

短 文

不对称荷载作用下圆洞围岩塑性区的估算方法

严 克 强

(电力工业部东北勘测设计院)

一、引 言

围岩稳定性的评价,是地下洞室支护(或衬砌)设计的一项重要工作内容,一向为工程技术人员所重视。由于许多隧洞需要通过质地软弱的岩层,或者就在范围宽阔的这类岩层中建造,因此近年来在围岩稳定性计算中弹塑性的分析方法得到了越来越多的应用。

直到目前为止的一段很长时间内,已有不少人对地下洞室围岩的弹塑性计算问题进行过多方面的研究工作,也取得了很有价值的成果。但是,这些研究大都只限于轴对称荷载(即 $\lambda = P_H/P_V = 1$)的这一理想条件,对于实际工程中所经常遇到的 $\lambda \neq 1$ 的情况至今尚未见到解答。因此,工程实用上只能借助于模型试验结果或引用 $\lambda = 1$ 的公式来进行近似计算(以下将要看到这样做的误差是很大的)。可见,解决不对称荷载(即 $\lambda \neq 1$)作用下围岩塑性区的计算问题是具有重要意义的。本文仅就这方面的问题进行某些探讨,供有关方面参考。

二、 $\lambda = 1$ 时的弹塑性分析

为便于分析,先讨论 $\lambda = 1$ 的情况。“ λ ”称为侧压系数,由下式决定:

$$\lambda = \frac{P_H}{P_V} \quad (1)$$

式中 P_H ——岩层中的“水平压力”;

P_V ——岩层中的“垂直压力”。

$\lambda = 1$,即 $P_H = P_V$,这就是一般所谓的“轴对称荷载”或“静水压力状态”。这种条件下的弹塑性解答,通常是根椐应力平衡方程和塑性条件,以及洞室周边的支护条件给出各种应力的表达式,然后再利用弹塑性区域交界面上的已知条件来推求塑性半径的计算公式。

假设围岩中的某一点达到了塑性状态,则它必须满足塑性条件(或称极限平衡条件):

$$\sigma_1 = B\sigma_3 + A(B-1) \quad (2)$$

式中 σ_1 、 σ_3 分别为最大和最小主应力;

$$A = c \cdot \text{ctg} \varphi,$$

$$B = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi},$$

c 、 φ 分别为围岩的“粘聚力”和“内摩擦角”。

此外,该点上的各种应力还必须满足应力平衡条件,对圆洞而言,有:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \Delta = 0 \tag{3}$$

式中的各种符号见图 1。

当 $\lambda = 1$ 时, $\tau_{\theta z} = 0$, 若按“无重平面”考虑, 则 $\Delta = 0$, 因此(3)式变为:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \tag{4}$$

这里, σ_θ 和 σ_r 都是主应力。令 $\sigma_\theta = \sigma_1$, $\sigma_r = \sigma_3$, 利用(2)并求解微分方程(4)得:

$$(B-1) \ln r + C_1 = \ln(\sigma_r + A) \tag{5}$$

式中的 C_1 为积分常数, 可由边界条件决定。当洞壁未加有效支护时, $\sigma_r = 0$ 。故有 $r = a$, $\sigma_r = 0$, 代入(5)式求得:

$$C_1 = \ln A - (B-1) \ln a$$

把 C_1 值代入(5)式并简化后得:

$$\sigma_r = A \left[\left(\frac{r}{a} \right)^{B-1} - 1 \right] \tag{6}$$

(6)式表达了在塑性区内径向应力的分布规律。考虑(2)式后, 也可以得到切向应力的计算公式:

$$\sigma_\theta = A \left[B \left(\frac{r}{a} \right)^{B-1} - 1 \right] \tag{7}$$

显然, 若令(6)、(7)式中 $r = R$ (R 为塑性半径), 就可以得到塑性区与弹性区交界面上的应力状态。根据塑性半径(R)的定义可知, 在 $r = R$ 处其应力状态既满足塑性条件也要满足弹性条件, 即:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= B\sigma_r + A(B-1) \\ \sigma_\theta + \sigma_r &= 2P_V = 2P_H = 2P_0^{(*)} \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

由(8)可得 $r = R$ 处的径向应力为:

$$\sigma_{r(r=R)} = \frac{2P_0 - A(B-1)}{B+1} \tag{9}$$

把(9)代入(6)并简化后得:

$$R = a \left[\frac{2(P_0 + A)}{A(B+1)} \right]^{\frac{1}{B-1}} \tag{10}$$

(10)式即为“塑性区半径”的计算公式, 若把 A 、 B 值代入, 上式便可取得“卡斯特纳(H·Kastner)方程”的表达式:

$$R = a \left[\frac{(P_0 + c \cdot \text{ctg} \varphi)(1 - \sin \varphi)}{c \cdot \text{ctg} \varphi} \right]^{\frac{1-\sin \varphi}{2 \cos \varphi}} \tag{11}$$

三、 $\lambda < 1$ 时围岩塑性区的计算

首先讨论水平轴(即 $\theta = 0$)上塑性区的发展情况。这样做的理由是:

1. 当 $\lambda < 1$ 时, 该处的应力集中现象最为严重, 同时其塑性破坏区域也最大;
2. 为本文在以下所进行的分析创造条件。

* 当 $P_H = P_V$ 时, 习惯上以 P_0 来表示外力。

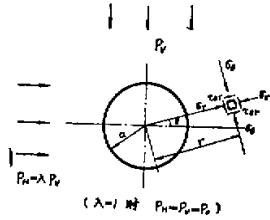


图 1

众所周知,弹性围岩的应力分布情况可用下式(常称“基尔希公式”)表示:

$$\sigma_{\theta} = \frac{P_V}{2} \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)(1 + \lambda) + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)(1 - \lambda) \cos 2\theta \right] \quad (12)$$

$$\sigma_r = \frac{P_V}{2} \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)(1 + \lambda) - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)(1 - \lambda) \cos 2\theta \right] \quad (13)$$

$$\tau_{\theta r} = -\frac{P_V}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right)(1 - \lambda) \sin 2\theta \quad (14)$$

式中各种符号的意义见图 1。

从(12)式中可以看出,成洞后岩体中的应力条件发生了巨大的变化。但根据力的平衡原理可知,不管开洞前后围岩应力产生多么大的变化,作用在水平轴线上的总荷载是永远保持不变的。同样,当围岩出现塑性区后,虽然它的应力又产生了新的变化,但作用在水平轴线上的总荷载仍保持不变。下面,我们将根据这一“假定”来确定水平轴上(即 $\theta = 0^\circ$)塑性区的发展过程。

当 $\theta = 0^\circ$ 时, (12)式变成:

$$\sigma_{\theta_0} = P_V \left[1 + \frac{1 + \lambda}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{3(1 - \lambda)}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \right] \quad (15)$$

显然,水平轴上的总荷载可通过对(15)式的积分求得:

$$Q_0 = \int_a^{\infty} \sigma_{\theta_0} dr \quad (16)$$

一般认为,切向应力的集中现象只在围岩中 $r \approx 5a$ 的范围内发生,故实用上可以 $5a$ 为(16)式的积分上限,但考虑到出现塑性区以后它的影响范围的显著扩大,因此在以下的计算中以 $20a$ 作为(16)式的上限。

经计算(已略去 $\frac{1}{8000}$ 和 $\frac{1}{20}$)得:

$$Q_0 = 20P_V \cdot a \quad (17)$$

(17)式表明,在所考虑的范围,成洞后的围岩应力虽然变化很大,但总的作用荷载仍和开洞以前一样。

现在假设围岩出现了塑性区,此时各种应力将在(12)、(13)、(14)式的基础上产生新的变化。图 2

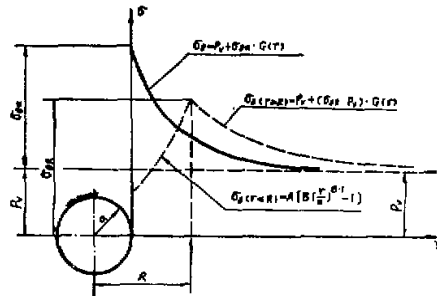


图 2

是 $\theta = 0^\circ$ 处 σ_{θ} 变化情况的示意图。从中可见,此时的总荷载为:

$$Q_R = \int_a^R \sigma_{\theta}(r < R) dr + \int_R^{20a} \sigma_{\theta}(r < R) dr \quad (18)$$

不难看出,为了求得 Q_R 值必须确定在 $r \leq R$ 和 $r \geq R$ 这两个区段内 σ_{θ} 的分布规律。

由(14)式可知,当 $\theta = 0^\circ$ 时, $\tau_{\theta r} = 0$, σ_{θ} 和 σ_r 都是主应力,这种情况与前节的计算条件一样。因此, $\sigma_{\theta}(r < R)$ 仍可用(7)式表示,即

$$\sigma_{\theta(r < R)} = A \left[B \left(\frac{r}{a} \right)^{B-1} - 1 \right] \tag{19}$$

下面，我们来确定当 $r \geq R$ 时 σ_{θ} 的表达式。

一般认为，在塑性区以外的弹性区域内，其应力分布规律仍符合基尔西公式，只是以 R 取代 a 而已。为具体描述 $r \geq R$ 时的 $\sigma_{\theta} \sim r$ 关系，将(12)式改写成如下形式：

$$\sigma_{\theta} = P_V + \sigma_{\theta a} \cdot G(r) \tag{20}$$

式中 $\sigma_{\theta a}$ 的意义见图 2，而 $G(r)$ 是 r 的某种函数式。

由图 2 可直接求得

$$\sigma_{\theta a} = P_V(2 - \lambda) \tag{21}$$

考虑了(15)和(21)式后，可把 $G(r)$ 表为：

$$G(r) = \left[\frac{1 + \lambda}{2(2 - \lambda)} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{3(1 - \lambda)}{2(2 - \lambda)} \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right] \tag{22}$$

综合上述结果可把 $\sigma_{\theta(r < R)}$ 表为：

$$\sigma_{\theta(r < R)} = (\sigma_{\theta R} - P_V) \left[\frac{1 + \lambda}{2(2 - \lambda)} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \frac{3(1 - \lambda)}{2(2 - \lambda)} \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] + P_V \tag{23}$$

式中 $\sigma_{\theta R}$ 的意义见图 2。

把(19)和(23)代入(18)后得：

$$Q_R = \int_a^R A \left[B \left(\frac{r}{a} \right)^{B-1} - 1 \right] dr + \int_R^{\infty} \left\{ (\sigma_{\theta R} - P_V) \left[\frac{1 + \lambda}{2(2 - \lambda)} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \frac{3(1 - \lambda)}{2(2 - \lambda)} \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] + P_V \right\} dr \tag{24}$$

式中的 A 、 B 、 a 、 λ 等均为已知的常数， R 和 $\sigma_{\theta R}$ 是待求量，但它们只是 A 、 B 、 a 、 λ 等值的函数，而与无关。因此在进行积分时可把它们作为常量来看待。若令 $R = xa$ (即 R 以 a 的 x 倍来表示)，对(24)式积分 r 并略去 $\frac{1}{8000}$ 和 $\frac{1}{20}$ 后得：

$$Q_R = Aa(x^B - x) + P_V \cdot a(20 - x) + Aa \left(\frac{Bx^B - x}{2 - \lambda} \right) - P_V a \left(\frac{x}{2 - \lambda} \right) \tag{25}$$

根据前述假定应有：

$$Q_0 = Q_R \tag{26}$$

把(17)和(25)式代入(26)式并简化后得：

$$Ax^{B-1} = \frac{(A + P_V)(3 - \lambda)}{2 - \lambda + B}$$

$\therefore R = xa$ ，即 $x = \frac{R}{a}$ ，故上式变为：

$$R = a \left[\frac{(A + P_V)(3 - \lambda)}{A(2 - \lambda + B)} \right]^{\frac{1}{B-1}} \tag{27}$$

若把 A 、 B 之值代入上式，可得：

$$R = a \left\{ \frac{(c \cdot \text{ctg} \varphi + P_V)(3 - \lambda)(1 - \sin \varphi)}{c \cdot \text{ctg} \varphi [(3 - \lambda) - (1 - \lambda) \sin \varphi]} \right\}^{\frac{1 - \sin \varphi}{2.53 \sin \varphi}} \tag{28}$$

(27)或(28)式就是 $\lambda \neq 1$ ， $\theta = 0^\circ$ 时塑性区范围的计算公式。作为一种特例，若 $\lambda = 1$ (即 $P_s = P_0$)，则上述两式分别变为：

$$\left. \begin{aligned} R &= a \left[\frac{2(A + P_0)}{A(B + 1)} \right]^{\frac{1}{B-1}} \\ R &= a \left[\frac{(P_0 + c \cdot \text{ctg} \varphi)(1 - \sin \varphi)}{c \cdot \text{ctg} \varphi} \right]^{\frac{1 - \sin \varphi}{2.53 \sin \varphi}} \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

不难看出, (29)式与前节所得结果(即(10)和(11)式)完全一样,这就再一次说明,这里所采用的“假定”是合理的。

模型试验结果和实际洞室的破坏情况表明,当 $\lambda < 1$ 时,围岩的塑性破坏将以“滑动楔体”的形式在洞室的两侧出现:当 $\theta = 0^\circ$ 时, R 最大;随着 θ 的增大, R 迅速减小,并在 $\theta = \theta_B$ 处与洞室轮廓线相交(即 $R = a$),见图3。 R 随着 θ 而变动的轨迹线可用下述方法来给出:首先求出这条曲线的交点坐标,然后再根据已知条件给出它的函数表达式。

显然,当 $\theta = 0^\circ$ 时, R 值可由(27)式确定。

θ_B 点可根据边界条件和在 $r = R$ 界面上的应力既满足塑性方程也满足弹性方程这两个条件来确定。由于交点位于洞壁(即 $r = a$),故有 $\sigma_r = 0$, $\tau_{\theta r} = 0$,由塑性条件,即(2)式直接得出,

$$\sigma_{\theta\theta} = A(B-1) \quad (30)$$

把由(30)式确定的 $\sigma_{\theta\theta}$ 值代入(12)并简化后得:

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\theta_B &= \left[\frac{A(B-1) - P_V(1+\lambda)}{2P_V(1-\lambda)} \right] \\ \text{或} \quad \theta_B &= \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[\frac{A(B-1) - P_V(1+\lambda)}{2P_V(1-\lambda)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

由(31)式可见: θ_B 与 P_V 、 A 、 B 、 λ 等因素有关,那种把它视为常数的习惯作法是不符合实际的。上式也表明, λ 值对 θ_B 的影响很大,当 $\lambda = 1$ 时该式没有意义,即此时的塑性区与洞室轮廓线没有交点。

由(12)、(13)、(14)式和图3可以推论, R 的大小与 $\cos 2\theta$ 有关,现设:

$$R = a \frac{m}{n + \cos 2\theta} \quad (32)$$

再根据轨迹线上已知的两个点,用(27)和(31)式来决定上式中的系数 m 和 n 。

由(27)知,当 $\cos 2\theta = 1$ (即 $\theta = 0^\circ$)时,

$$R = a \left[\frac{(A+P_V)(3-\lambda)}{A(2-\lambda+B)} \right]^{\frac{1}{B-1}}$$

$$\text{令 } Q = \left[\frac{(A+P_V)(3-\lambda)}{A(2-\lambda+B)} \right]^{\frac{1}{B-1}}, \text{ 有}$$

$$R = aQ$$

代入(32)后得

$$m = (n+1)Q \quad (33)$$

由(31)知,当 $\cos 2\theta = \frac{A(B-1) - P_V(1+\lambda)}{2P_V(1-\lambda)} = K$ 时,

$$R = a$$

代入(32)后得

$$m = n + K \quad (34)$$

由(33)和(34)得

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{Q(1-K)}{1-Q} \\ n &= \frac{Q-K}{1-Q} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

把(35)代入(32)并简化后得

$$R = a \left[\frac{Q(1-K)}{(Q-K) + (1-Q)\cos 2\theta} \right] \quad (36)$$

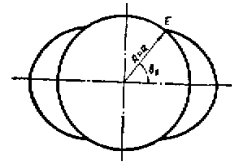


图 3

(36)式就是计算塑性区轨迹线的公式。当 A 、 B 、 P_0 、 λ 等值已知时， K 、 Q 也成定值，因此 R 只与 α 和 θ 有关。若 α 为已定， R 只是 θ 的函数。

四、算 例

(1) 某工程的隧洞在没有构造残余应力的第三纪砂砾岩层中修建，隧洞直径5m，上复岩层厚度约430m。岩层的单位容重为 $2.3t/m^3$ ，泊桑比为0.25，内摩擦角 $\phi = 45^\circ$ ，粘聚力 $c = 10kg/cm^2$ 。考虑开挖后随着围岩的松弛变形 φ 、 c 值下降到 $\phi = 38.6^\circ$ ， $c = 8kg/cm^2$ 。因隧洞长期过水，围岩浸水后 ϕ 、 c 又进一步下降到 $\phi = 30.9^\circ$ ， $c = 6kg/cm^2$ 。现确定上述几种条件下围岩塑性区的大小。

根据已给条件，求得 $P_0 = 100kg/cm^2$ ， $\lambda = 0.33$ ，利用(27)式和(36)式求得的结果示于图4中。

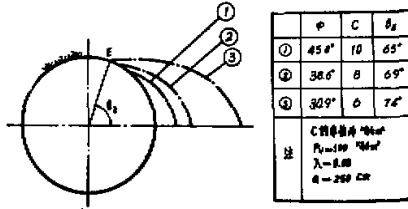


图 4

(2) 应用上述指标，以 $\theta = 0^\circ$ 为例比较当 $\lambda \neq 1$ 和 $\lambda = 1$ 时计算结果的区别。分别以(27)和(29)式求得不同 B 值时的塑性半径 R ，结果如图5。

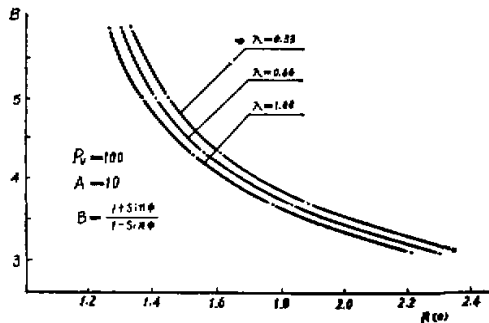


图 5

从图5中可见，几种不同条件的计算结果是有明显差别的，而且用(29)式所得结果偏小了许多，这种情况应该引起使用部门的注意。

参 考 资 料

- (1) 铁道部科学研究院西南研究所，圆形洞室软弱围岩的弹塑性分析，1975年10月。
- (2) Rabcevic, L.V., Stability of Tunnels under Rock Load, Water Power, No.6.7. 8, 1969.
- (3) 郑颖人，圆形洞室围岩压力理论探讨，地下工程，1979年第3期。
- (4) 中国人民解放军八九〇〇二部队，坑道模型对比试验报告，1976年7月，直墙拱顶洞室模型试验报告，1978年5月。