

粘塑性有限元分析隐式积分方案 公式的统一形式

王晓东 张 弥

(北方交通大学, 北京)

提 要

本文推导了粘塑性有限元分析中隐式积分格式的统一表达式, 它包括特雷斯卡(Tresca)、米赛斯(Von-Mises)、莫尔-库仑(Mohr-Coulomb)、德鲁克-普拉格(Drucker-Prager)和监凯维奇(Zienkiewicz)五种屈服准则。并给出一个算例以说明这种公式的效果。

一、问题的提出

目前用弹塑性理论来研究地下坑道围岩稳定问题已比较成熟, 在有限元分析中, 常用初始刚度法或变刚度法。然而用常刚度法进行弹塑性迭代时收敛较慢, 特别是塑性区较大时, 还可能出现迭代发散的情况。变刚度法虽然迭代次数少, 但每一次迭代都要重新形成刚度矩阵, 计算工作量大, 当荷载增量较大或塑性区较大时也会出现发散的情况。因此人们开始寻求新的方法来解决弹塑性问题。欣顿(E. Hinton)和欧文(D. R. J. Owen)^[1]提出粘塑性算法不但可以解决与时间有关的问题, 而且可以解决静弹塑性问题。监凯维奇和克米尔(I. C. Cormeau)^[2]提出粘塑性有限元的稳定解就是相应弹塑性问题的解。粘塑性有限元法不需要初应力法每次迭代中的应力调整过程, 它是一种加速的初应力法, 可以大大节省机时, 而且比较简单, 容易编入有限元程序。但需要注意的是采用粘塑性有限元方法时, 有显式积分方案和隐式积分方案, 显式方案是条件稳定的, 时间步长必须满足稳定条件的时间步长, 否则不能保证计算的稳定性。而隐式方案是无条件稳定的, 虽然隐式方案在每一时步内需要较长的计算时间, 但可以通过增大时间步长来补偿。

在粘塑性有限元分析中, 要求出 $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ 时步内粘塑性应变增量的显式。

$$\{\Delta \varepsilon_{vp}\}^n = \Delta t_n \{ (1 - \Theta) \{\dot{\varepsilon}_{vp}\}^n + \Theta \{\dot{\varepsilon}_{vp}\}^{n+1} \} \quad (1)$$

当 $\Theta \geq \frac{1}{2}$ 时, 由于 $\{\Delta \varepsilon_{vp}\}^n$ 与 t_{n+1} 时刻的粘塑性应变率 $\{\dot{\varepsilon}_{vp}\}^{n+1}$ 有关, 而 $\{\dot{\varepsilon}_{vp}\}^{n+1}$

尚未求出, 所以式(1)变为隐式的。为此可将 $\{\dot{\varepsilon}_{vp}\}^{n+1}$ 按泰勒(Taylor)级数展开并取前两项。

$$\left\{ \dot{\varepsilon}_{vp} \right\}^{n+1} = \left\{ \dot{\varepsilon}_{vp} \right\}^n + \frac{\partial \left\{ \dot{\varepsilon}_{vp} \right\}^n}{\partial \left\{ \sigma \right\}^n} \left\{ \Delta \sigma \right\}^n \quad (2)$$

$$\text{令} \quad [H]^n = \frac{\partial \left\{ \dot{\varepsilon}_{vp} \right\}^n}{\partial \left\{ \sigma \right\}^n} \quad (3)$$

则式(2)为

$$\left\{ \dot{\varepsilon}_{vp} \right\}^{n+1} = \left\{ \dot{\varepsilon}_{vp} \right\}^n + [H]^n \left\{ \Delta \sigma \right\}^n \quad (4)$$

式中 $\left\{ \dot{\varepsilon}_{vp} \right\}^n$ 是已知的, $[H]^n$ 和 $\left\{ \Delta \sigma \right\}^n$ 是未知的。

在 $[H]^n$ 求出以后, $\left\{ \Delta \sigma \right\}^n$ 通过一些变换可以用 $[H]^n$ 来表示^[1], 所以确定 $[H]^n$ 的显式公式就是本文要讨论的主题。文献[1]中推出了米赛斯屈服准则 $[H]^n$ 的显式公式, 文献[3]列出了莫尔-库仑和德鲁克-普拉格^[4] 屈服准则 $[H]^n$ 的显式公式(其中有些系数是错的, 可能是笔误)。但如果将每种屈服准则的显式公式都编入程序势必增加程序的复杂性, 而且程序也显得零乱, 缺乏必要的内在联系。因此本文在前人工作的基础上, 推导了四个常用的一次屈服准则和监凯维奇二次屈服准则隐式积分方案的统一公式, 这对编制有限元程序是很必要的。

二、屈服准则

本文考虑了特雷斯卡, 米赛斯, 莫尔-库仑, 德鲁克-普拉格和监凯维奇五个屈服准则, 其统一形式为

$$F = G_0 J_1^2 + G_1 J_1 + G_2 (J_2')^m + G_3 = 0 \quad (5)$$

式中系数 G_0, G_1, G_2, G_3, m 见表1, 其它符号(包括下文中用到的)说明如下: σ_m 为平均应力; J_1 为第一应力不变量; J_2 为第二应力偏量不变量; $\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z'$ 为应力偏量。

表1

屈服准则	G_0	G_1	G_2	G_3	m
特雷斯卡	0	0	$2\cos\theta$	$Y(k)$	$\frac{1}{2}$
米赛斯	0	0	1	$Y(k)$	$\frac{1}{2}$
莫尔-库仑	0	$\frac{1}{3}\sin\phi$	$(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\phi)$	$C\cos\phi$	$\frac{1}{2}$
德鲁克-普拉格	0	α	1	K'	$\frac{1}{2}$
监凯维奇	$\frac{1}{9}\sin^2\varphi$	$\frac{2}{3}(a^*-a)\sin^2\varphi$	$\frac{1}{4K^2}[(1+K)-(1-K)\sin 3\theta]^2$	$[C\cos\phi - (a^*-a)\sin\phi]^2$ $\times \left\{ \left(\frac{a-a^*}{a} \right)^2 - 1 \right\}$	1

*本文只考虑平面应变情况

表中 $a^* = C \cdot \text{ctg}\phi$; $a = \frac{6 C \cdot \cos\phi}{3\sin\phi + \text{tg}\phi}$; $K = \frac{3 - \sin\phi}{3 + \sin\phi}$;

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{(J_2')^{3/2}} \right], \theta \text{ 为洛德(Lode)角};$$

$\alpha, Y(k), K'$ ——与材料性质有关的参数。

三、 弹粘塑性模型和隐式方案的公式

地下工程的围岩常用弹粘塑性模型表示(如图 1 所示)。

该模型的总应变为

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \left\{ \varepsilon_e \right\} + \left\{ \varepsilon_{vp} \right\} \quad (6)$$

式中 $\left\{ \varepsilon_e \right\}$ ——瞬时弹性应变;

$$\left\{ \varepsilon_e \right\} = [D]^{-1} \left\{ \sigma \right\};$$

$\left\{ \varepsilon_{vp} \right\}$ ——粘塑性应变。

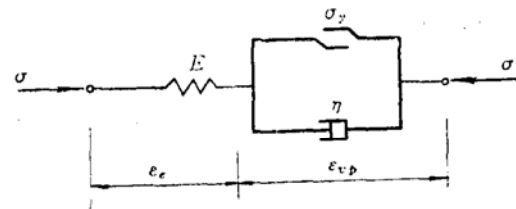


图 1

粘塑性应变率可以用关联的粘塑性流动法则表示为

$$\left\{ \dot{\varepsilon}_{vp} \right\} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \{ a \} \quad (7)$$

式中 $\gamma = \frac{1}{\eta}$, 为流变系数;

$$\langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} \phi(F) & F \geq 0 \\ 0 & F < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\left\{ a \right\} = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = C_1 \{ a_1 \} + C_2 \{ a_2 \} + C_3 \{ a_3 \} \quad (9)$$

$$\left\{ a_1 \right\}^T = \frac{\partial J_1}{\partial \{\sigma\}}; \quad \left\{ a_2 \right\}^T = \frac{\partial \sqrt{J_2'}}{\partial \{\sigma\}}; \quad \left\{ a_3 \right\}^T = \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} \quad (10)$$

其中 C_1, C_2, C_3 的展开式见表 2。

表 2

屈服准则	C_1	C_2	C_3
特雷斯卡	0	$2\cos\theta(1+\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}3\theta)$	$\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{J_2'\cos3\theta}$
米赛斯	0	$\sqrt{3}$	0
莫尔— 库仑	$\frac{1}{3}\sin\phi$	$\cos\theta[(1+\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}3\theta)$ $+ \sin\phi(\operatorname{tg}3\theta+\operatorname{tg}\theta)/\sqrt{3}]$	$\frac{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\sin\phi}{2J_2'\cos3\theta}$
德鲁克— 普拉格	α	1	0
监凯维奇	$\frac{2}{9}\sin^2\phi J_1 + \frac{2}{3}(a^*$ $- a)\sin^2\phi$	$\sqrt{J_2'} \left\{ \frac{1}{2K^2} [(1+K)-(1-K)\sin3\theta]^2 \right.$ $\left. - \frac{3(K-1)}{2K^2} \sin3\theta [(1+K)-(1-K)\sin3\theta] \right\}$	$-\frac{3\sqrt{3}(K-1)}{4K^2} \sqrt{\frac{1}{J_2'}}$ $\times [(1+K)-(1-K)\sin3\theta]$

$\phi(F)$ 可以有如下两种形式^[11]：

$$\left. \begin{aligned} \phi(F) &= \exp \left[\left(\frac{F-F_0}{F_0} \right) M \right] - 1 \\ \phi(F) &= \left(\frac{F-F_0}{F_0} \right)^N \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中 M, N 为常数，一般对岩土类材料可取为 1.0。

将式(7)代入式(3)并利用式(9)得

$$[H]^n = \gamma \left[\langle \phi \rangle \frac{\partial \{a\}^T}{\partial \{\sigma\}} + \left\langle \frac{d\phi}{dF} \right\rangle \{a\} \{a\}^T \right] \quad (12)$$

上式中需要求出的只有 $\partial \{a\}^T / \partial \{\sigma\}$ ，而

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{a\}^T}{\partial \{\sigma\}} &= C_1 \frac{\partial \{a_1\}^T}{\partial \{\sigma\}} + C_2 \frac{\partial \{a_2\}^T}{\partial \{\sigma\}} + C_3 \frac{\partial \{a_3\}^T}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}} \{a_1\}^T \\ &+ \frac{\partial C_2}{\partial \{\sigma\}} \{a_2\}^T + \frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}} \{a_3\}^T \end{aligned} \quad (13)$$

对于本文所采用的五个屈服准则有

$$\frac{\partial \{a_1\}^T}{\partial \{\sigma\}} = 0 \quad (14)$$

所以式(13)为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{a\}^T}{\partial \{\sigma\}} &= C_2 \frac{\partial \{a_2\}^T}{\partial \{\sigma\}} + C_3 \frac{\partial \{a_3\}^T}{\partial \{\sigma\}} \\ &+ \frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}} \{a_1\}^T + \frac{\partial C_2}{\partial \{\sigma\}} \{a_2\}^T + \frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}} \{a_3\}^T \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\frac{\partial \{a_2\}^T}{\partial \{\sigma\}}$, $\frac{\partial \{a_3\}^T}{\partial \{\sigma\}}$ 与屈服准则无关; $\frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}}$, $\frac{\partial C_2}{\partial \{\sigma\}}$, $\frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}}$

与屈服准则有关。

首先确定与屈服准则无关的两个量:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \{a_2\}^T}{\partial \{\sigma\}} &= \frac{\partial^2 (J_2')^{1/2}}{\partial \{\sigma\}^2} = 2(J_2')^{1/2} [M_1] - 4(J_2')^{3/2} [M_2] \\ \frac{\partial \{a_3\}^T}{\partial \{\sigma\}} &= \frac{\partial^2 J_3}{\partial \{\sigma\}^2} = [M_3] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中

$$[M_1] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \text{对} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ & & 2 & 0 \\ & & & \text{称} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$[M_2] = \begin{pmatrix} (\sigma_x')^2 & \sigma_x' \sigma_y' & 2\sigma_x' \tau_{xy} & \sigma_x' \sigma_z' \\ \text{对} & (\sigma_y')^2 & 2\sigma_y' \tau_{xy} & \sigma_y' \sigma_z' \\ & & (2\tau_{xy})^2 & 2\tau_{xy} \sigma_z' \\ & & & \text{称} & (\sigma_z')^2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$[M_3] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \sigma_z' - \frac{1}{3} \sigma_y' + \frac{1}{3} \sigma_x' & & \frac{2}{3} \sigma_z' & \frac{2}{3} \tau_{xy} & \frac{2}{3} \sigma_y' \\ \text{对} & -\frac{1}{3} \sigma_z' - \frac{1}{3} \sigma_x' + \frac{1}{3} \sigma_y' & \frac{2}{3} \tau_{xy} & \frac{2}{3} \sigma_x' & \\ & & -2\sigma_z' & -\frac{4}{3} \tau_{xy} & \\ & & & \text{称} & -\frac{1}{3} \sigma_y' - \frac{1}{3} \sigma_x' + \frac{1}{3} \sigma_z' \end{pmatrix} \quad (19)$$

[M₃]的推导利用了公式(20)

$$\frac{\partial(J_2')}{\partial\{\sigma\}} = \frac{\partial[(J_2')^{1/2}]^2}{\partial\{\sigma\}} = 2(J_2')^{1/2} \frac{\partial(J_2')^{1/2}}{\partial\{\sigma\}} \quad (20)$$

将式(10)的第二式代入式(20)得

$$\frac{\partial(J_2')}{\partial\{\sigma\}} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ 2\tau_{xy} \\ \sigma_z' \end{array} \right\} \quad (21)$$

将式(10)的第三式代入式(16)的第二式并利用式(21)化简后即可得到式(19)。

下面再求出与屈服准则有关的三个量:

1. 特雷斯卡准则

$$(1) \quad \frac{\partial C_2}{\partial\{\sigma\}} = \frac{\partial\theta}{\partial\{\sigma\}} \left[-2\sin\theta(1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} 3\theta) \right. \\ \left. + 2\cos\theta(\sec^2\theta \operatorname{tg} 3\theta + 3\operatorname{tg}\theta \sec^2 3\theta) \right] \quad (22)$$

将洛德角 θ 代入式(22)得

$$\frac{\partial C_2}{\partial\{\sigma\}} = A_1\{a_3\} + B_1\{a_2\} \quad (23)$$

式中

$$A_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2\cos 3\theta} \frac{1}{(J_2')^{3/2}} \left[-2\sin\theta(1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} 3\theta) \right. \\ \left. + 2\cos\theta(\sec^2\theta \operatorname{tg} 3\theta + 3\operatorname{tg}\theta \sec^2 3\theta) \right] \quad (24)$$

$$B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\cos 3\theta} \frac{3J_3}{(J_2')^2} \left[-2\sin\theta(1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} 3\theta) \right. \\ \left. + 2\cos\theta(\sec^2\theta \operatorname{tg} 3\theta + 3\operatorname{tg}\theta \sec^2 3\theta) \right]$$

$$(2) \quad \frac{\partial C_3}{\partial\{\sigma\}} = \frac{\sqrt{3}}{(J_2'\cos 3\theta)^2} \left[\cos\theta \cdot J_2' \cos 3\theta \cdot \frac{\partial\theta}{\partial\{\sigma\}} \right. \\ \left. - \sin\theta \left(2\sqrt{J_2'} \frac{\partial(J_2')^{1/2}}{\partial\{\sigma\}} \cos 3\theta - 3J_2' \sin 3\theta \frac{\partial\theta}{\partial\{\sigma\}} \right) \right] \\ = A_2\{a_3\} + B_2\{a_2\} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 \text{式中 } A_2 &= \frac{-3}{2(J_2')^{5/2}(\cos 3\theta)^3} \left[\cos\theta \cos 3\theta + 3 \sin\theta \sin 3\theta \right] \\
 B_2 &= (J_2' \cos 3\theta)^2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \cdot \frac{3J_3}{J_2'} (\cos\theta \cos 3\theta \right. \\
 &\quad \left. + 3 \sin\theta \sin 3\theta) - 2 \sin\theta \cos 3\theta \sqrt{J_2'} \right\}
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$(3) \frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}} = 0$$

当 $\theta = \pm 30^\circ$ 时,

$$\frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}} = 0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial \{\sigma\}} = 0, \quad \frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}} = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_2 = \sqrt{3} \tag{27}$$

2. 莫尔-库仑准则

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\partial C_2}{\partial \{\sigma\}} &= \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} \left\{ -\sin \left[(1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} 3\theta) + \sin\phi (\operatorname{tg} 3\theta - \operatorname{tg}\theta) / \sqrt{3} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \cos \left[\sec^2\theta \operatorname{tg} 3\theta + 3 \operatorname{tg}\theta \sec^2 3\theta + \sin\phi (3 \sec^2 3\theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sec^2\theta) / \sqrt{3} \right] \right\} \\
 &= A_1 \{a_3\} + B_1 \{a_2\}
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\text{式中 } A_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \cdot \frac{1}{(J_2')^{3/2}} \cdot A'$$

$$B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \cdot \frac{3J_3}{(J_2')^2} \cdot A' \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 A' &= -\sin\theta \left[(1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} 3\theta) + \sin\phi (\operatorname{tg} 3\theta - \operatorname{tg}\theta) / \sqrt{3} \right] \\
 &\quad + \cos\theta \left[\sec^2\theta \operatorname{tg} 3\theta + 3 \operatorname{tg}\theta \sec^2 3\theta + \frac{\sin\phi (3 \sec^2 3\theta - \sec^2\theta)}{\sqrt{3}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}} &= \frac{1}{(2J_2' \cos 3\theta)^2} \left\{ 2J_2' \cos 3\theta \left[\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \sin \phi \right] \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} \right. \\
 &\quad - \left(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \sin \phi \right) \left[2 \cos 3\theta \cdot 2\sqrt{J_2'} \frac{\partial (J_2')^{1/2}}{\partial \{\sigma\}} \right. \\
 &\quad \left. \left. - 6J_2' \sin 3\theta \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} \right] \right\} \\
 &= A_2 \{a_3\} + B_2 \{a_2\}
 \end{aligned} \tag{30}$$

式中 $A_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \cdot \frac{1}{(J_2')^{3/2}} \cdot A''$

$$B_2 = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \cdot \frac{3J_3}{(J_2')^2} \cdot A'' - \frac{\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \sin \phi}{(J_2')^{3/2} \cos 3\theta}$$

$$\begin{aligned}
 A'' &= \frac{1}{4(J_2')^2 \cos^2 3\theta} \left\{ 2J_2' \cos 3\theta \left[\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \sin \phi \right] \right. \\
 &\quad \left. 6 + J_2' \sin 3\theta \left[\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \sin \phi \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$(3) \quad \frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}} = 0$$

当 $\theta = \pm 30^\circ$ 时

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}} = 0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial \{\sigma\}} = 0, \quad \frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}} = 0 \\
 C_3 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \mp \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \right)
 \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

3. 米赛斯和德鲁克-普拉格准则

$$\frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}} = 0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial \{\sigma\}} = 0, \quad \frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}} = 0 \tag{33}$$

4. 监凯维奇准则

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\partial C_2}{\partial \sigma} &= \frac{\partial C_2}{\partial \sqrt{J_2'}} \cdot \frac{\partial \sqrt{J_2'}}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial C_2}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} \\
 &= A_1 \{a_3\} + B_1 \{a_2\}
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 \text{式中} \quad A_1 &= - \frac{\sqrt{3}}{2 J_2'} \left\{ \frac{3(K-1)}{K^2} \left[(1+K) - (1-K) \sin 3\theta \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3(K-1)}{2 K^2} \left[3(1+K) - 6(1-K) \sin 3\theta \right] \right\} \\
 B_1 &= \frac{1}{2 K^2} \left[(1+K) - (1-K) \sin 3\theta \right]^2
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
 &- \frac{3(K-1)}{2 K^2} \sin 3\theta \left[(1+K) - (1-K) \sin 3\theta \right] \\
 &+ \frac{3\sqrt{3} J_3}{2 \sqrt{(J_2')^{3/2}}} \left\{ \frac{3(K-1)}{K^2} \left[(1+K) - (1-K) \sin 3\theta \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3(K-1)}{2 K^2} \left[3(1+K) - 6(1-K) \sin 3\theta \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}} &= \frac{\partial C_3}{\partial \sqrt{J_2'}} \cdot \frac{\partial \sqrt{J_2'}}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial C_3}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} \\
 &= A_2 \{a_3\} + B_2 \{a_2\}
 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
 \text{式中} \quad A_2 &= \frac{27(K-1)^2}{8 K^2 (J_2')^2} \\
 B_2 &= - \frac{3\sqrt{3}(K-1)}{4 K^2} \left\{ \left(- \frac{1}{J_2'} \right) \left[(1+K) - (1-K) \sin 3\theta \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{9\sqrt{3}(K-1)}{2 (J_2')^{5/2}} \right\}
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$(3) \quad \frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial C_1}{\partial J_1} \cdot \frac{\partial J_1}{\partial \{\sigma\}} = \frac{2}{9} \sin^2 \phi \{a_1\} \quad (38)$$

对于本文所采用的五个屈服准则, 只要将相应的 $\frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}}$, $\frac{\partial C_2}{\partial \{\sigma\}}$, $\frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}}$ 代入式 (15)

就可得到 $\frac{\partial \{a\}^T}{\partial \{\sigma\}}$, 然后再将式 (15) 代入式 (12) 即可得到 $[H]^n$ 。因此可以写出 $[H]^n$ 的统一

公式

$$[H]^n = p_1 [M_1] + p_2 [M_2] + p_3 [M_3] + p_4 [M_4] + p_5 [M_5] \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad p_1 &= \gamma \langle \phi \rangle \frac{C_2}{2 (J_2')^{1/2}}; & p_2 &= -\gamma \langle \phi \rangle \frac{C_2}{4 (J_2')^{3/2}} \\ p_3 &= \gamma \langle \phi \rangle C_3; & p_4 &= \gamma \left\langle \frac{d\phi}{dF} \right\rangle \\ p_5 &= \gamma \langle \phi \rangle; & [M_4] &= \{a\} \{a\}^T \\ [M_5] &= \frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}} \{a_1\}^T + \frac{\partial C_2}{\partial \{\sigma\}} \{a_2\}^T + \frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}} \{a_3\}^T \end{aligned} \quad (40)$$

其它符号同前。

$[M_1]$, $[M_2]$, $[M_3]$, $[M_4]$ 只与应力状态有关, 而与屈服准则无关, 因此对各种屈服准则都是不变的。 $[M_5]$ 既与应力状态有关, 也与屈服准则有关。从而可以得出粘塑性隐式方案应变增量的统一显式公式。

四、算 例

为了说明公式的正确性, 本文以静水应力场中一个圆形洞室的开挖问题为例, 分别按弹塑性和弹-粘塑性情况进行应力分析。图 2 为原始应力场, 图 3 为有限元网格。原始应力 $\sigma_x = \sigma_y = 3.92 \text{MPa}$, 弹性模量 $E = 735.5 \text{MPa}$, 泊松比 $\mu = 0.35$, 粘结力 $c = 245.2 \text{kPa}$, 摩擦角 $\phi = 33^\circ$, 流变系数 $\gamma = 0.01$ 。本例采用德鲁克-普拉格屈服准则。

首先用常刚度法进行弹塑性计算, 所得洞壁径向位移 $u_r = 11.8 \text{cm}$, 塑性区如图 3 阴影部分所示。塑性区分布在洞周, 四层单元已屈服。计算时间 (CPU, 本例是在 M180 计算机上计算的) 为 2 分 24 秒。

然后用粘塑性隐式方法计算本例, 计算稳定以后, 洞壁径向位移 $u_r = 11.6 \text{cm}$, 塑性区情况与前种方法相同, 而计算时间只有 1 分 50 秒。

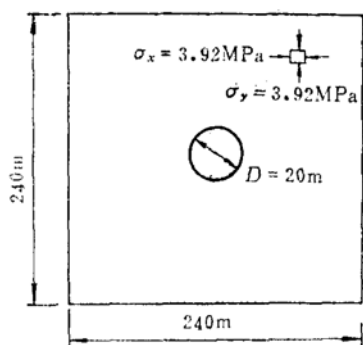


图 2

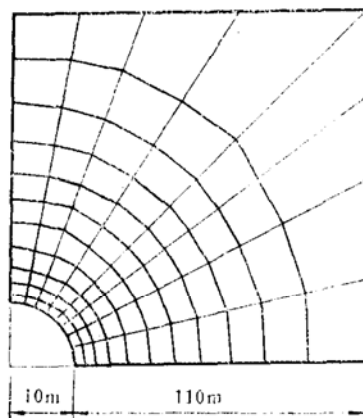


图 3

图 4 中给出了两种方法的位移对比情况。本例结果进一步说明了弹粘塑性算法可以解决弹塑性问题。在条件相同的情况下，前者比后者节省计算时间。

五、结 语

本文推导了粘塑性有限元分析中隐式积分格式的统一表达式，它对编制有限元程序是方便的。本文算例结果说明了粘塑性方法也可以解决相应的弹塑性问题，并且计算时间也比弹塑性初应力法节省。因此用粘塑性算法进行洞室开挖的弹塑性分析是可行的，它既能了解开挖过程中围岩应力和位移随时间的变化情况，又得到了最终的弹塑性解。

由于计算机时有限，本文没能对每种情况给出相应的算例。

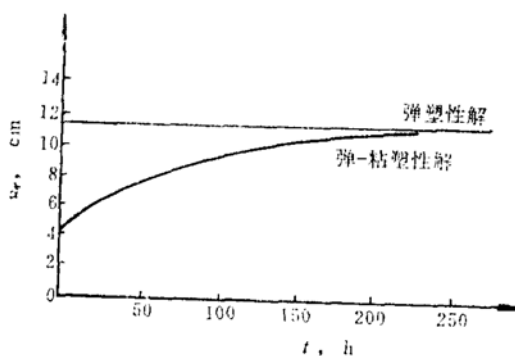


图 4

参 考 文 献

- [1] Owen, D.R.J. and Hinton, E., Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice, Pineridge, Press, 1980, pp. 271~318.
- [2] Zienkiewicz, O.C. and Cormeau, I.C. Visco-plasticity-Plasticity and Creep in Elastic Solid—A Unified Numerical Solution Approach, Int. J. Num. Meth. Engng., No.8, 1974, pp. 821~845
- [3] Owen, D.R.J., Implicit Time Integration of Elasto-viscoplastic Solids Subject to the Mohr-Coulomb Yield Criterion, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.18, No.12, 1982,
- [4] 吴凯华, 弹-粘塑性问题有限元分析的时步格, 隧道工程, 1984年第 2 期。

A Unified Expression of the Fully Implicit Time Marching Scheme in the Visco-plastic Analysis of Finite Element

Wang Xiaodong and Zhang Mi

(Northern Jiaotong University, Beijing)

Abstract

In this paper, a unified expression of the fully implicit time marching scheme in the visco-plastic analysis of finite element is derived. It incorporates five yield criterions of Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, and Zienkiewicz. A numerical example is presented to illustrate the capabilities of this expression.