 1 & 3.237506 & -1.168588 & 4.242279 \\
 1 & 2.400480 & -0.234821 & 3.883181 \\
 1 & 1.472726 & 1.214950 & 2.092755
 \end{bmatrix}$$

$$\{w''''\} = [H]\{w_a\} \tag{22}$$

故  $[A] = EI[H] + [L]$  (23)

$$[H] = \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix}
 0 & -1.562874 & -1.214950 & -0.907245 \\
 0 & -0.635120 & 0.234821 & 0.883181 \\
 0 & 0.201906 & 1.168588 & 1.242279 \\
 0 & 0.843202 & 1.248071 & 0.088667 \\
 0 & 1.192240 & 0.525070 & -1.215457
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 0 \\
 (4.7300)^4 \\
 (7.8532)^4 \\
 (10.996)^4
 \end{bmatrix}$$

([H]只写出一半, 另一半的第3列为反对称, 其他列为对称)

参照式(10)可以写出

$$[A]^T[A]\{W_a\} - [A]^T\{q\} = 0 \tag{24}$$

由此可解出 $\{w_a\}$ , 进而由下式计算弹性地基梁(箱基)的弯矩

$$M_b = -EIw'' \tag{25}$$

现举一例, 说明其应用(见图2)。

[例1]  $L = 90\text{m}$ ,  $b = 30\text{m}$ 的谷仓胴体结构基础。地基的  $E_0 = 2 \times 10^5 \text{kPa}$ ,  $\mu_0 = 0.3$ 。

梁的  $I = 3200\text{m}^4$ ,  $E = 2.1 \times 10^7 \text{kPa}$ 。

将图2中的荷载分解在选点位置上, 即  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $q_3 = \frac{10}{9} \left( \frac{6.5}{9} \right) = \frac{65}{81}$ ,

$$q_4 = \frac{10}{9} \left( \frac{5.5}{9} + \frac{2.5}{9} \right) = \frac{80}{81}, \quad q_5 = \frac{10}{9} \left( \frac{1}{2} + \frac{3.5}{9} \right) = \frac{80}{81}.$$

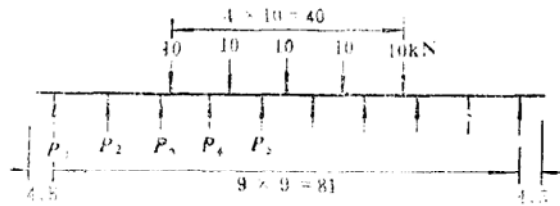


图 2

$$\text{求得} \quad \begin{pmatrix} w_{a0} \\ w_{a1} \\ w_{a3} \end{pmatrix} = 10^{-6} \begin{pmatrix} 2.287555 \\ 0.648970 \\ 0.001809 \end{pmatrix} \quad (\text{m})$$

$$\text{及} \quad M_{0.1L} = 24.60806 \quad (17.4)$$

$$M_{0.2L} = 78.74368 \quad (70.6)$$

$$M_{0.3L} = 136.06794 \quad (143.6)$$

$$M_{0.4L} = 177.46514 \quad (184.2)$$

$$M_{0.5L} = 192.33431 \quad (198.2)$$

括号内的弯矩值系由日莫契金求得的近似值，弯矩单位为  $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

## (二) 只考虑框架的剪切刚度

第二种计算模型只考虑了框架的剪切刚度。认为框架在竖向荷载作用下，其竖向变形从整体来看是以剪切变形为主；和文献[1]一样，本节将框架连续化，求得框架总的剪切刚度为  $(GF + 6K_{c1}/s)$ 。其中  $GF$  为框架的剪切刚度，可由文献[1]的式(2)求出；而  $6K_{c1}/s$  为柱脚的刚度 ( $K_{c1}$ ) 对箱基的约束作用所引起的等效剪切刚度； $s$  为柱的间距。则考虑框架剪切刚度的弹性地基梁的微分方程为

$$\frac{1}{\beta} w'''' - \left( GF + \frac{6K_{c1}}{s} \right) w'' + p(x) - q(x) = 0 \quad (26)$$

由于箱基的剪切刚度很大，可取

$$\frac{1}{\beta} = \left[ 1 + \frac{K(GF)}{(GF)J} \right] EI \approx EI$$

$$\text{则} \quad EI w'''' - \left( GF + \frac{6K_{c1}}{s} \right) w'' + p(x) - q(x) = 0 \quad (27)$$

将式(16)代入式(27)，得

$$\text{内部残数 } R_I = EIw'''' - \left( GF + \frac{6K_{c1}}{s} \right) w'' + p(x) - q(x)$$

$$\text{边界残数 } R_{BO} = GFw_{(0)'}'$$

$$R_{BL} = GFw_{(L)'}'$$

$$\text{则 } [A] = EI[H] - \left( GF + \frac{6K_{c1}}{s} \right) [J] + [L] + WGF[T_0] \tag{28}$$

$$\text{而 } [w''] = [J]\{w_a\}$$

矩阵 [J] 可由下式采用：

$$[J] = \frac{1}{L^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.052519 & -0.133892 & -0.246963 \\ 0 & -0.393629 & -0.847860 & -1.267694 \\ 0 & -0.878494 & -1.443732 & -1.370794 \\ 0 & -1.321845 & -1.363916 & -0.132881 \\ 0 & -1.582036 & -0.556806 & 1.196473 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (4.730)^2 \\ (7.8532)^2 \\ (10.996)^2 \end{pmatrix}$$

[J] 只写出一半，另一半的第三列为反对称，其他列均为对称。当荷载与结构均对称时，则第 3 列取消)

$$[T_0] = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{1(0)''} & \phi_{2(0)''} & \phi_{3(0)''} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1(L)''} & \phi_{2(L)''} & \phi_{3(L)''} \end{pmatrix}$$

其他计算同前，而框架的剪力由下式计算：

$$Q_f = GFw' \tag{29}$$

**(三)同时考虑框架的剪切刚度和柱的轴向刚度**

和文献[2]一样，第三种计算模型采用连续化的数学模型，即将平面框架比拟为一均质正交平板(见图 3)，拟板的折算厚度  $t$  及折算剪切模量  $G_f$ ，可分别按文献[3]的附录公式 (a) 及 (b) 求之。则框架的微分方程可由弹性力学中的平面应力问题写出

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - p_f = 0$$

当泊松比为零时，

$$\sigma_y = E_f \epsilon_y = E_f \frac{\partial w}{\partial y}$$

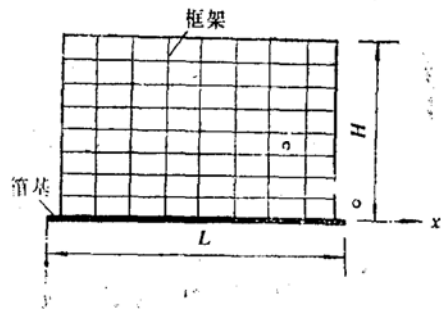


图 3

$$\tau_{yx} = G_f \gamma_{yx} = G_f \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

为了简化, 只考虑柱的轴向变位  $w$ , 略去横梁轴向变位  $u$ , 得

$$G_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = p_f \quad (30)$$

设框架区域的试函数为

$$w = w_{a0} + \sum_{m=1}^n \left[ w_{am} - w_{bm} \sin \frac{(2m-1)\pi y}{2H} \right] \bar{\phi}_m(x) \quad (31)$$

当  $y = 0$  时, 式(31)与式(16)同。

框架的内部残数和边界残数

$$R_{1f} = G_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - p_f$$

$$WR_{B1} = W \int_{-H}^0 G_f t \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} dy \quad (32)$$

$$WR_{B2} = W \int_{-H}^0 G_f t \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=L} dy$$

$$WR_{B3} = W \int_0^L G_f t \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y=-H} dx$$

箱基的内部残数

$$R_{1b} = EI w'''' - e(G_f t) w'' + p(x) - N(x) - q(x) \quad (33)$$

式中  $N(x)$  为框架柱轴力传来的, 其值  $N(x) = E_f t \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0}$ ;  $e(G_f t) w''$  为框架柱剪力  $(G_f t) w'$  传来的, 这里  $e$  为箱基梁面至其中和轴的距离。

框架内力

$$N_{iy} = -E_f t \sum_{m=1}^n w_{bm} k_m \cos k_m y \int_{x_i - s/2}^{x_i + s/2} \bar{\phi}_m(x) dx$$

$$Q_{iy} = G_f t [w]_{x_i - s/2}^{x_i + s/2} \quad (34)$$

$$Q_{xi} = G_f t \sum_{m=1}^n \bar{\phi}_m'(x) [w_{am} y + w_{bm} k_m \cos k_m y]_{y_i - s/2}^{y_i + s/2}$$

式中  $k_m = \frac{(2m-1)\pi}{2H}$ ； $N_{iy}(Q_{iy})$  为在  $x_i$  及标高  $y$  处的柱轴力(剪力)， $Q_{ij}$  为在  $x$  及标高  $y_j$  处的梁剪力； $h$ ， $s$  为框架的层高和柱的间距。

### 四、算 例

以上我们对弹性地基梁(箱基)计算的三种模型已作了介绍，现举一算例以资比较(见图 4)。

[例] 已知：地基的  $E_0 = 3.0 \times 10^4 \text{kPa}$ ， $\mu = 0.30$ ；基础梁的长度  $L = 30\text{m}$ ，宽度  $b = 2\text{m}$ ，分段长度  $c = 3\text{m}$ ， $EI = 2 \times 10^6 \text{kN}\cdot\text{m}^2$ ；框架共八层，柱间距  $s = 4\text{m}$ ，柱截面高度  $s_1 = 0.5\text{m}$ ，框架层高  $h = 3.6\text{m}$ ，梁截面高度  $h_1 = 0.55\text{m}$ ， $E = 2.21 \times 10^7 \text{kPa}$ ；各层梁的  $EI_b/s = 17500 \text{kN}\cdot\text{m}$ ，各层柱的  $EI_c/h = 30560 \text{kN}\cdot\text{m}$ 。

[解]

$$b/c = 2/3$$

$$\frac{\pi E_0}{1 - \mu_0^2} = 0.103569 \times 10^6 \text{kPa}$$

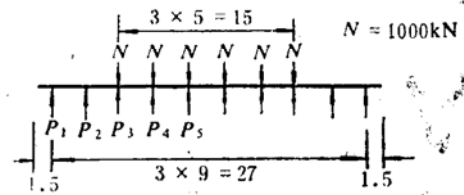


图 4

#### (一) 第一种计算模型

$$\{q\} = \frac{1}{3} \{ 0, 0, 1000, 1000, 1000 \}^T$$

因对称，取  $w_{a2} = 0$ ，计算只取结构的左半部。

$$[A] = 10^4 \begin{bmatrix} 1.594963 & 0.774176 & -1.468367 \\ 1.263542 & 2.640035 & 9.315881 \\ 1.191044 & 4.101958 & 11.198964 \\ 1.159973 & 5.233571 & 4.082338 \\ 1.149616 & 5.852895 & -3.867309 \end{bmatrix}$$

• 代入式(24)得

$$\begin{bmatrix} 16.452371 & 44.511145 & 46.113913 \\ \text{对} & 172.083676 & 136.250819 \\ \text{称} & & 491.960195 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{a0} \\ w_{a1} \\ w_{a3} \end{bmatrix} = 10^{-8} \begin{bmatrix} 233.375533 \\ 1012.561600 \\ 760.932867 \end{bmatrix}$$

求得  $\begin{bmatrix} w_{a0} \\ w_{a1} \\ w_{a3} \end{bmatrix} = 10^{-8} \begin{bmatrix} -5.911494 \\ 7.364780 \\ 0.061139 \end{bmatrix} \quad (\text{m})$

及  $\begin{bmatrix} M_{0.1L} \\ M_{0.2L} \\ M_{0.3L} \\ M_{0.4L} \\ M_{0.5L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83.14374 \\ 255.60156 \\ 422.69830 \\ 532.07328 \\ 568.76715 \end{bmatrix} \quad (\text{kN}\cdot\text{m})$



## (二) 第二种计算模型

$$GF = 26.7 \times 10^4 \text{ kN.}$$

$$GF + \frac{6K_{c1}}{s} = 31.284 \times 10^4 \text{ kN,}$$

$$[J] = \frac{1}{30^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.052519 & -0.246963 \\ 0 & -0.393629 & -1.267694 \\ 0 & -0.878494 & -1.370794 \\ 0 & -1.321845 & -0.132881 \\ 0 & -1.582036 & 1.196473 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (4.72)^2 \\ (10.996)^2 \end{pmatrix}$$

$$[T_0] = 10^8 \begin{pmatrix} 0 & 9.864888 & 22.933258 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[A] = 10^4 \begin{pmatrix} 0 & 9.864888W & 22.933258W \\ 1.594963 & 0.856818 & 0.631842 \\ 1.263542 & 3.259434 & 20.096535 \\ 1.191044 & 5.484322 & 22.856395 \\ 1.159973 & 7.313574 & 5.212377 \\ 1.149616 & 8.342325 & -14.042289 \end{pmatrix}$$

{q} 同前。代入式(24)，并取  $W=0.5$ ，求得

$$\begin{pmatrix} 16.452371 & 52.256067 & 66.346775 \\ \text{对} & 291.899226 & 293.109803 \\ & \text{称} & 1468.876627 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{a0} \\ w_{a1} \\ w_{a3} \end{pmatrix} = 10^{-8} \begin{pmatrix} 233.375533 \\ 1208.660600 \\ 847.008867 \end{pmatrix}$$

求出

$$\begin{pmatrix} w_{a0} \\ w_{a1} \\ w_{a3} \end{pmatrix} = 10^{-8} \begin{pmatrix} 3.076498 \\ 3.939880 \\ -0.348514 \end{pmatrix} \quad (\text{m})$$

$$\begin{pmatrix} M_{0.1L} \\ M_{0.2L} \\ M_{0.3L} \\ M_{0.4L} \\ M_{0.5L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34.63224 \\ -17.72996 \\ 137.30905 \\ 349.23268 \\ 448.28814 \end{pmatrix} \quad (\text{kN}\cdot\text{m}) \quad \text{及} \quad \begin{pmatrix} Q_{0.1L} \\ Q_{0.2L} \\ Q_{0.3L} \\ Q_{0.4L} \\ Q_{0.5L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 269.24315 \\ 283.81441 \\ 263.98117 \\ 165.81771 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{kN}\cdot\text{m})$$

(三)第三种计算模型

$t = 0.0625\text{m}$ ,  $G_f = 1.802577 \times 10^5 \text{kPa}$ , 框架的内部残数, 由式(32)求得。

取点  $(x, y) = (0.05L, -0.25H)$ , 即

$$R_{If} = 10^4(-0.023534w_{a1} - 3.714178w_{b1} - 0.598071w_{a3} - 318.328488w_{b3})$$

依些类推, 求得  $(x, y)$  如  $(0.25L, -0.25H)$ ,  $(0.45L, -0.25H)$ ,  $(0.05L, -0.5H)$ ,  $(0.05L, -0.75H)$ ,  $(0.25L, -0.5H)$ ,  $(0.25L, -0.75H)$ ,  $(0.45L, -0.5H)$  及  $(0.45L, -0.75H)$  的  $R_{If}$ 。

框架的边界残数, 由式(32), 取  $W = 0.5$ , 由于对称关系, 故  $R_{B3} = 0$ , 而

$$R_{B1} = R_{B2} = 10^4(10.231428w_{a1} + 23.785364w_{a3} + 6.513530w_{b1} + 3.028447w_{b3})$$

地基梁(箱基)的残数由式(33)计算, 因  $e(G_f t)$  项很小可忽略不计。于是

$$[A] = 10^4 \begin{pmatrix} 0 & 5.115714 & 11.892682 & 3.256765 & 1.514224 \\ 0 & -0.023534 & -0.598071 & -3.714178 & -318.328488 \\ 0 & -0.393657 & -3.319656 & -8.295751 & -647.238979 \\ 0 & -0.708917 & 2.897502 & -10.907936 & -268.298316 \\ 0 & -0.023534 & -0.598071 & -6.862922 & 243.638374 \\ 0 & -0.393657 & -3.319656 & -15.328594 & 495.375872 \\ 0 & -0.708917 & 2.897502 & -20.155295 & 205.346891 \\ 0 & -0.023534 & -0.598071 & -8.966828 & 131.855762 \\ 0 & -0.393657 & -3.319656 & -20.02774 & 268.094727 \\ 0 & -0.708917 & 2.897502 & -26.334115 & 111.132618 \\ 1.594963 & 0.774176 & -1.468367 & 11.094855 & 78.829377 \\ 1.263542 & 2.640035 & 9.315881 & 18.084136 & 146.270693 \\ 1.191044 & 4.101958 & 11.198964 & 24.389914 & 159.797107 \\ 1.159973 & 5.233571 & 4.082338 & 29.221149 & 116.343138 \\ 1.149616 & 5.852895 & -3.867309 & 31.850644 & 67.219720 \end{pmatrix}$$

当荷载作用在基梁上, 即  $\{q\}$  同前, 由式(24)得

$$\begin{pmatrix} 8.226185 & 22.255573 & 23.056956 & 140.107163 & 713.106253 \\ & 114.177859 & 126.765347 & 570.712484 & 2031.477758 \\ & & 446.735951 & 450.455742 & 2989.019718 \\ & & & 4988.844339 & -441.489262 \\ & & & & 1111971.55600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{a0} \\ w_{a1} \\ w_{a3} \\ w_{b1} \\ w_{b3} \end{pmatrix}$$

对 称

$$\begin{array}{l}
 116.687767 \\
 506.280800 \\
 = 10^3 \quad 380.466434 \\
 2848.723566 \\
 11445.332160
 \end{array}$$

求得

$$\begin{array}{l}
 w_{a0} \\
 w_{a1} \\
 w_{a3} \\
 w_{b1} \\
 w_{b3}
 \end{array}
 = 10^3 \quad \begin{array}{l}
 3.763802 \\
 3.951978 \\
 -0.541099 \\
 0.062265 \\
 0.002138
 \end{array}
 \quad (\text{m}),
 \quad \begin{array}{l}
 M_{0.1L} \\
 M_{0.2L} \\
 M_{0.3L} \\
 M_{0.4L} \\
 M_{0.5L}
 \end{array}
 = \begin{array}{l}
 -74.49056 \\
 -95.38439 \\
 93.11068 \\
 382.75503 \\
 522.01588
 \end{array}
 \quad (\text{kN}\cdot\text{m}).$$

当荷载作用在  $y = -0.5H$  层时, 此时需增加一个选点, 即荷载作用点  $(x, y) = (0.35L, -0.5H)$ , 同样可求得

$$\begin{array}{l}
 w_{a0} \\
 w_{a1} \\
 w_{a3} \\
 w_{b1} \\
 w_{b3}
 \end{array}
 = 10^{-3} \quad \begin{array}{l}
 7.607907 \\
 2.052967 \\
 -0.432321 \\
 -0.950901 \\
 0.048972
 \end{array}
 \quad (\text{m}),
 \quad \begin{array}{l}
 M_{0.1L} \\
 M_{0.2L} \\
 M_{0.3L} \\
 M_{0.4L} \\
 M_{0.5L}
 \end{array}
 = \begin{array}{l}
 -70.08683 \\
 -110.82781 \\
 13.13431 \\
 224.45743 \\
 328.30886
 \end{array}
 \quad (\text{kN}\cdot\text{m}).$$

框架的内力可按式(34)计算, 为了节省篇幅, 从略。

应指出: 本例取  $W = 0.5$ , 认为边界残数的影响是次要的, 由此求得的结果与能量变分法求得的结果比较接近; 但此值究竟应取多大才对结果有一定的影响, 尚待进一步研究。

荷载作用在  $y = -\frac{1}{2}H$  和  $y = 0$  处, 计算结果不同, 说明前者的柱轴向变形的影响比后者大; 一般荷载是作用在框架各层上, 因此, 柱的轴向刚度的作用不能忽视。

## 五、结 语

本文所建立的连续化数学模型, 具有明确的物理概念, 所用的半解析半残数法是一个很有发展前景的方法。这个方法没有积分运算, 故对结构刚度的突变(例如: 框架个别柱间内设置了剪力墙)同样适用。

由于运用了土力学的解析解, 对减少加权残数法的计算工作量有明显的效果。此外, 在使用上方便、快捷, 电算程序简单, 输入及准备工作量较少。本文方法同样适用于水平荷载的计算, 将另文详述。

## 参 考 文 献

- [1] 刘开国, 地基-基础-框架体系相互作用的计算方法, 建筑结构学报, 1981年第5期。
- [2] 刘开国, 弹性地基梁与高层框架相互作用的能量变分解, 工程力学, 1986年第2期。
- [3] 刘开国, 高层建筑结构的能量变分解, 建筑结构学报, 1982年第3期。
- [4] 徐次达, 加权残数法解固体力学问题, 力学与实践, 1980年第4期。

# Calculation of Multistory Frame and Box Foundation as a Whole System by Semi-analytical and Semi-residual Method

*Liu Kaiguo*

(Hubei Design Institute of Industrial Buildings, Wuhan)

## Abstract

Presented in this paper is a simplified practical method, in which the stress-strain relation of soil obeys the theory of elastic halfspace and an equivalent continuum is used for the mathematical models of frame. The rigidity matrix of soil is derived by analytical method. The interaction of multistory frame and box foundation is solved by the least square collocation method.

In this paper, the following three mathematical models are investigated:

1. The rigidity of frame is ignored.
2. Only shear rigidity of frame is taken into account.
3. Both the shear rigidity of frame and the axial stiffness of columns are taken into account.

Finally several examples are given for comparison.