

弹性固体地基板有限元分析中对称性利用的问题

姚炳卿

(空军工程学院, 西安)

提 要

本文解决了用有限元法分析弹性固体地基板时, 在任意荷载作用下只需取1/4板进行计算的方法问题。

一、前 言

用有限元法分析计算弹性固体地基板(如公路路面板、机场道面板)时, 对于任意荷载作用的情况, 如何利用结构(特别是地基)和荷载的对称性, 只取1/4板计算, 以减小计算体系(板和地基)的整体刚度矩阵和缩短计算时间的问题, 首先由黄仰贤(Y.H.Huang)于1974年部份地予以解决^[1]。在文献[1]中, 黄仰贤只解决了荷载作用于矩形板中央这一特殊情况, 此时荷载对称于 x 轴和 y 轴, 从而可取1/4板计算。1978年, 同济大学姚祖康已把黄的方法改进到荷载对 x 轴对称或对 y 轴对称的情况, 从而可取1/4板或1/2板进行计算^[2]。实际上, 在文献[1,2]中, 只利用了结构及荷载的对称性, 没有利用反对称性, 因而没有解决在任意荷载作用下均只需取1/4板进行计算的方法。中山大学陈树坚1976年用有限元法分析文克勒(Winkler)地基上的矩形板时, 充分利用了结构及荷载的对称性和反对称性, 对任意荷载作用下的文克勒地基板均只需取1/4板计算^[3]。

1979年笔者在用有限元法计算弹性固体地基上机场道面板的设计图表时, 采用文献[3]的技巧和文献[1,2]的基本方法, 充分利用结构及荷载的对称性和反对称性, 解决了在1/4板范围内(考虑了其余3/4板下地基的影响)形成地基柔度矩阵和刚度矩阵, 从而解决了弹性固体地基上矩形板在任意荷载作用下均只需取1/4板计算的方法问题, 并在实际计算中取得了满意的结果。

二、方法概述

实际上, 飞机荷载可以作用在道面板的任意位置上。例如图1所示的荷载作用情况, 该荷载对结构的二对称轴 x 轴和 y 轴均不对称。在这种情况下, 也可以只取1/4板进行计算。此时, 可将图1所示荷载情况分解成如图2所示四种荷载情况, 然后根据图示的四种不同的荷载对

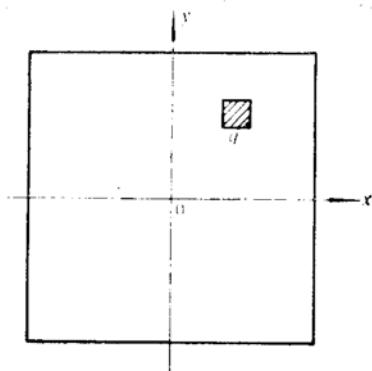
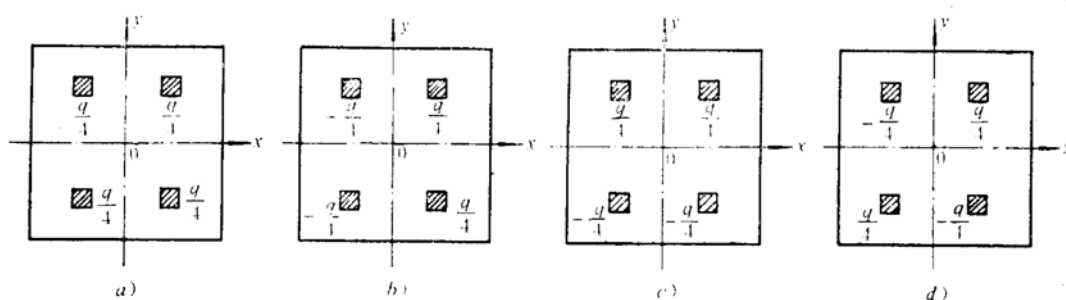


图 1



(a) 荷载对 x 轴和 y 轴均对称的情况 (b) 荷载对 x 轴对称, 对 y 轴反对称的情况 (c) 荷载对 x 轴反对称, 对 y 轴对称的情况 (d) 荷载对 x 轴和 y 轴均反对称的情况

图 2

称情况(对称的或反对称的),在1/4板范围内对板和地基分别形成四种不同的刚度矩阵,对应迭加得体系的四种不同的总刚度矩阵(1/4板的),求得四种荷载情况下的位移和内力,最后迭加即求得图1所示荷载下的总位移和总内力。

对1/4板形成板的四种不同对称情况的刚度矩阵时,只需在板的对称轴上各结点处加上相应的约束就可以了;当然所加约束条件因所采用的板元(如位移型元,混合法元,样条元等)而有所不同。但在1/4板范围内形成四种不同对称情况而且又考虑了其余3/4板下地基影响的地基柔度矩阵时(用柔度矩阵求逆得地基刚度矩阵)时,处理上就要复杂一点,这正是本文所要解决的问题。

由于弹性固体地基板下任一点的反力不仅对该点地基产生挠度,而且对地基其他各点也产生挠度,因此形成1/4板范围内地基的柔度矩阵时,还要考虑其余3/4块板下地基反力的影响。

用有限元法分析弹性固体地基板时,通常采用如下的假设^[4]:其一,认为板和地基处处保持紧密接触,即使受载变形,地基上出现负反力时,二者也不产生脱离现象;其二,假设作用在每个结点周围面积为 $2A \times 2B$ 的矩形上的压力是均布的,其值为 $P_i/(2A \times 2B)$,且随不同结点而变化,其中 A, B 为单元沿 x 方向和 y 方向的半宽, P_i 是作用在某结点 i 上的地基反力。本文亦采用上述两个假设*。

*有些文献不采用第一个假设,认为地基上出现负反力处,板与地基即局部脱空,并用有限元法分析这种局部脱空现象对板中应力的影响,见文献[5,6,7]。

基于上述假设, 显然整块板下地基反力的对称情况和板上荷载的对称情况是相同的。例如, 当板承受图2b所示的对 x 轴对称、对 y 轴反对称的荷载作用时, 板下的地基反力也是对 x 轴对称、对 y 轴反对称的; 也就是说, 对于板下的对 x 轴和 y 轴对称的四点 j 、 k 、 l 、 m (图3)来说, 若 j 点的地基反力为 P_j , 则 k 、 l 、 m 三点的地基反力分别为 $-P_j$ 、 $-P_j$ 、 P_j 。因此上述四点处的地基反力对地基上任一结点 i 处产生的挠度为:

$$w_{ij} = (F_{ij} - F_{ik} - F_{il} + F_{im})P_j \quad (1)$$

式中 F_{ij} 、 F_{ik} 、 F_{il} 、 F_{im} 分别表示在 j 、 k 、 l 、 m 诸点上作用单位法向集中力时在 i 点处产生的挠度。根据布辛内斯克(Boussinesq)公式, 并注意 j 、 k 、 l 、 m 各点坐标的对称关系, F_{ij} 、 F_{ik} 、 F_{il} 、 F_{im} 分别按下列各式计算:

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \\ F_{ik} &= \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{\sqrt{(x_i + x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \\ F_{il} &= \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{\sqrt{(x_i + x_j)^2 + (y_i + y_j)^2}} \\ F_{im} &= \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

其中 (x_i, y_i) 、 (x_j, y_j) 分别表示结点 i 和结点 j 的坐标, E_0 和 μ_0 是弹性固体地基的弹性常数。

若1/4块板面上共有 n 个结点, 则任一结点 i 处的挠度为:

$$w_i = \sum_{j=1}^n (F_{ij} - F_{ik} - F_{il} + F_{im})P_j \quad (3)$$

其中 j 、 k 、 l 、 m 是如图3所示的四个对称点。这样一来, 按式(3)形成1/4块范围内的地基柔度矩阵时, 实际上就已考虑其余3/4块板下地基反力的影响。

在计算柔度系数 F_{ij} 、 F_{ik} 、 F_{il} 、 F_{im} 时, 还应考虑到 i 点与 j 点重合这一特殊情况, 这实际上是如何计算地基柔度矩阵中的对角元问题。根据前述假设二, 记

$$F_{ii} = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \left[\frac{1}{B} \ln \left(\sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}} + \frac{B}{A} \right) + \frac{1}{A} \ln \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{B^2}} + \frac{A}{B} \right) \right] \quad (4)$$

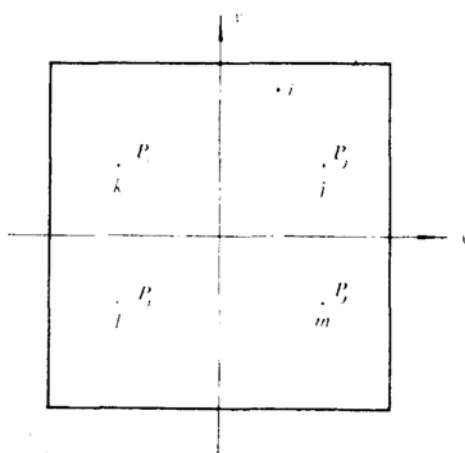


图3

则计算1/4板范围内地基柔度矩阵的对角元时, 系数 F_{ij} 、 F_{ik} 、 F_{il} 、 F_{im} 按下述四种情况考虑:

① i 点不在 x 轴或 y 轴上时有

$$F_{ij} = F_{ii} \quad (5)$$

而 F_{ik} 、 F_{il} 、 F_{im} 仍按式(2)中的后三式计算, 但应注意到有 $x_i = x_j$, $y_i = y_j$ 。

② i 点在 x 轴上时, 有 $x_i = x_j$, $y_i = y_j = 0$, 而且

$$F_{ij} = F_{im} = F_{ii} \quad (6)$$

而 F_{ik} 、 F_{il} 仍按式(2)中的第二、第三两式计算, 显然 $F_{ik} = F_{il}$ 。

③ i 点在 y 轴上时, 有 $x_i = x_j = 0$, $y_i = y_j$, 且有

$$F_{ij} = F_{ik} = F_{ii} \quad (7)$$

而 F_{il} 、 F_{im} 仍按式(2)中的后两式计算, 显然 $F_{il} = F_{im}$ 。

④ i 点与原点重合时, 有 $x_i = x_j = y_i = y_j = 0$, 且有

$$F_{ij} = F_{ik} = F_{il} = F_{im} = F_{ii} \quad (8)$$

根据上述方法, 对于四种不同的荷载对称情况(图2), 按1/4板形成板的刚度矩阵时的对称条件(以位移法的ACM元为例)^[8], 以及形成地基柔度矩阵时各元素的计算方法, 可综述如下:

① 荷载对 x 轴和 y 轴均对称的情况(图2a)

板的对称条件: x 轴上诸结点有 $\theta_x = 0$, y 轴上诸结点有 $\theta_y = 0$;

地基上结点 i 的柔度方程、柔度矩阵的非对角元 f_{ij} 和对角元 f_{ii} :

$$w_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} P_j = \sum_{j=1}^n (F_{ij} + F_{ik} + F_{il} + F_{im}) P_j$$

$$f_{ij} = F_{ij} + F_{ik} + F_{il} + F_{im} \quad (i \neq j)$$

$$f_{ii} = \begin{cases} F_{ii} + F_{ik} + F_{il} + F_{im} & (x_i \neq 0, y_i \neq 0) \\ 2(F_{ii} + F_{ik}) & (x_i \neq 0, y_i = 0) \\ 2(F_{ii} + F_{il}) & (x_i = 0, y_i \neq 0) \\ 4F_{ii} & (x_i = y_i = 0) \end{cases} \quad (9)$$

② 荷载对 x 轴对称, 对 y 轴反对称的情况(图2b):

板的对称条件: x 轴上诸结点有 $\theta_x = 0$; y 轴上诸结点有 $w = 0$, $\theta_x = 0$;

地基上结点 i 的柔度方程、柔度矩阵的非对角元 f_{ij} 和对角元 f_{ii} :

$$w_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} P_j = \sum_{j=1}^n (F_{ij} - F_{ik} - F_{il} + F_{im}) P_j$$

$$f_{ij} = f_{ji} = F_{ij} - F_{ik} - F_{il} + F_{im} \quad (i \neq j)$$

$$f_{ii} = \begin{cases} F_{ii} - F_{ik} - F_{il} + F_{im} & (x_i \neq 0, y_i \neq 0) \\ 2(F_{ii} - F_{ik}) & (x_i \neq 0, y_i = 0) \\ 2(F_{ii}) & (x_i = 0, y_i \neq 0) \\ 4(F_{ii}) & (x_i = y_i = 0) \end{cases} \quad (10)$$

③荷载对 x 轴反对称, 对 y 轴对称的情况(图2c):

板的对称条件: x 轴上诸结点有 $w = 0$, $\theta_y = 0$; y 轴上诸结点有 $\theta_y = 0$;

地基上结点 i 的柔度方程、柔度矩阵中的非对角元 f_{ij} 和对角元 f_{ii} :

$$w_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} P_j = \sum_{j=1}^n (F_{ij} + F_{ik} - F_{il} - F_{im}) P_j$$

$$f_{ij} = F_{ij} + F_{ik} - F_{il} - F_{im} \quad (i \neq j)$$

$$f_{ii} = \begin{cases} F_{ii} + F_{ik} - F_{il} - F_{im} & (x_i \neq 0, y_i \neq 0) \\ 2F_{ii} & (x_i \neq 0, y_i = 0) \\ 2(F_{ii} - F_{il}) & (x_i = 0, y_i \neq 0) \\ 4F_{ii} & (x_i = y_i = 0) \end{cases} \quad (11)$$

④荷载对 x 轴反对称、对 y 轴也反对称的情况(图2d):

板的对称条件: 在 x 轴上诸结点有 $w = 0$, $\theta_y = 0$; y 轴上诸结点有 $w = 0, \theta_x = 0$;

地基上结点 i 的柔度方程、柔度矩阵中的非对角元 f_{ij} 和对角元 f_{ii} :

$$w_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} P_j = \sum_{j=1}^n (F_{ij} - F_{ik} + F_{il} - F_{im}) P_j$$

$$f_{ij} = F_{ij} - F_{ik} + F_{il} - F_{im} \quad (i \neq j)$$

$$f_{ii} = \begin{cases} F_{ii} - F_{ik} + F_{il} - F_{im} & (x_i \neq 0, y_i \neq 0) \\ 2F_{ii} & (x_i = 0, y_i \neq 0 \text{ 或 } x_i \neq 0, y_i = 0) \\ 4F_{ii} & (x_i = y_i = 0) \end{cases} \quad (12)$$

在1/4块板范围内形成的并考虑了其余3/4块板下地基反力影响的地基刚度矩阵,仍然是一个对称正定矩阵。

利用对称性,按1/4板分析计算弹性固体地基板的方法,有如下两大优点:

其一,节省内存,扩大中小型计算机的解题能力。按1/4板分析计算弹性固体地基板,虽然要形成四个刚度矩阵,但其所占内存量,大约只有一个大刚度矩阵所占内存量的 $1/3 \sim 1/4$,而且这四个刚度矩阵所不一定要同时形成,可以交替形成。在国产的TQ-16机上,当采用位移法ACM元分析弹性固体地基板时,若按整板分析计算,板最多只能划分成 8×8 单元,而按1/4板计算,交替形成四种不同对称情况时的刚度矩阵,1/4板亦可划分成 8×8 个单元,因而得到了整板个 16×16 单元的结果。

其二,节省计算时间和机时费,当单元划分愈多时,节省的计算时间和机时费越多。例如用西德西门子计算机,用混合法分析弹性固体地基板,按1/4板 8×8 单元计算(得到整板 16×16 单元的结果),CPU时间仅100秒(机时费9元);若按整板 16×16 单元计算,CPU时间则为752 s(机时费67.68元)。

上述两个优点,对于日益普及的微机来说,也是很有实用价值的。

三、算 例

兹举一例,以说明按1/4板和按整板所得结果的比较情况。

算例原始数据:板的尺寸为 400×400 cm弹性模量及泊松比分别为 $E_c = 35 \text{ GPa}$, $\mu_c = 0.167$,板厚 $H_c = 30$ cm;土基弹性模量及泊松比分别为 $E_0 = 0.35 \text{ GPa}$, $\mu_0 = 0.40$ 。板上作用两块机轮荷载,作用位置如图4a所示,轮迹尺寸为 31×45 cm,两块轮迹中到中间距132cm,轮压 $q = 1.18 \text{ MPa}$ 。整板及1/4板单元分划及点号如图4所示。

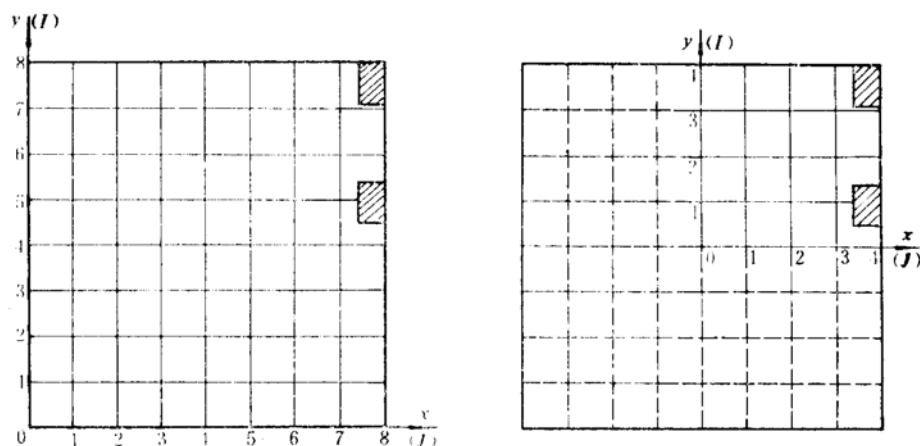


图4

采用位移法的ACM元计算。按1/4板计算时,程序会自动地将荷载分解成如图2所示的四种荷载情况分别进行计算,然后再迭加得出总的结果^[8]。

按1/4板和按整板算得的结果列于表1,其中按整板算得的结果是由北京军区空军后勤部工程设计室谭德新工程师用他编写的程序计算的。由表1可知,笔者按1/4板算得的结果与谭德新工程师按整板算得的结果完全相同,从而证明了形成地基刚度矩阵时利用对称性,本

文所述方法是正确的。

1

结点编号				垂直位移 w (cm)		弯 矩 M_x ($\times 10\text{N}\cdot\text{m}/\text{m}$)		弯 矩 M_y ($\times 10\text{N}\cdot\text{m}/\text{m}$)		扭 矩 M_{xy} ($\times 10\text{N}\cdot\text{m}/\text{m}$)	
1/4板		整板									
I	J	I	J	1/4板	整板	1/4板	整板	1/4板	整板	1/4板	整板
-4	-4	0	0	0.00460	0.00460	-5.27	-5	-2.18	-2	-31.69	-32
-4	0	0	4	0.00633	0.00636	-13.96	-14	-1.66	-2	-133.06	-133
-4	4	0	8	0.00893	0.00893	30.03	30	30.53	31	-71.70	-72
-3	-3	1	1	0.00558	0.00558	-11.60	-12	12.30	12	-45.50	-46
-2	+2	2	6	0.01343	0.01343	-102.41	-102	-327.53	-328	-363.33	-363
0	-4	4	0	0.00577	0.00577	0.23	0	23.67	24	-28.42	-28
0	0	4	4	0.01251	0.01251	-403.33	-403	50.49	50	-218.35	-218
0	4	4	8	0.03667	0.03667	107.10	107	-23.69	-24	-936.47	-936
2	-3	6	1	0.00708	0.00708	-88.87	-89	24.12	24	-2.48	-2
2	3	6	7	0.03817	0.03817	187.97	188	-127.62	-128	-43.05	-43
4	-4	8	0	0.00584	0.00584	-2.89	-3	4.46	4	21.45	21
4	0	8	4	0.01362	0.01362	-697.37	-697	2.56	3	64.35	64
4	4	8	8	0.05278	0.05278	2218.83	2219	2335.26	2335	849.98	850

参 考 文 献

- [1] Huang, Y.H. Analysis of Symmetrically Loaded Slab on Elastic Solid, J. of ASCE, TE2, May, 1974.
- [2] 姚祖康, 水泥混凝土路面的有限元分析(一), 同济大学科学技术情报站, 1978年。
- [3] 陈树坚, 刚性道面的有限单元法计算, 1976年。
- [4] Cheung, Y.K. and Zienkiewicz, O.C., Plates and Tanks on Elastic Foundations —an Application of Finite Element Method, Int. J. Solids Structures, 1965, Vol. 1, pp.451-461.
- [5] Huang, Y.H. and Wang, S.T., Finite Element Analysis of Concrete Pavements with Partial Subgrade Contact, 53rd Annual Meeting of H.R.B., 1974.
- [6] 姚祖康, 水泥混凝土路面的温度翘曲应力, 同济大学学报, 1981年, 第3期, 第44~54页。
- [7] 汪光焘, 局部脱空状态的水泥混凝土路面板荷载应力分析, 1981年, 同济大学硕士研究生论文。

Some Problems on Applying Symmetrization in Finite Element Analysis of the Slab on Elastic Solid Foundations

Yao Bingqing

(Air Force Engineering College, Xian)

Abstract

In this paper, a method of forming stiffness matrices for a quarter of slab and subgrade has been developed, which may be used for analysing arbitrarily loaded slabs on elastic solid foundation with finite element method.