

群桩-土-承台结构共同作用的数值分析

王旭东

(南京建筑工程学院勘测系, 210009)

魏道堃

宰金珉

(同济大学地下建筑与工程系, 上海, 200092) (南京建筑工程学院建筑工程系, 210009)

文 摘 本文以有限层法和有限元法为基础, 结合荷载传递函数, 建立群桩-土-承台结构共同作用的线性和非线性数值分析方法。该分析方法考虑了地基土的成层非均质性和群桩中每一单桩的非线性工作性状等因素。算例和实例表明, 在线性情况时, 本文方法与建立在 Mindlin 解基础上的分析方法之间有较好的一致性; 当计及非线性时按本方法计算所得结果与实测数据吻合。

关键词 群桩, 承台, 共同作用, 数值分析。

1 前 言

目前大多数研究群桩-土-承台结构共同作用分析方法的出发点都基于: 布辛奈斯克 (Boussinesq) 解答和明德林 (Mindlin) 解答。在此基础上, 许多学者进行了大量的研究分析, 分别提出了各种不同的分析方法。具有代表性的是 Butterfield 和 Banerjee^[1] 采用明德林位移基本解建立的弹性分析方法和 Chow^[2] 将理论 $t-z$ 曲线^[3] 与明德林位移基本解相结合提出的群桩非线性分析方法。采用布辛奈斯克解答和明德林解答的前提是把地基土当作均质、各向同性弹性体, 它难以真实反映地基土实际存在的成层非均质性等因素。本文用有限层法和有限元法, 结合荷载传递函数建立能够考虑地基土成层非均质性等因素的群桩-土-承台结构共同作用的线性和非线性数值分析方法。其基本假设: ①承台结构刚性, 且承台底面与地基土光滑接触; ②单自由度弹性杆单元模拟桩体; ③有限层元模拟层状地基土; ④传递函数模拟群桩中每一单桩(在非线性分析中)。

2 群桩-土-承台结构的剖分

如图 1 所示, 层状地基采用 n 个有限层元分割, 计算深度 H ; 承台分割成 m 个矩形单元, 每个单元中心点为节点; 每一根桩分割为 n_e 个单自由度弹性杆单元, 桩数为 n_p 根。并假设桩的存在不影响土层的连续性和物理参数。在承台节点中, 其中 $m-n_p$ 个为土节点, n_p 为桩-土共用节点。结构剖分后的节点总数 $l = m + n_e \times n_p$, 节点编号顺序先承台节点后桩身节点连续排列。

3 群桩-土-承台结构共同作用线性分析方法

3.1 共同作用基本方程建立

根据土与土、土与桩、桩与桩和桩与土之间的相互作用, 地基土支承体系平衡方程可表示为:

$$\left| \begin{array}{c|c} \delta^{SS} & \delta^{SP} \\ \hline \delta^{PS} & \delta^{PP} \end{array} \right| \cdot \left| \frac{P}{R} \right| = \left| \frac{S}{W} \right| \quad (1)$$

式中 $\left| \begin{array}{c|c} \delta^{SS} & \delta^{SP} \\ \hline \delta^{PS} & \delta^{PP} \end{array} \right|$ 为地基土支承体系柔度矩阵, 其中 $[\delta^{SS}]$, $[\delta^{PS}]$, $[\delta^{SP}]$ 和 $[\delta^{PP}]$ 分别为土与土、土与桩、桩与土和桩与桩之间相互作用柔度矩阵; $\{P\}$ 为承台节点土反力向量, $\{P\} = [P_1, P_2, \dots, P_m]^T$; $\{R\}$ 为桩身节点集中摩阻力与桩端阻力向量, $\{R\} = [R_1, R_2, \dots, R_{n_e \times n_p}]^T$; $\{S\}$ 为承台节点位移向量, $\{S\} = [S_1, S_2, \dots, S_m]^T$; $\{w\}$ 为桩身和桩端节点位移向量, $\{w\} = [w_1, w_2, \dots, w_{n_e \times n_p}]^T$ 。

式(1)可变换为

$$\left| \begin{array}{c|c} K^{SS} & K^{SP} \\ \hline K^{PS} & K^{PP} \end{array} \right| \cdot \left| \frac{S}{w} \right| = \left| \frac{P}{R} \right| \quad (2)$$

式中 $\left| \begin{array}{c|c} K^{SS} & K^{SP} \\ \hline K^{PS} & K^{PP} \end{array} \right|$ 为地基土支承体系刚度矩阵,

$$\left| \begin{array}{c|c} K^{SS} & K^{SP} \\ \hline K^{PS} & K^{PP} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \delta^{SS} & \delta^{SP} \\ \hline \delta^{PS} & \delta^{PP} \end{array} \right|^{-1}.$$

根据单自由度弹性杆单元建立桩身平衡方程如下:

$$[K_P] \cdot \{w\} = \{Q\} - \{R\} \quad (3)$$

式中 $[K_P]$ 为桩身总刚度矩阵; $\{Q\}$ 为桩顶荷载向量, $\{Q\} = [Q_1, 0, \dots, 0 \dots Q_{np}, 0, \dots, 0]^T$ 。

将式(3)中 $[K_P]$, $\{w\}$, $\{Q\}$ 和 $\{R\}$ 的阶数用零元数扩充到与式(2)中地基土支承体系刚度矩阵相同的阶数, 并与式(2)相加得桩土支承体系平衡方程如下:

$$\left| \begin{array}{c|c} K^{SS} & K^{SP} \\ \hline K^{PS} & K^{PP} \end{array} \right| \cdot \left| \frac{S}{w} \right| = \left| \frac{\bar{P}}{0} \right| \quad (4)$$

式中 $\left| \begin{array}{c|c} K^{SS} & K^{SP} \\ \hline K^{PS} & K^{PP} \end{array} \right|$ 为桩土支承体系刚度矩阵; $\{\bar{P}\} = \{P\} + \{Q\}$, 对于桩-土共用节点为承台节点土反力和桩顶荷载的合力, 对于土节点为承台节点土反力。

引入子结构法^[4], 以承台底面为边界, 将承台、群桩-土分为两个子结构, 把式(4)桩土支承体系平衡方程转化为等效承台节点边界状态方程。式(4)可分解为:

$$[K^{SS}]\{S\} + [K^{SP}]\{w\} = \{\bar{P}\} \quad (5)$$

$$[K^{PS}]\{S\} + [K^{PP}]\{w\} = \{0\} \quad (6)$$

由式(6)可得

$$\{w\} = -[K^{PP}]^{-1}[K^{PS}]\{S\} \quad (7)$$

将式(7)代入式(5)得

$$[K_b] \cdot \{S\} = \{\bar{P}\} \quad (8)$$

式中 $[K_b]$ 为承台节点等效边界刚度矩阵, $[K_b] = [K^{SS}] - [K^{SP}][K^{PP}]^{-1}[K^{PS}]$ 。

式(8)即为等效承台节点边界状态方程。

引入刚性承台条件^[5], 共同作用的基本方程可表示为

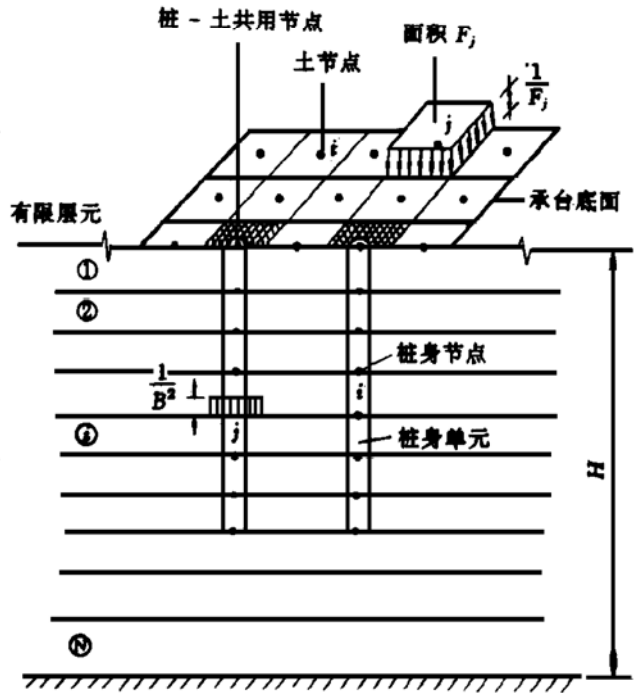


图1 群桩-土-承台结构剖分

$$\begin{vmatrix} [K_b] & -[F]^T \\ [F] & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{P} \\ v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q \\ A \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$[F] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

式中 $[K_b]$ 为承台节点等效边界柔度矩阵, $[K_b] = [K_b]^{-1}$; $\{v\} = [\theta_y, \theta_x, S_0]^T$, S_0 为承台底面在坐标原点处的竖向位移, θ_x, θ_y 分别是承台绕 x 轴和 y 轴的转角(或倾斜度); $\{A\} = [M_y, M_x, P_0]^T$, M_x, M_y 为外荷载 P_0 对 x 轴和 y 轴的力矩; x_i, y_i 为承台节点坐标。

由式(9)可解出承台节点反力 $\{\bar{P}\}$, S_0, θ_x 和 θ_y 。每一个承台节点的竖向位移可由下式计算:

$$S_i = S_0 + \theta_x \cdot y_i + \theta_y \cdot x_i \quad (i = 1 \sim m) \quad (10)$$

然后通过式(7)求得桩身节点竖向位移 $\{w\}$, 将 $\{S\}$ 和 $\{w\}$ 代入式(2)求得承台节点土反力 $\{P\}$ 、桩身节点桩侧摩阻力和桩端阻力 $\{R\}$, 各桩桩顶荷载 $\{Q\} = \{\bar{P}\} - \{P\}$ 。

3.2 地基土支承体系柔度矩阵系数计算

考虑到地基土大多呈层状分布, 土层性质各不相同, 本文采用半解析半数值有限层方法^[6]计算 $[S^S], [S^P]$ 和 $[S^P]$ 中的各元素。

在计算 $[S^S]$ 和 $[S^S]$ 中各元素时, 以强度 $1/F_j$ 的竖向均布荷载作用于承台 j 节点对应的矩形面积 F_j 上, 如图 1 所示。用有限层方法计算在 i 节点处产生的竖向位移(i 节点包括所有承台节点和桩身节点), 即可得到土与土之间相互作用系数 S_{ij}^S (其中 $i = 1 \sim m; j = 1 \sim m$), 以及土与桩之间相互作用系数 S_{lj}^S (其中 $i = m+1, l; j = 1 \sim m$)。对于桩-土共用节点, 其分配到的对应面积则为矩形面积减去桩的横截面积, 如图 1 中斜线所示区域。

在计算 $[S^P]$ 和 $[S^P]$ 中各元素时, 将原来沿桩侧和桩端连续分布的荷载用作用在桩身节点上的均布荷载代替。如图 1 所示, 以强度 $1/B^2$ 的竖向均布荷载作用于桩身节点 j 对应的等价正方形面积 B^2 上, 其中 $B = \sqrt{\pi r_0^2}$ (r_0 为桩的半径)。用有限层方法计算在 i 节点处产生的竖向位移(i 节点包括所有承台节点和桩身节点), 即可得到桩与桩之间相互作用系数 S_{ij}^P (其中 $i = m+1, l; j = m+1, l$), 以及桩与土之间相互作用系数 S_{lj}^P (其中 $i = 1 \sim m; j = m+1, l$)。

根据以上计算方法就得到 $l \times l$ 阶地基土支承体系柔度矩阵, 可将其用于共同作用计算分析。

4 群桩-土-承台结构共同作用的非线性分析方法

4.1 非线性分析方法的基本思路

Chow^[2]曾指出: 桩在承受轴向荷载情况下, 桩周土体只在桩侧附近的近场高应变区才产生非线性位移反应; 群桩间的大部分土体均处于应变水平很低的远场范围内, 可以认为只产生弹性位移反应。这一结论已被很多的实验观测所证实。根据这一结论, 可将地基土当作分层弹性介质, 采用有限层方法计算土与土、土与桩、桩与桩(不同桩之间)和桩与土(远场低应变区)之间的相互影响, 而群桩中的每一根单桩则采用荷载传递函数分析, 以考虑桩侧土(近场高应变区)的非线性工作性状。由此建立群桩-土-承台结构共同作用的非线性分析方法。

4.2 荷载传递函数的建立

由文献[7]给出桩侧荷载传递函数

$$S_s = \frac{\tau_0 r_0}{G_i} \ln \left(\frac{\frac{r_m}{r_0} - \frac{\tau_0 R_f}{\tau_f}}{1 - \frac{\tau_0 R_f}{\tau_f}} \right) \cdot e^{M_f \cdot \frac{\tau_0}{\tau_f}} \quad (11)$$

式中 S_s 为桩侧壁 $r = r_0$ 处土体的竖向位移; τ_0 为桩侧壁 $r = r_0$ 处桩侧摩阻力; G_i 为土的初始剪切模量; τ_f 为桩侧极限摩阻力; R_f 为双曲线拟合常数; M_f 为形状修正系数; r_0 为桩的半径; r_m 为剪应力的影响半径, 根据 Randolph 和 Worth 的建议, 取 $r_m = 2.5L\rho(1-\nu)$, 其中 L 为桩的入土深度; ρ 为非均质参数, $\rho = G(L/2)/G(L)$; ν 为土的泊松比。

桩端荷载传递函数^[2]可表示为

$$S_b = \frac{P_b(1-\nu_b)}{4G_b r_0 \left(1 - \frac{P_b R_t}{P_t}\right)^2} \quad (12)$$

式中 S_b 为桩端土体的竖向位移; P_b 为桩端荷载; P_t 为桩端极限荷载; R_t 为双曲线拟合常数; G_b , ν_b 分别为桩端土体的弹性剪切模量和泊松比。

采用上述桩侧荷载传递函数和桩端荷载传递函数可模拟单桩的非线性工作性状。

4.3 非线性分析中地基土支承体系柔度矩阵系数计算

在非线性分析中, 由于群桩中的每一根单桩采用荷载传递函数分析, 桩身节点的位移只与该点处的剪应力有关, 而与该桩上的其它节点的受力无关, 即不考虑同一根桩上各节点之间的相互影响。在计算 $[\delta^P]$ 中元素 δ_{ij}^P 时, 对于同一根桩上节点 i, j 来说,

$$\delta_{ij}^P = 0 \quad i \neq j \quad (13)$$

$$\delta_{ij}^P = \begin{cases} 1/k_{si} & \text{桩身节点} \\ 1/k_b & \text{桩端节点} \end{cases} \quad i = j \quad (14)$$

式中 k_{si} 是由桩侧荷载传递函数式(11)确定的桩身 i 节点处桩侧土的割线刚度, $k_{si} = 2\pi r_0 L_i \tau_{0i}/S_{si}$, 其中 L_i 为 i 节点对应的计算长度, S_{si} 和 τ_{0i} 为 i 节点处桩侧土体竖向位移和桩侧摩阻力; k_b 是由桩端荷载传递函数式(12)确定的桩端土体割线刚度, $k_b = P_b/S_b$ 。

由于 k_{si} 和 k_b 分别是 S_{si} 和 S_b 的函数, 两者都为非线性变量。

对于不同桩上的两节点 i, j 来说, 元素 δ_{ij}^P 的计算方法以及 $[\delta^S]$, $[\delta^S]$ 和 $[\delta^P]$ 中各元素的计算方法与线性分析时相同, 参见 3.2 节。由此而建立的地基土支承体系柔度矩阵为非线性矩阵。

4.4 非线性分析共同作用基本方程

非线性分析方法中共同作用基本方程的推导原理与线性分析时相同, 两者的区别在于各自建立的地基土支承体系柔度矩阵不同。3.1 节中的计算公式适用于非线性分析, 由非线性分析中地基土支承体系柔度矩阵是非线性矩阵, 由此而得到的共同作用基本方程也为非线性代数方程, 可表示为

$$\begin{vmatrix} [\bar{\delta}_b] & [F]^T \\ [F] & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P \\ v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q \\ A \end{vmatrix} \quad (15)$$

式中 $[\bar{\delta}_b]$ 为非线性分析时承台节点等效边界柔度矩阵, 是非线性矩阵。

式(15)需采用迭代法求解。

5 算例和实例

5.1 4 桩与承台共同作用线性分析

均质地基中 4 桩带承台基础, 承台宽度 $B=5d$, 桩间距 $s=2.5d$; $\lambda=E_p/G=6000$, 其中 E_p 为桩的弹性模量, G 为土的弹性剪切模量, 土的泊松比 $\nu=0.499$, 桩长分别取 $L=10d, 20d, 30d, 40d$ 和 $50d$, 桩位布置及承台尺寸见图 2。

在分析中地基土分为 14 个有限层元, 计算深度取 $2L$, 利用结构对称性取承台 1/4 分析, 承台剖分 9 个单元, 桩剖分为 10 个单自由度弹性杆单元, 共计 19 个节点。

图 3 和图 4 分别给出了在不同的 L/d 时承台基底土的荷载分担比和承台的变形特征。随着 L/d 的增大, 承台底土的荷载分担比 η 和承台的竖向位移 S 减小。从图中可知用本文方法计算的结果与 Butterfield 和 Banerjee 利用 Mindlin 位移解得到的结果^[1]有较好的一致性。

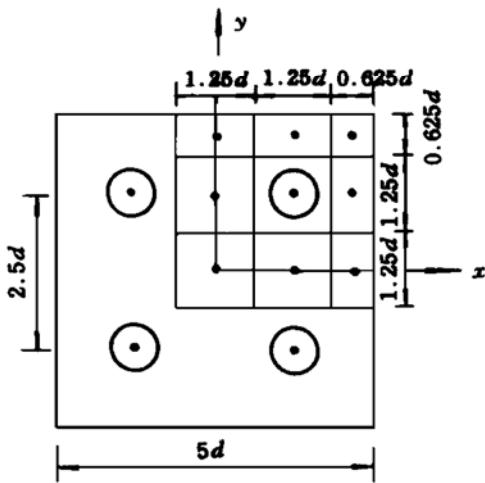


图 2 桩位布置及承台尺寸

5.2 9 桩与承台共同作用非线性分析

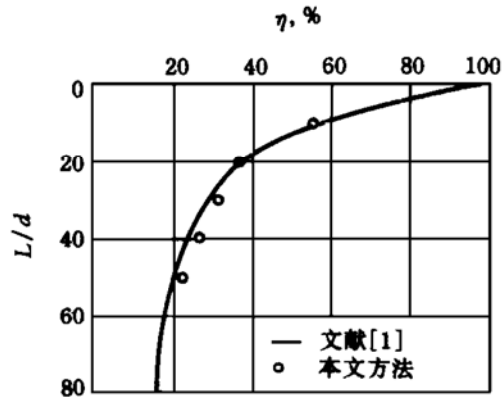


图 3 $\eta-L/d$ 关系曲线

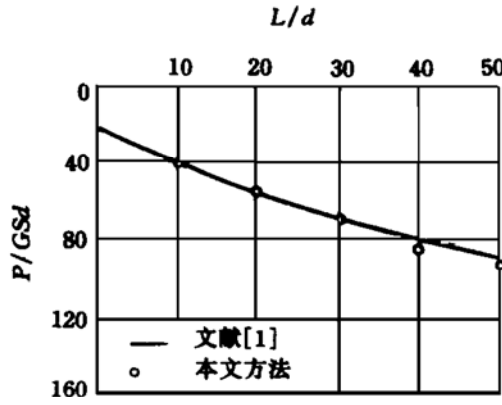


图 4 $L/d-P/GSd$ 关系曲线

本资料来自中国建筑科学研究院等单位在山东济南洛口镇所做大比例尺钻孔灌注桩模型试验。

场地地质条件: 地表至 8.0m 深范围内为均质粉砂, 8.0m 以下为流—软塑的粉质粘土, 地下水位在地表以下 8.0m 左右, 土的物理力学指标见表 1。

表 1 土的物理力学指标

深度 (m)	土名	含水量 w (%)	容重 γ (kN/m^3)	孔隙比 e	内聚力 c (kPa)	内摩擦角 φ ($^\circ$)	压缩系数 α_{1-2} (MPa^{-1})	压缩模量 E_s (MPa)
0.0~8.0	粉砂	25.3	19.1	0.70	4.0	35.5	0.116	17.0

钻孔桩桩径 25cm, 桩长 4.5m, 桩身弹性模量 23GPa, 承台宽 1.75m。桩侧极限摩阻力取值根据原报告提供的公式计算 $\tau_f=19.0+4.4z$ (kPa), z 为深度。

桩位布置和承台尺寸见图 5, 根据以上计算参数, 通过模拟计算得到承台荷载与沉降关系曲线(图 6)和土的分担比与承台荷载关系曲线(图 7)。

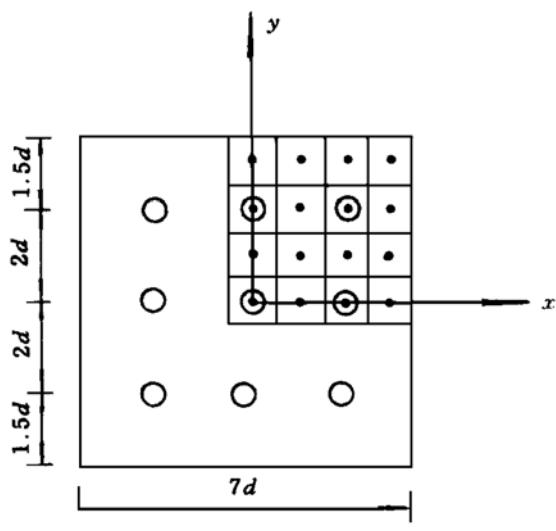


图5 桩位布置及承台尺寸

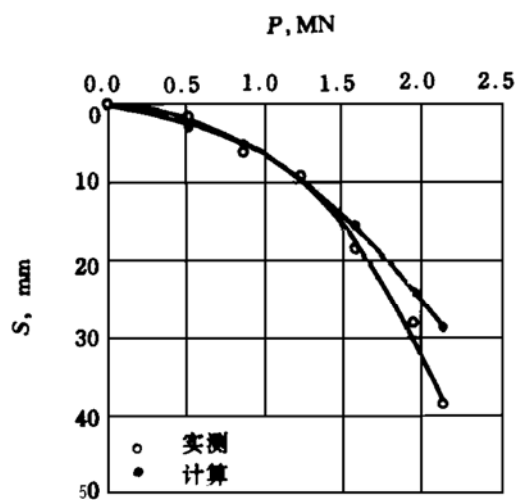
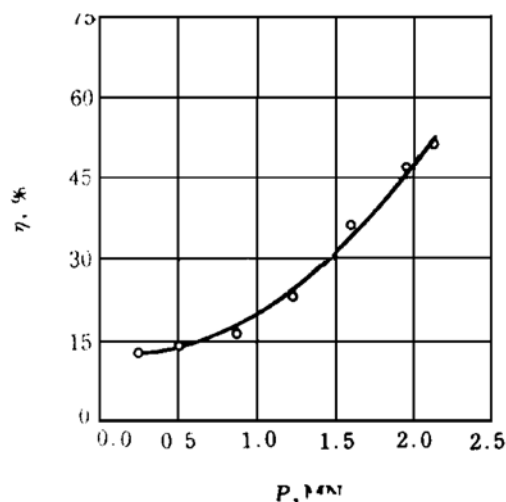


图6 承台荷载与沉降关系

计算结果表明: 当承台荷载 $P \leq 1.2\text{MN}$ 时(单桩平均荷载尚未达到单桩极限承载力前), 承台的计算沉降值与实测值非常接近, 土的分担比较小, 且变化缓慢。此时承台底部地基土中的应力水平较低, 土体处于弹性状态, 群桩-土-承台结构共同作用的实际工作性状与本文建立的分析模型一致, 故模拟的 $P-S$ 曲线有良好的精度。当承台荷载 $P > 1.2\text{MN}$ 时, 承台的计算沉降值小于实测值, 且随着荷载增加两者差距加大, 计算得到的 $P-S$ 曲线基本上按一定斜率延伸, 土的分担比明显增加。其原因在于当承台荷载大于 1.2MN 时, 群桩中每一单桩的承载力已达到极限值, 外荷的增加全部由承台底部地基土来承担, 此时地基土中的应力水平较高, 土体处于弹塑性状态。由于本文方法中只考虑地基土的线弹性本构关系, 故此时承台荷载与沉降呈现线性关系。但考虑到桩土共同分担荷载时, 土强度利用率不高, 土体恰处于弹性工作状态, 故在正常的工作荷载下, 采用本文方法得到的模拟计算结果具有较好的精度。

图7 $\eta-P$ 关系曲线

6 结 语

本文建立的群桩-土-承台结构共同作用线性和非线性数值分析方法, 改进了传统采用 Mindlin 解的做法, 从而可考虑地基土的成层非均质性等因素。在非线性分析中, 能较好地反映承台在正常工作荷载下, 承台荷载与沉降的非线性关系。通过算例和实例的计算分析, 证明了本文方法的可行性。

若用弹塑性本构关系模拟地基土的工作性状, 将可获得更合理的共同作用全过程的分析结果。本文中假设承台是刚性的, 然而可以通过改变承台板的厚度来考虑承台结构刚度变化对共同作用的影响, 并可将其上部结构刚度引入计算, 表明了该方法具有良好的发展前景。

参 考 文 献

- 1 Butterfield R, Banerjee P K. The Problem of Pile- Group- Pile Cap Interaction. *Geotechnique*, 1971, **21**(2):

135~ 142.

- 2 Chow Y K. Analysis of Vertically Loaded Pile Groups. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1986, **10**: 59~ 72.
- 3 Kraft L M, Ray R P, Kagawa T. Theoretical $t-z$ Curves. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 1978, **104**(GT12): 1465~ 1488.
- 4 宰金珉, 宰金璋. 高层建筑基础分析与设计. 北京: 中国建筑工业出版社, 1993. 410~ 414.
- 5 华南工学院等四院校编. 地基与基础. 北京: 中国建筑工业出版社, 1981. 282~ 284.
- 6 张问清, 赵锡宏, 宰金珉. 任意力系作用下层状弹性半空间的有限层分析方法. 岩土工程学报, 1981, **3**(2): 27~ 42.
- 7 王旭东, 魏道垛, 宰金珉. 单桩荷载-沉降的非线性分析. 南京建筑工程学院学报, 1994(1): 15~ 24.

Numerical Analysis of Pile Groups- Soil- Pile Cap Interaction

Wang Xu-dong

(Dept. of Geotechnical Investigation and Surveying, Nanjing Architectural and Civil Engineering Institute)

Wei Dao-duo

(Dept. of Geotechnical Engineering, Tongji University)

Zai Jin-min

(Dept. of Civil Engineering, Nanjing Architectural and Civil Engineering Institute)

Abstract Based on the finite layer method and finite element method, an approach is presented for linear and non-linear numerical analysis of pile groups- soil- pile cap interaction. This approach can consider the effect of layered non-homogeneous soils and non-linear responses of individual piles in pile groups. For linear analysis, the results obtained by proposed method agree with those based on Mindlin's solution. The computed non-linear response of interaction compares favourably with measured results from field tests.

Key words pile groups, pile cap, interaction, numerical analysis.