

有限单元法计算分层地基上的弹性地基梁

张季容 姚祖恩 楼文娟

(浙江大学土木系, 杭州)

提 要

本文用有限单元法计算分层地基上的弹性地基梁, 编制了EFB程序, 可在Apple-II微机上进行计算。通过典型实例, 将分层地基模式、弹性半空间地基模式和温克勒地基模式进行了比较, 并探讨了梁的不同刚度和不同地基条件对计算结果的影响, 得出了有实用意义的结论。

一、前 言

弹性地基梁的分析方法是土木工程、水利工程以及船舶、铁路工程中的一个重要课题。一百多年来, 国内外的许多学者对这个课题进行了大量的研究, 提出了许多理论和计算假定。1946年后藤裕(Hetenyi)^[1]比较全面地论述了温克勒(Winkler)地基上有限长梁的分析方法, 并给出了各种情况的解答。1947年热莫奇金(Zemochkin)^[2]提出了在弹性半空间地基上计算弹性地基梁的链杆法, 将梁和地基之间的连续性联系用若干刚性链杆代替, 形成超静定结构体系, 然后用结构力学的方法求解链杆内力, 亦即求得梁底反力。1949年郭尔布诺夫-巴沙道夫(Gorbunov-Posadov)^[3]在求解弹性地基上梁的挠曲微分方程时, 假设地基反力为幂级数的十次多项式, 并编制了许多表格, 便于在实际中应用。1962年我国蔡四维^[4]提出了弹性半空间地基上的有限差分法, 利用梁的挠曲微分方程求解弹性地基梁, 也编制了许多表格。随着电子计算技术的迅速发展和有限单元法在土木工程中的应用, 1965年张(Y. K. Cheung)^[5]提出了用有限单元法计算弹性半空间地基上的梁和板。

上述计算弹性地基梁的理论和方法都是建立在温克勒地基或弹性半空间地基模式上。温克勒假设使弹性地基梁的计算大为简化, 因而在实际工程中曾得到广泛应用。但是, 深入的研究指出了温克勒理论的缺陷, 温克勒假设本身没有反映地基变形的连续性, 因而不能全面反映弹性地基梁的实际情况, 有时温克勒理论会得出完全错误的结论, 弹性半空间理论则假设地基是均质的、各向同性的弹性半无限体, 因而比温克勒假设更为合理, 但是, 实际上土体不是理想的均质弹性体, 弹性半空间理论没有反映土的不均匀性和地基土分层的特点, 试验和实测资料证明, 按弹性半空间理论计算的结果, 梁的内力偏大很多, 计算方法繁琐, 计算结果难以应用。

本文考虑到地基土分层的特点, 用分层总和法计算分层地基上的弹性地基梁。计算结果表明, 分层地基比温克勒地基和弹性半空间地基更为合理, 所编程序在Apple-II微机上计算, 可在实际工程中应用。

二、基本原理

长 L , 宽 B , 高 h 的弹性地基梁置于分层地基上, 如图1所示。用有限单元法分析时, 先将梁分成 n 个单元, 对于不等截面的弹性地基梁也同样将等截面部分分成若干单元。由位移法形成梁的单元刚度矩阵, 然后集合为梁的总刚度矩阵。再将梁和地基的接触面处也划分成单元, 由分层总和法计算梁节点处地基土的竖向变形(沉降), 形成地基的柔度矩阵, 然后求得地基的刚度矩阵。最后, 根据梁节点处的变形协调条件和平衡条件, 形成体系的总刚度矩阵, 由高斯消去法求得梁节点的位移, 于是可求得梁底反力和梁的内力。

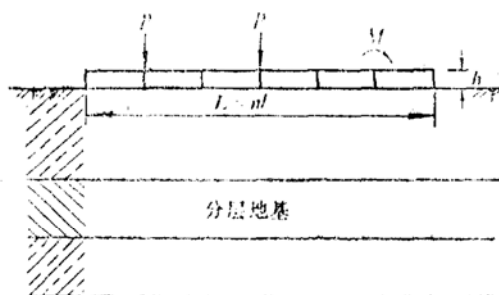


图1 计算简图

(一)梁的刚度矩阵

图2表示一梁单元的节点力 $X_i, Y_i, M_i, X_j, Y_j, M_j$ 和节点位移 $u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j$, 它们之间的关系可表示为

$$\begin{matrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{matrix}$$

(1)

式中 E ——梁材料的弹性模量;
 A, I ——分别为梁的截面积和惯性矩;
 l ——梁单元长度。

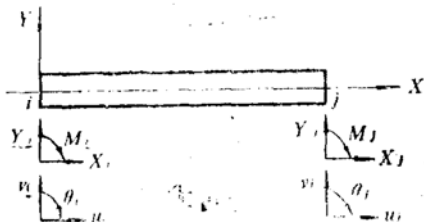


图2 梁单元结点力和位移

由式(1)可见, 节点的水平位移 u_i, u_j 只与水平节点力 X_i, X_j 有关, 故当梁上只有竖向荷载时, 可将式(1)中的 X_i, X_j 和 u_i, u_j 以及单元刚度矩阵中的相应项略去, 于是式(1)可写成如下形式:

$$\begin{Bmatrix} Y_i \\ M_i \\ Y_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2)$$

或缩写成

$$\{F\}^e = [K_B]^e \{\delta\}^e \quad (3)$$

式中 $\{F\}^e$ ——单元节点力列向量;
 $\{\delta\}^e$ ——单元节点位移列向量;
 $[K_B]^e$ ——梁的单元刚度矩阵。

将各单元集成总刚度矩阵后, 弹性地基梁在总刚度下节点力与节点位移之间关系可表示为

$$\{F\} = [K_B] \{\delta\} \quad (4)$$

式中 $\{F\}$ ——梁的节点力列向量;
 $\{\delta\}$ ——梁的节点位移列向量;
 $[K_B]$ ——梁的总刚度矩阵。

(二)地基的刚度矩阵

将梁底划分成如图3所示的各单元, 梁底单元的中心点应与相应的梁单元节点位于同一

垂线上,并假设同一梁底单元的反力为均布,即连续分布的梁底反力用阶梯形分布的反力代替。

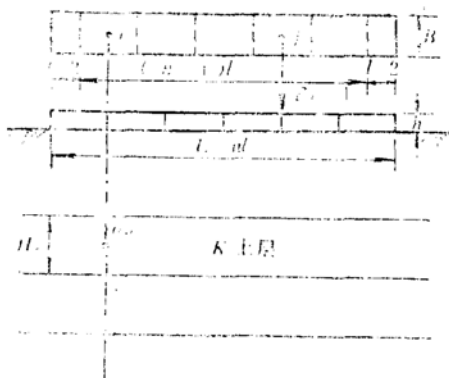


图3 梁底单元的划分

设梁底 j 单元的集中反力为 P_j , 利用弹性理论的布辛奈斯克 (Boussinesq) 公式, 可以求得当 $P_j = 1$ 时在 i 单元中点下 k 土层中点所产生的附加应力 σ_{kij} 。由分层总和法可求得由于 $P_j = 1$ 的作用在梁底点 i 所产生的地基竖向变形为

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{kij} H_{ki}}{E_{ski}} \quad (5)$$

式中 H_{ki} —— i 单元下 k 土层的厚度;

E_{ski} —— i 单元下 k 土层的压缩模量;

m —— i 单元下的土层数。

当 $j = i$ 时, 将集中反力 $P_i = 1$ 均布于 i 单元上, 同样可以由矩形均布荷载作用下, 矩形中点下地基中的附加应力计算公式求得 σ_{kii} , 然后由式 (5) 计算 f_{ii} 。这样, 梁底各单元中心点的地基竖向变形和梁底反力之间的关系可写为:

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_i \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots & f_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

或写成

$$\{W\} = [f]\{P\} \quad (7)$$

式中 $\{W\}$ ——梁底单元中心点的竖向地基变形列向量;

$\{P\}$ ——梁节点反力列向量;

$[f]$ ——地基的柔度矩阵。

由方程(7)可得

$$\{P\} = [f]^{-1} \{W\}$$

或

$$\{P\} = [K_s] \{W\}$$

(8)

式中 $[K_s]$ ——地基的刚度矩阵。

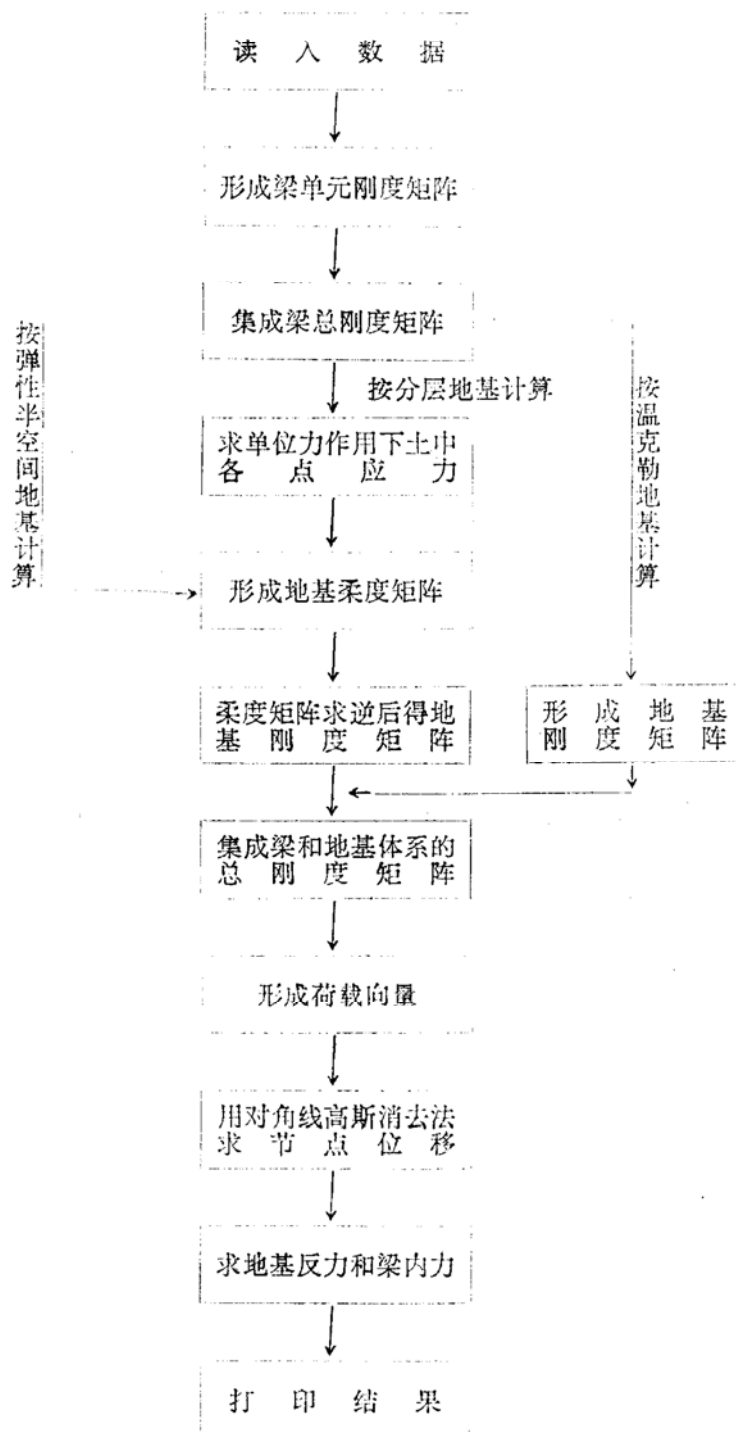


图4 程序框图

(三)总刚度矩阵

设梁节点处外荷载列向量为 $\{Q\}$, 由平衡条件得

$$\{Q\} - \{P\} = \{F\} \quad (9)$$

将式(4)和式(8)代入式(9)后得

$$\{Q\} = [K_B]\{\delta\} + [K_s]\{W\} \quad (10)$$

根据节点的变形协调条件, 梁节点的竖向位移应等于该节点处地基的竖向变形, 即

$$\{\delta\} = \{W\} \quad (11)$$

则式(10)可写为

$$\{Q\} = ([K_B] + [K_s])\{\delta\} \quad (12)$$

$$\text{令} \quad [K] = [K_B] + [K_s]$$

$$\text{则} \quad \{Q\} = [K]\{\delta\} \quad (13)$$

式中 $[K]$ ——梁和地基体系的总刚度矩阵。

由式(13)用高斯消去法可求得节点位移, 从而求得梁底反力和梁内力。

根据上述基本原理, 笔者分别对温克勒地基、弹性半空间地基和分层地基用 BASIC 语言编制了弹性地基梁程序(简称 EFB 程序)。利用本程序在 Apple-II 微机上计算一根分成 20 个单元的弹性地基梁只需 20 分钟, 分成 10 个单元就可达到差分法的精度。

程序框图见图 4:

三、三种地基模式比较

为了对弹性地基梁的三种地基模式进行比较, 分析某工程地基上的弹性地基梁, 如图 5 所示。梁长 15m, 分成 20 个单元, 梁宽和梁高分别为 2m 和 0.6m, 作用于梁上的均布荷载为 200kN/m, 相当于 $q = 100\text{kPa}$, 取梁材料的弹性模量 $E_B = 2.1 \times 10^4 \text{MPa}$ 。分层地基各土层的厚度和压缩模量如图 5 所示。对于弹性半空间地基, 取平均波桑比 $\mu = 0.2$, 各土层的弹性模量由波桑比 μ 和压缩模量 E_s 由下式换算:

$$E = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{(1 - \mu)} E_s \quad (14)$$

然后取加权平均值 $E = 4.1 \text{MPa}$ 。对于温克勒地基, 由该工程的静荷载试验资料得基床系数 $K = 10 \text{MN/m}^3$ 。

计算结果如图 6 所示。图中(a)、(b)和(c)分别表示弹性地基梁的竖向位移 W (沉降)、梁底反力与均布荷载的比值 p/q 以及梁的弯矩 M 沿半梁长的分布。由图可见, 按分层地基计算所得的竖向位移和梁的弯矩值都介于弹性半空间和温克勒地基之间, 这个结果比较符合实际, 因为工程实践和实测都表明, 弹性半空间地基计算的结果偏大, 特别是梁的内力比实测

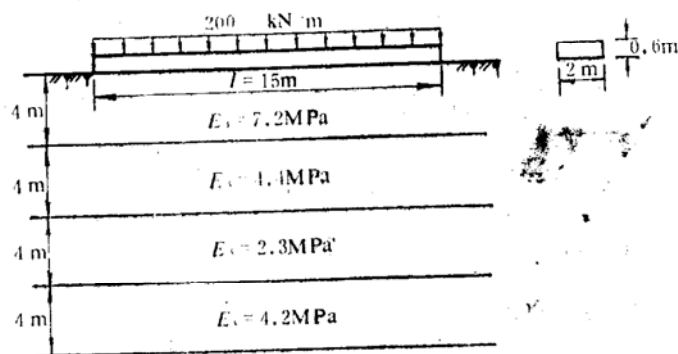


图5 实例计算条件

大很多。由图6(b)、(c)还可以看出,温克勒地基上弹性地基梁的反力为均匀分布,梁的弯矩也几乎为零,这个结果显然是不符合实际的。

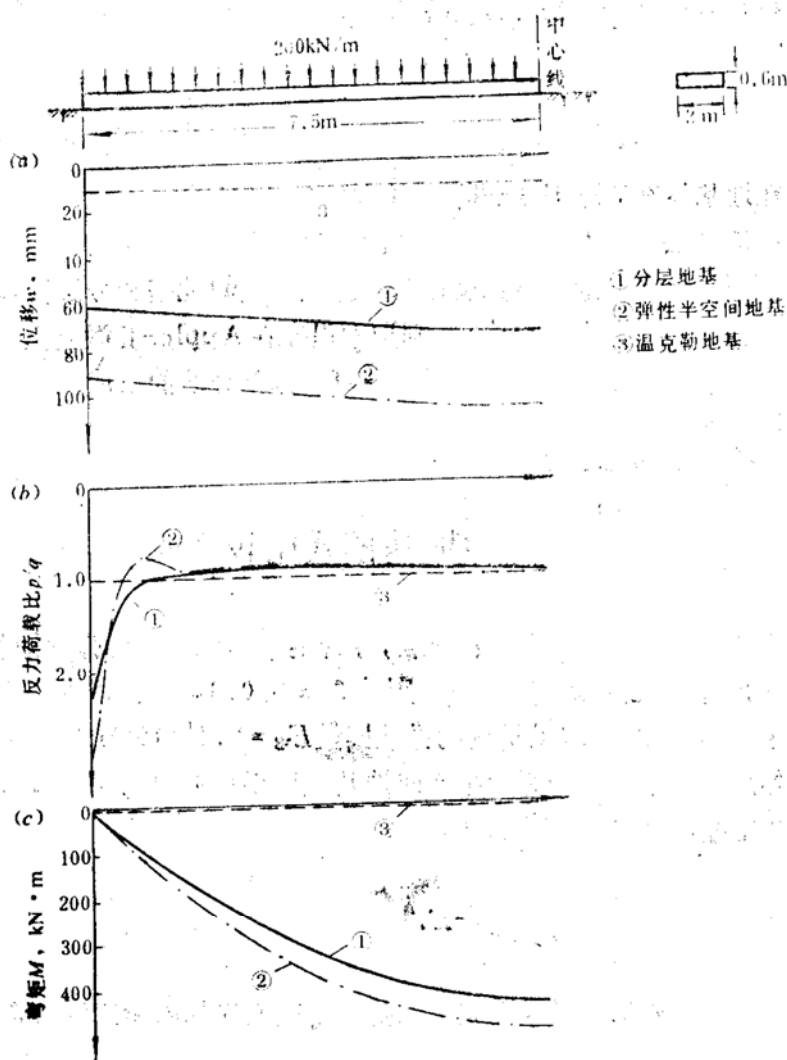


图6 均布荷载作用下三种地基模式比较

(a) 竖向位移; (b) 梁底反力和均布荷载比值; (c) 弯矩。

在以上相同的条件下,还分析了集中荷载作用的情况,得出相似的结果,如图7所示。

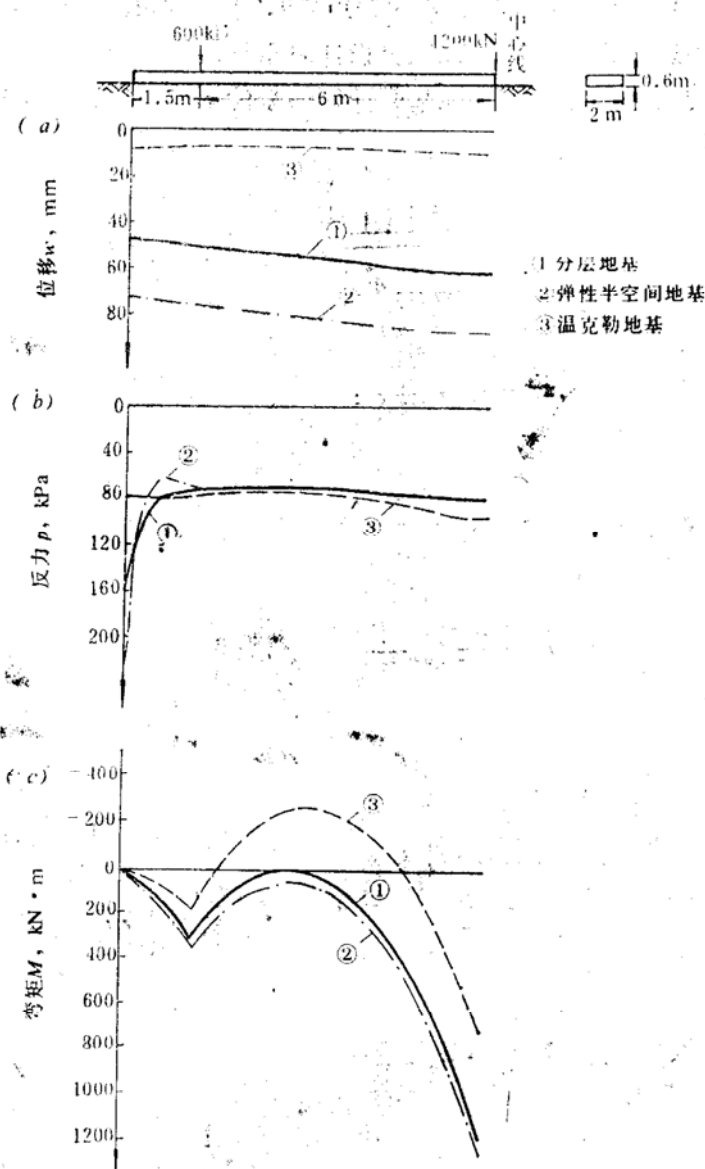


图7 集中荷载作用下三种地基模式比较

(a) 竖向位移; (b) 梁底反力; (c) 弯矩

四、弹性地基梁的不同刚度和不同地基条件对计算结果的影响

为了探讨弹性地基梁的不同刚度对计算结果的影响,在图5所示的分层地基上,分别取梁的刚度 $\lg EI$ (E ——梁材料的弹性模量, I ——梁截面的惯性矩)为2.5、3.0、3.5、4.0、4.5和5.0,相当于宽度为2m,梁高分别为96.7、142、208、306、449、659mm。

计算结果如图8所示。图8(a)表示在梁的不同刚度条件下,弹性地基梁的竖向位移沿半梁长的分布,由图可见,当梁的刚度由 $\lg EI = 2.5$ 变到 $\lg EI = 5.0$ 时,梁的竖向位移变化不大。图8(b)表示梁底反力与均布荷载的比值 p/q 沿半梁长的分布,由图可见,梁的不同刚度对梁端反力有较大影响,而对梁中部影响不大。图8(c)表示梁的弯矩沿半梁长的分布,由图可以看出,梁的弯矩随梁刚度的增加而增加。图9表示梁的中点(点1)和距梁端3.25m处(点2)两点的弯矩随梁刚度 $\lg EI$ 的变化,当梁的刚度 $\lg EI$ 从2.5变化到5.0时,点1的弯矩

从 $0.5\text{kN}\cdot\text{m}$ 增加到 $144.7\text{kN}\cdot\text{m}$, 点2的弯矩从 $0.99\text{kN}\cdot\text{m}$ 增加到 $108.1\text{kN}\cdot\text{m}$ 。可见, 梁的刚度对梁的弯矩影响很大, 这一点值得设计时重视。

为了探讨不同的地基条件对弹性地基梁计算结果的影响, 采用了不同的分层地基。地基

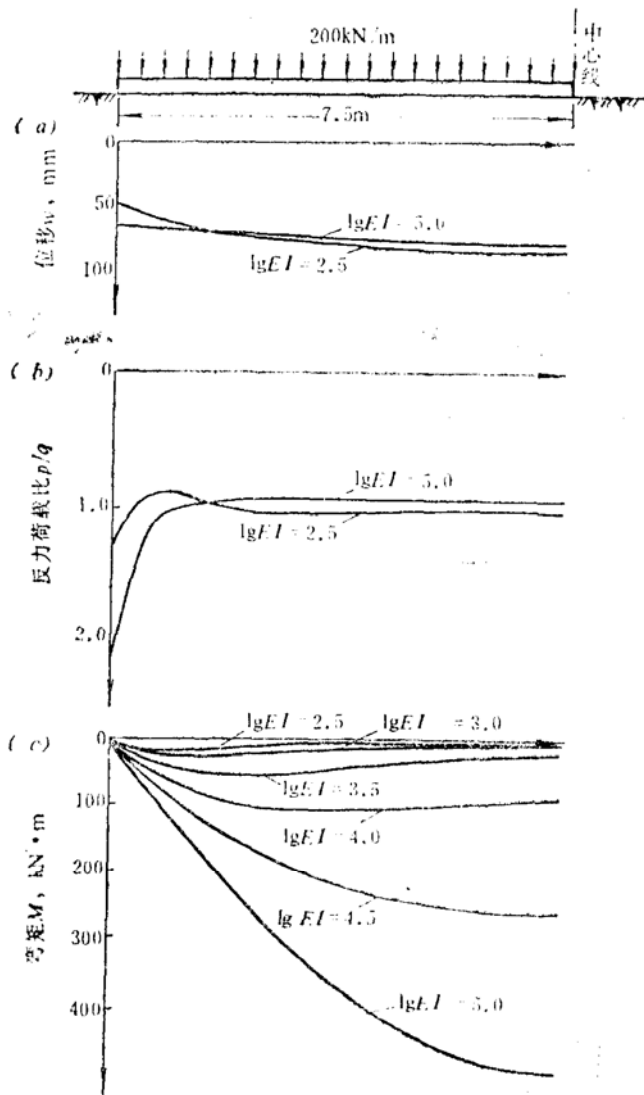


图8 弹性地基梁不同刚度的计算结果
(a)竖向位移; (b)梁底反力和均布荷载比值; (c)弯矩

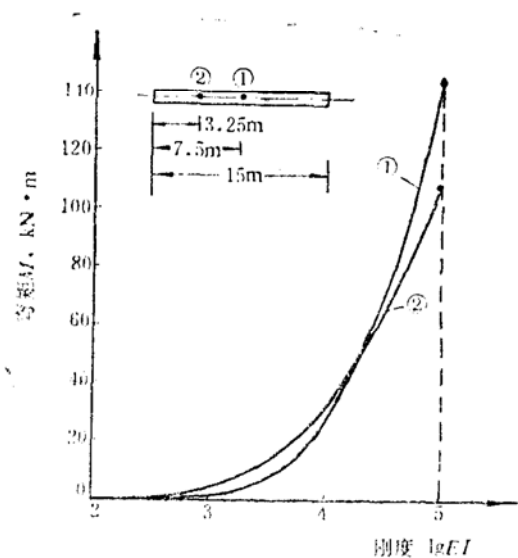


图9 梁的弯矩随刚度的变化

条件1 为上层土层较下层土层软, 地基条件2 为上层土层较下层土层硬, 两种地基条件的土层厚度和土的压缩模量详见图10。分析时, 弹性地基梁的长度仍取为 15m , 梁宽 2m , 梁高 0.6m , 均布荷载为 200kN/m 。

图10还表示了两种不同分层地基条件下弹性地基梁的计算结果。由图10(a)可见, 两种不同地基条件对梁的总竖向位移(总沉降)影响较大, 而对竖向位移的差值(沉降差)影响则较小。以梁的中点为例, 地基条件1的总沉降为 62.8mm , 地基条件2为 34.8mm , 而中点与端点的沉降差, 前者为 10.73mm , 后者为 10.66mm , 相差甚微。由图10(b)可以看出, 不同的地基条件对梁底的反力影响较小, 在端点地基条件1为 234.5kPa , 地基条件2为 256.6kPa , 在梁中点地基条件1为 96.6kPa , 地基条件2为 99.1kPa 。由图10(c)知, 地基条件对梁的弯矩影响亦较小。

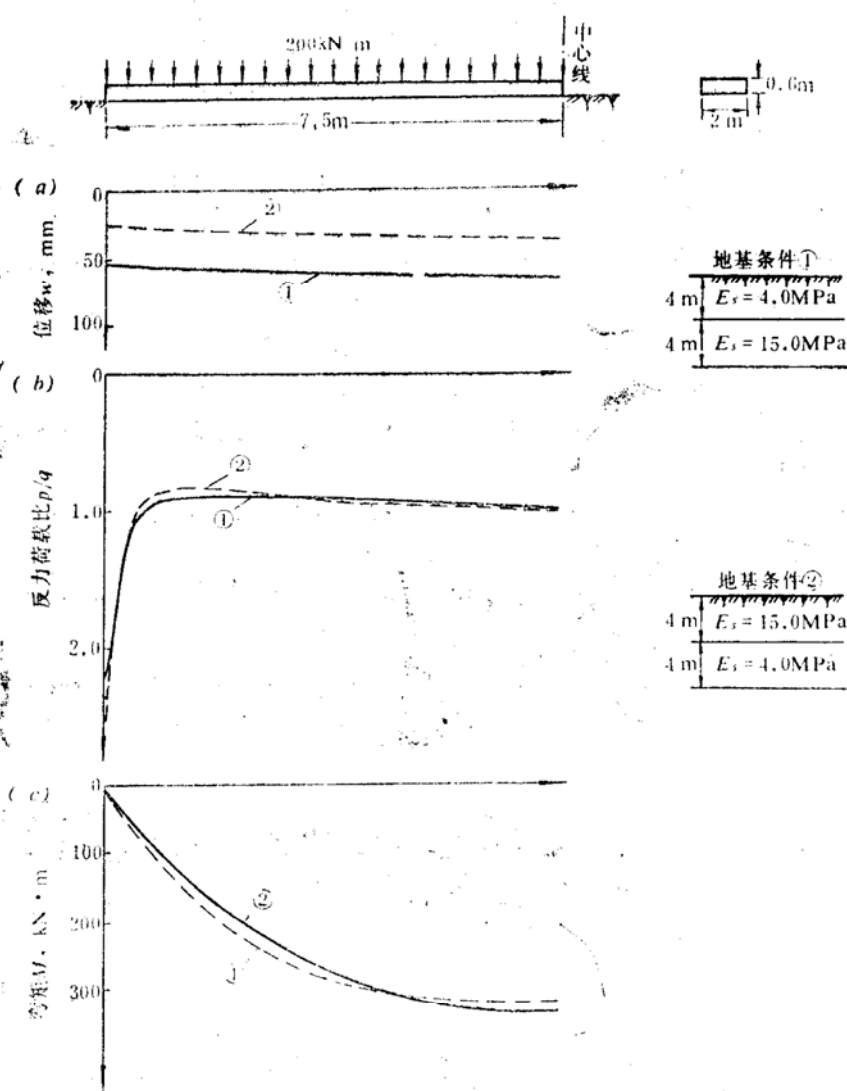


图10 两种地基条件上弹性地基梁的计算结果

(a) 竖向位移; (b) 梁底反力和均布荷载比值; (c) 弯矩

五、结 语

通过以上分析可得出以下几点结论:

1. 用有限单元法计算分层地基上的弹性地基梁是一种较好的方法。由于在计算时可以考虑土体分层的特点, 计算结果比较符合实际。所编 EFB 程序可用在 Apple-II 微机上, 便于实际应用。
2. 分析弹性地基梁时, 采用温克勒地基模式得出的结果与实际出入较大。
3. 不同的弹性地基梁刚度对梁的竖向位移和梁底反力影响不大, 但对梁的内力影响较大, 梁的弯矩明显地随弹性地基梁刚度的增加而增加, 这一点在设计时应注意。
4. 不同地基条件对弹性地基梁的总沉降影响较大, 但对沉降差、梁底反力和梁的内力影响则较小。因此, 在弹性地基梁设计时, 如果土层沿梁长方向分布是均匀的, 则不必考虑因上层土较软弱而会增加梁的内力。

参 考 文 献

- [1] Hetenyi, M., Beams on Elastic Foundations, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1946.
- [2] Zemochkin, B.N. and Sinitsyn, A.P., Practical Method for Calculation of Beams and Plates on Elastic Foundation, Strouzdlat, Moscow, 1947.
- [3] Gorbunov-Posadov, M.I., Beams and slabs on Elastic Foundations, Mashstroizdat, Moscow, 1949.
- [3] 蔡四维, 弹性地基梁解法, 上海科学技术出版社, 1962年。
- [5] Cheung, Y.K., and Zienkiewicz, O.C., Plates and Tanks on Elastic Foundation: An Application of Finite Element Method, Int. J. Solids Struct., Vol. 1, PP. 451~461, 1965.
- [6] Selvadural, A.P.S., Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction, Elsevier, S.P.C., Amsterdam-Oxford-New York, 1979.
- [7] Bowles, Joseph E., Analytical and Computer Methods In Foundation Engineering, New York, McGraw-Hill, 1974.
- [8] Haddadin, M.J., Mats and combind Footings-Analysis By the Finite Element Method, ACI, Vol. 68, No. 12, 1971, pp. 945~949.
- [9] 龙驭球, 弹性地基梁的计算, 人民教育出版社, 1982年。
- [10] 中国船舶工业总公司第九设计院, 弹性地基梁及矩形板计算, 国防工业出版社, 1983年。
- [11] Yao, Z.E. and Zhang, J.R., An Assesment of the Effects of Structure/Raft/Soil Interaction, Proc. 5th. International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya, 1985, Vol.2, pp. 813~821.
- [12] 姚祖恩、张季容, 考虑上部结构、基础和土的共同工作计算基底反力和基础内力, 计算结构力学及其应用, 第1卷, 第4期, 1984年。
- [13] 姚祖恩、张季容, 框架、筏基和土系统共同作用机理的探讨, 岩土工程学报, 第6卷, 第6期, 1984年。

Computation of a Beam on Multilayer Foundation Using Finite Element Method

Zhang Jirong, Yao Zuen and Lou Wenjuan

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

A typical beam was analysed using different models of subsoil, such as Winkler, elastic half space and multilayer. The results of analysis are compared in terms of beam stiffnesses and foundation conditions. Some interesting results which are of useful for design and a computing program, EFB, in BASIC Language which can be run on micro-computer are presented in this paper.