矿层开采后的地面沉陷和应力分析

郭惟嘉 刘立民
(山东矿业学院特殊开采研究所,泰安,271019)
施德芳 曹志远
(同济大学工程力学所,上海,200092)

文 摘 本文交替使用半解析法中的有限层单元和三棱柱单元,给出了矿层开采后的地面沉陷及应力分析的计算方法、公式和结果。

关键词 半解析法,地面沉陷,应力分析,有限层单元,三棱柱单元。

1 前 言

有限元法采用物理上离散与分片多项式插值,虽具有广泛的适应性,但对矿层开采后引起的地面沉陷和围岩附加应力的三维分析问题,其计算工作量和计算费用是非常大的,且普通微机无法实施该项计算。这大大制约了矿山开采沉陷和附加应力分析问题的深入研究。本文所提出的用半解析方法[1,2]进行矿山开采沉陷及围岩应力的三维分析,既克服了纯解析的理论分析在数学上的困难及应用上的局限性,又大大降低了基于全离散原理的纯数值方法(有限元、有限差分法等)的计算工作量、计算费用及对计算机内存和速度的要求,兼备了两者之间的优点,具有广泛的实用性。

2 计算模型

研究对象的剖面及单元分割如图1所示,上部表土为水平层A,可视为横观各向同性材料,其下是呈三角状的倾斜块B,最下面是包括开挖在内的呈倾斜状的各岩层C。

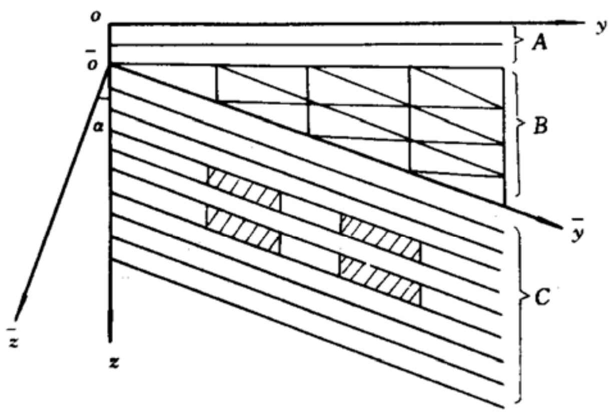

图1 计算模型剖面分割图

在计算中,对A和C两部分采用二维解析的层单元,其中A部分的局部坐标与整体坐标相重合,C部分的局部坐标与整体坐标有一倾角α,在局部坐标系下二者的计算公式有相同的形式,如果层内开挖孔洞,只需积分时剔除其作用。典型的层单元示于图2。

---

* 煤炭自然科学基金资助项目,煤炭高校优秀青年基金项目。
到稿日期:1994-04-12.

对三角状的倾斜块 B,再采用自动分割将其离散成许多一维解析的三棱柱单元(见图 1),典型的三棱柱单元示于图 3。

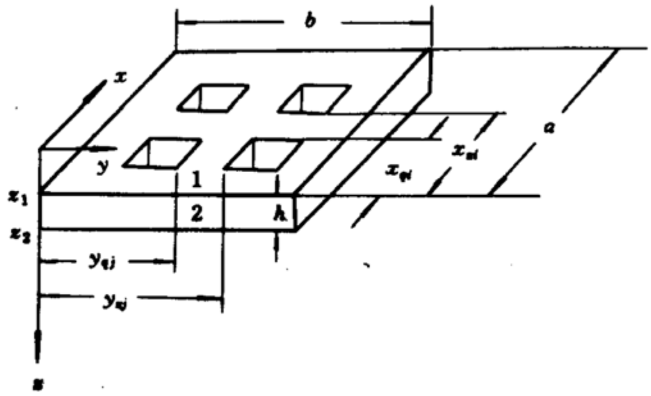

图 2 典型层单元

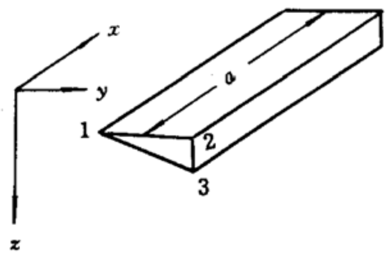

图 3 典型柱单元

计算中,左、右、前、后和底部边界均采用固支边界,上部为自由边界。开挖部分的厚度应取矿层实际采厚与冒落高度之和,并将其视为一种弹性介质。为了确保单元之间位移的连续性,所用位移模式满足相容性。

3 计算公式

3.1 位移模式

(1)层单元

$$\{\boldsymbol{f}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}[\boldsymbol{N}]_m[\boldsymbol{N}_{yz}]\{\boldsymbol{\delta}\}_{mn} \tag{1}$$

其中

$$[\boldsymbol{N}]_m = \begin{bmatrix} \cos\frac{m\pi x}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sin\frac{m\pi x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \sin\frac{m\pi x}{a} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$[\boldsymbol{N}_{yz}] = \left[\frac{z_2 - z}{h}[\boldsymbol{N}]_n \quad \frac{z - z_1}{h}[\boldsymbol{N}]_n\right] \tag{3}$$

$$\{\boldsymbol{\delta}\}_{mn}^{\mathrm{T}} = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2\}^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

并有

$$[\boldsymbol{N}]_n = \begin{bmatrix} \sin\frac{n\pi y}{b} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{n\pi y}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sin\frac{n\pi y}{b} \end{bmatrix} \tag{5}$$

(2)棱柱单元

$$\{\boldsymbol{f}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{p}[\boldsymbol{N}]_m[\boldsymbol{N}_{yz}][\boldsymbol{\delta}]_m \tag{6}$$

其中 $[\boldsymbol{N}_{yz}]$为

$$[\boldsymbol{N}_{yz}] = [L_1[\boldsymbol{I}] \quad L_2[\boldsymbol{I}] \quad L_3[\boldsymbol{I}]] \tag{7}$$

这里 L_1, L_2, L_3 为三角形内的面积坐标；$[\boldsymbol{I}]$为三阶单位矩阵，同时有

$$[\boldsymbol{\delta}]_m^{\mathrm{T}} = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3\}^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

3.2 单元刚度矩阵

将上述位移模式代入应变表达式

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x} \; \frac{\partial v}{\partial y} \; \frac{\partial w}{\partial z} \; \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \; \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \; \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

即可得到应变矩阵$[\boldsymbol{B}]$，完成应变矩阵$[\boldsymbol{B}]$与弹性矩阵$[\boldsymbol{D}]$的相乘和积分，就得到了该模式的单元刚度矩阵。

(1)层单元

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}[\boldsymbol{B}]_{mn}\{\boldsymbol{\delta}\}_{mn} \tag{10}$$

刚度子阵

$$[\boldsymbol{K}]_{mn,kl} = \int_{z_1}^{z_2}\sum_{j=1}^{jy}\int_{y_{qj}}^{y_{zj}}\sum_{i=1}^{ix}\int_{x_{qi}}^{x_{zi}}[\boldsymbol{B}]_{mn}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]_{kl}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{11}$$

其中 6 阶矩阵$[\boldsymbol{D}]$是横观各向同性或各向同性材料的弹性矩阵，可以从有关书籍中查得。i_x 为x 向积分段数，i_y 为y 向积分段数，从而保证了开挖孔影响的剔除，但当考虑坍塌冒落时，开孔部分也应作为一个积分段，只是它的$[\boldsymbol{D}]$值与其它段不同。

(2)棱柱单元

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \sum_{m=1}^{p}[\boldsymbol{B}]_m\{\boldsymbol{\delta}\}_m \tag{12}$$

$$[\boldsymbol{K}]_{m,k} = \iiint_v [\boldsymbol{B}]_m^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]_k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{13}$$

3.3 单元荷载列阵

只考虑由重力而产生的体积力，设材料容重为 γ，有

$$\{\boldsymbol{F}\}_{mn} = \int_{z_1}^{z_2}\sum_{j=1}^{jy}\int_{y_{qj}}^{y_{zj}}\sum_{i=1}^{ix}\int_{x_{qi}}^{x_{zi}}[\boldsymbol{N}_{yz}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]_m^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}0\\0\\\gamma\end{Bmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{（层单元）} \tag{14}$$

$$\{\boldsymbol{F}\} = \iiint_v [\boldsymbol{N}_{yz}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]_m^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}0\\0\\\gamma\end{Bmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{（棱柱单元）} \tag{15}$$

3.4 三角块的处理

如前所述，三角块被自动离散成许多三棱柱单元，从而增加了整体自由度，为了不使棱柱的广义位移出现在整体自由度中，需对三角块作如下处理。

(1)内部自由度的凝聚

首先用划行划列使左右边界上的节线满足同层单元一致的边界条件 $u=0, w=0$。然后再凝聚掉除上边界(最后一个水平层单元的下边界)和下边界(第一个斜层单元的上边界)之外的所有节线的广义自由度，即从方程

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^{*} & \boldsymbol{K}_{12}^{*} \\ \boldsymbol{K}_{21}^{*} & \boldsymbol{K}_{22}^{*} \end{bmatrix}_{m,k} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{1}^{*} \\ \boldsymbol{\delta}_{2}^{*} \end{Bmatrix}_{m} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{1}^{*} \\ \boldsymbol{f}_{2}^{*} \end{Bmatrix}_{m} \tag{16}$$

中消去内部自由度$\{\boldsymbol{\delta}_2^*\}_m$,从而使三角块的出口方程变为

$$\{\boldsymbol{K}_{11}^{**}\}_{m,k}\{\boldsymbol{\delta}_1^*\}_m = \{\boldsymbol{f}_1^{**}\}_m \tag{17}$$

式中 $\{\boldsymbol{\delta}_1^*\}_m$ 中只包含上、下边界节线的广义位移。

(2)向层单元的转换

虽然经过了凝聚处理,但式(17)中的$\{\boldsymbol{\delta}_1^*\}_m$ 仍是完全多余的位移参数,它可以通过转化为层的广义位移而消去。对上边界柱节线 i 有

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{q} \begin{bmatrix} \sin\dfrac{n\pi y_i}{b} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\dfrac{n\pi y_i}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sin\dfrac{n\pi y_i}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

对下边界柱节线 j 有

$$\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{q} \begin{bmatrix} \sin\dfrac{n\pi y_j}{b} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\dfrac{n\pi y_j}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sin\dfrac{n\pi y_j}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix}_m \tag{19}$$

其中三角函数矩阵为下边界从柱的 xoy 坐标系变换到下斜层的 $\overline{xoy}$ 坐标系的坐标变换矩阵。记为

$$[\boldsymbol{\lambda}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{20}$$

假设上、下边界各有 b 个剩余自由度,将它们合并在一起的转换式为

$$\{\boldsymbol{\delta}_1^*\}_m = [\boldsymbol{R}]\{\boldsymbol{\delta}\}_m \tag{21}$$

其中 $2b\times 6q$ 阶的$[\boldsymbol{R}]$为柱到层的位移转换矩阵。而

$$\{\boldsymbol{\delta}\}_m^{\mathrm{T}} = \{u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_1 \quad v_1 \quad w_1\}_{mn}^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

其中$\{u_2\ v_2\ w_2\}_{mn}^{\mathrm{T}}$是最后一个水平层的下边界在 xoy 坐标下的广义位移,但$\{u_1\ v_1\ w_1\}_{mn}^{\mathrm{T}}$却是第一个倾斜层的上边界在 $\overline{xoy}$ 坐标下的广义位移。

在得到位移转换矩阵$[\boldsymbol{R}]$后,很容易写出相应的刚度矩阵和荷载列阵的变换。

$$[\boldsymbol{K}]_{m,k} = [\boldsymbol{R}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}^{**}]_{m,k}[\boldsymbol{R}] \tag{23}$$

$$\{\boldsymbol{f}\}_m = [\boldsymbol{R}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{f}_1^{**}\}_m \tag{24}$$

这里的$[\boldsymbol{K}]_{m,k}$和$\{\boldsymbol{f}\}_m$ 就是将三角块也视为一个层单元而得到的单元刚度阵和荷载阵,可以直接和其它层单元进行叠加。

3.5 应力计算

(1)层单元

对水平的层单元按通常的作法有

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \sum\sum[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]_{mn}\{\boldsymbol{\delta}^e\}_{mn} \tag{25}$$

对倾斜的层单元，由于解得的位移是相对于坐标系 $\overline{xoy}$ 的，因此事先要转换到整体坐标系 xoy，这时有

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \sum\sum[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]_{mn}[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\delta}^e\}_{mn} \tag{26}$$

式中

$$[\boldsymbol{T}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \tag{27}$$

(2)棱柱单元

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \sum[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]_m\{\boldsymbol{\delta}^e\}_m \tag{28}$$

4　算例

在以上研究的基础上，笔者采用 NDP386 - FORTRAN 语言编制了一个用于矿山开采沉陷和应力三维分析的程序，与有限元法相比不仅节约了内存和大量硬盘空间，且计算速度大大提高，使原来无法在微机上进行的三维分析得以在微机上进行。

(1)参考算例

取材料的弹性模量 $E=500\text{MPa}$，泊松比 $\mu=0.26$，容重 $\gamma=27\text{kN/m}^3$。自重下地面位移和固定处的应力分别列于表 1 和表 2，计算剖面如图 4 示。

表 1　地面点的沉降值

点	沉降值 w(mm)						
	理论解	$p=1$		$p=5$		$p=9$	
		计算值	误差(%)	计算值	误差(%)	计算值	误差(%)
A	221	255	15.4	232.3	5.1	223	0.9
B	221	327	48.0	238.4	7.9	224	1.4

表 2　固定点的应力值

应力(MPa)			σ_z			$(\sigma_x,\sigma_y)_{\max}$			$\tau_{\max}$		
			理论值	计算值	误差(%)	理论值	计算值	误差(%)	理论值	计算值	误差(%)
点	C	$p=1$	2.700	3.198	18.4	0.949	1.084	14.2	0	61	-
		$p=5$		2.880	6.6		1.026	8.2		28	-
		$p=9$		2.740	1.5		0.958	0.95		8.2	-
	D	$p=1$	2.700	4.113	52.3	0.949	1.388	46.3	0	85	-
		$p=5$		2.936	8.7		1.052	10.9		37	-
		$p=9$		2.775	2.8		0.967	1.9		9	-

(2)实例

实例由 7 种不同的材料组成，共划分为 12 层(见图 5)，地表两层由属横观各向同性的第一种

材料组成，其弹性常数为：$E_{xy}=0.30\text{MPa}, E_z=17.00\text{MPa}, \mu_{xy}=\mu_z=0.23, \gamma=27.00\text{kN/m}^3$。

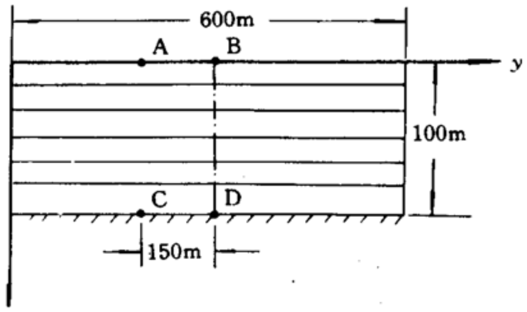

图 4 参考算例剖面图

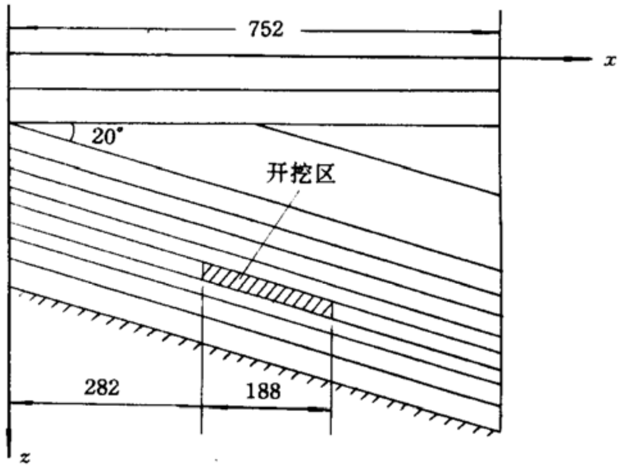

图 5 实例纵剖面

自第三层起与水平成 20°角，其材料类型编号分别为 2,3,2,3,4,5,6,7,7,7。材料的弹性常数见表 3。各层的厚度见表 4。自重下地面沉降的等值线见图 6。沿倾斜主断面地面计算下沉曲线与实际观测值比较见图 7。开挖区主要点的应力分布见图 8。

表 3 材料计算参数

计算参数	类型编号					
	2	3	4	5	6	7
E(MPa)	320.00	560.00	870.00	890.00	740.00	910.00
μ	0.21	0.20	0.20	0.20	0.19	0.20
$\gamma(\text{kN/m}^3)$	27.00	27.00	27.00	27.00	14.00	27.00

表 4 各层厚度

层 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
层厚(m)	50	50	–	–	40	30	20	10	10	10	20	30

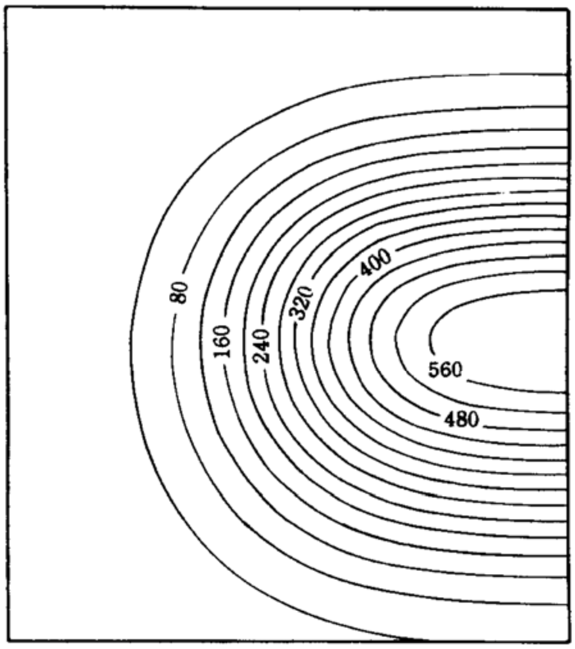

图 6 计算地面沉降的等值线

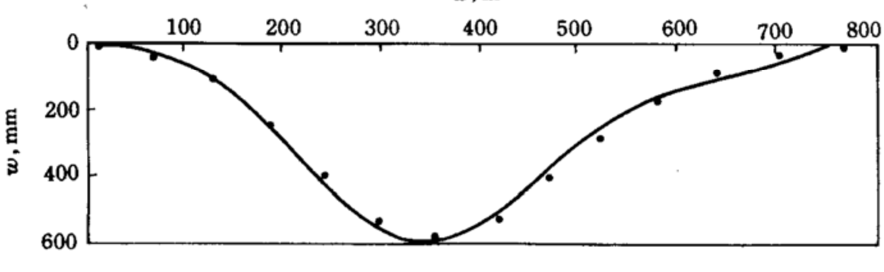

图 7 地面沿 x 轴(主剖面)的计算下沉曲线与实测结果比较

从图⑧中可以看出，压应力最大值(28.8MPa)发生在 A 点，应力集中系数为 2.8；在底边界有局部拉应力出现，说明这部分已进入拉应力屈服区。

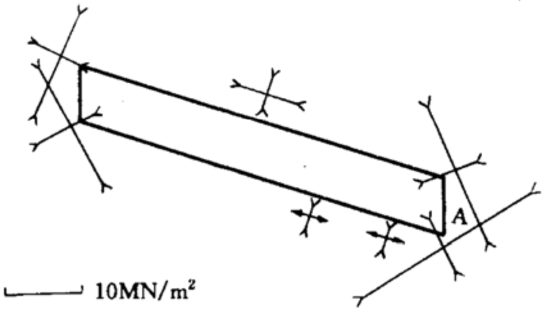

图 8　应力分布

参　考　文　献

1 Cheung Y K. 结构分析问题的有限条法，谢秀松等译. 北京：人民交通出版社，1987.

2 曹志远编著. 半解析数值方法基础. 上海：同济大学出版社，1992.

Stress Analysis for Ground Subsidence Caused by Ore Seam or Coal Seam Mining

Guo Wei-jia　　*Liu Li-min*

(Special Coal Mining Research Institute Shandong Institute of Mining and Technology, Taian)

Shi De-fang　　*Cao Zhi-yuan*

(Tongji University, Shanghai)

Abstract In this paper, the finite stratiform elements and the triangular prism elements have been alternatively used in the semi-analytic numerical method. The computational method, formulas and result of stress analysis for ground subsidence caused by ore seam mining are presented.

Key words semi-analytical method, ground subsidence, stress analysis, finite stratiform element, triangular prism element.