

Newton-PCG 复合算法在饱和砂土边坡液化数值模拟中的应用

黄林冲^{1,2}, 徐志胜³, 黄建陵³, 周翠英^{1*}

(1. 中山大学工学院, 广东 广州 510275; 2. 西北大学土木与环境工程系, 伊利诺伊 埃文斯顿 60208, 美国; 3. 中南大学土木建筑学院, 湖南 长沙 410075)

摘要: 引入 Newton-PCG 算法, 编制了算法程序, 建立了流-固耦合砂土模型, 实现了饱和砂土边坡液化问题的有限元数值模拟。采用一次牛顿步, 和多步预条件共轭梯度子迭代的 Newton-PCG 复合算法, 编制了算法的 FORTRAN 语言程序。基于临界状态塑性模型框架, 给出了饱和状态下砂土固-液耦合模型的本构关系, 再现了某饱和砂土边坡液化的力学状态, 探讨了水压力分布与流动特性。结果表明: Newton-PCG 算法能更有效地进行大规模非线性求解; 建立的模型能较好地反映砂土-流体耦合状态下的力学行为; 多孔介质中由于流体的流动, 孔隙水压力对砂土液化的力学行为影响较大, 在局部剪切带即将形成的区域, 水压力值明显增大, 而且方向指向剪切带的外法线方向; 根据液化发生准则, 画出了边坡发生液化的滑动面, 对于预测边坡的发生具有重要的现实意义。

关键词: Newton-PCG; 砂土; 本构模型; 液化; 算法

中图分类号: TU441 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2009)11-1717-06

作者简介: 黄林冲(1981-), 男, 湖北咸宁人, 博士讲师, 从事岩土工程和防灾安全研究。E-mail: huanglinchong@gmail.com。

Application of Newton-PCG composite algorithm to numerical simulation of liquefaction in saturated sand slopes

HUANG Lin-chong^{1,2}, XU Zhi-sheng³, HUANG Jian-ling³, ZHOU Cui-ying¹

(1. School of Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China; 2. Department of Civil and Environmental Engineering, Northwestern University, Evanston, IL 60208, USA; 3. School of Civil and Architectural Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: A recently proposed model coupled with the solid-fluid of the saturated sand is utilized by introducing the Newton-PCG algorithm. A Newton-PCG composite algorithm is established, with a Newtonian step and p steps of preconditioned conjugate gradient, which is coded by FORTRAN program. Based on the critical state plasticity model, a model coupled with the solid-fluid of the saturated sand is derived by considering the function of the fluid flow. FEM numerical simulation of a saturated sand slope is performed to study the onset and development of the liquefaction, and the mechanism of the pore pressure and the liquefaction are discussed at last. The results show that the Newton-PCG algorithm can solve the multidimensional nonlinear problems efficiently. The proposed constitutive model works well, and can reflect the mechanical behaviors of the coupling of the sand-fluid. It is also found that the pore pressure will affect the development of the shear band greatly. What is more, the pore pressure increases around the shear band region obviously with the direction toward the outer side of the normal of the shear band. The slip surface of the slope liquefaction is obtained according to the criteria for the onset of liquefaction, which will be important to predict the onset of the liquefaction.

Key words: Newton-PCG; sand; constitutive model; liquefaction; algorithm

0 引 言

在非黏性土中, 当加载速率过快, 在孔隙水流出之前水压力会突然增大, 导致了液化现象的发生^[1-3]。

基金项目: 美国国家科学基金项目 (CMMI-0726908); 国家自然科学基金项目 (40672194); 铁道部科技司重点课题 (2006G007-C)

收稿日期: 2008-07-28

*通讯作者: ueit@mail.sysu.edu.cn

在应力场中, 由于有效应力和剪切强度可能降为零, 这时的介质会呈现出像液体一样的力学性质。一般来说, 液化现象通常伴随着地震而发生, 但是在静载条件下, 这种现象同样时有发生, 它会很大程度上降低材料的承载力, 从而影响结构的稳定性。从 20 世纪 80 年代起, 岩土材料的变形局部化研究逐渐得到人们的重视; 尤其是对于饱和砂土的变形带, 由于存在液化可能性以及土体和流体的耦合作用, 已成为岩土界的一个热点问题^[4-6]。

对于砂土液化现象, Borja^[7]基于弹塑性理论提出了土体的一般液化准则, Andrade^[8]在其基础上, 针对砂性土体, 引入临界硬化模量来定义液化准则, 这一准则与 Rudnicki 和 Rice^[9]描述的局部化发生条件实质上是一致的。

在工程应用和科学研究等许多领域中建立的模型一般归结为大规模的非线性问题, 解决这些非线性问题需要有效的算法, 此处的有效指该算法既能在数值性态上较为满意, 又能通过计算机实现的时候保持高效率。在土木工程类的有限元计算中, 非线性方程通常都是采用迭代法来求解, 通常认为 Newton 类型的算法是解决该类问题的最好算法之一^[10-11]。但是, 对于维数庞大的结构, 这种算法显得效率不高, 因此邓乃扬^[12]提出了求解大规模非线性问题的非精确 Newton-PCG (preconditioned conjugate gradient) 方法, 该算法由牛顿步与预条件共轭梯度步组成, 是一次牛顿步和多步预条件共轭梯度子迭代的复合, 被证明是有效的求解方法。

本文指出了运用 Newton 算法求解大规模非线性问题的花费大, 并采用一次牛顿步, 和多步预条件共轭梯度子迭代的 Newton-PCG 复合算法; 描述了 Newton-PCG 算法的 FORTRAN 语言程序实现; 基于 Borja 和 Andrade 建立的临界状态塑性模型框架, 考虑到工程实际中流体影响, 给出了饱和状态下砂土固-液耦合模型的本构关系, 并编制了多孔介质的材料子程序; 通过编写的大型有限元计算程序, 以某砂土边坡为例, 再现了饱和砂土边坡液化的力学状态, 探讨了液化发生时的水压力场以及偏应变分布, 得到了边坡液化发生时的滑动面。

1 Newton-PCG 算法

首先考虑运筹学中的一个经典问题来引出本文的研究内容——对于无约束最优化问题:

$$\min f(x) \quad (x \in R^n), \quad (1)$$

其中, $f(x)$ 是从 $R^n \rightarrow R$ 的一个映射, 对该式用 Newton 方法求解, 其相应的 k 步迭代公式为

$$\nabla^2 f(x_k) s_k = -\nabla f(x_k), \quad (2)$$

其中, $\nabla^2 f(x)$ 为 $f(x)$ 的海色 (Hesse) 矩阵, $\nabla f(x)$ 为 $f(x)$ 的梯度。

正如前面所讲的, Newton 类型的算法是解决该类非线性问题的最好算法之一, 它容许切线因子在每步的迭代中都可以变化。由于在求解 Newton 方程时, 每次迭代中都精确求出海色阵 $\nabla^2 f(x)$ 的 Choleski 分解, 所以花费很大 (效率不高, 尤其是在大型有限元求解中)。

表 1 和表 2 列出了用 Newton 方法求解不同单元类型中的刚度矩阵的时间花费, 其中表 1 为 4 节点四边形连续单元, 表 2 为 9 节点位移-4 节点水压力混合单元。

表 1 4 节点四边形连续单元

网格	方程数量	CPU 花费时间/s
10×10	121	0.2
10×20	231	0.3
20×20	441	1.7

表 2 9 节点位移-4 节点水压力混合单元

网格	方程数量	CPU 花费时间/s
10×10	1003	123.0
10×20	1953	458.2
20×20	3803	4892.0

通过比较可以看出, 在大型的有限元计算中, 由于单元的刚度矩阵维数庞大, 采用常规的 Newton 方法求解极小值问题会导致计算速度很慢。而且随着维数的增大, 计算花费的时间成几何增长。基于此, 在 Steihaug 和 Toint 提出的 Newton-CG (conjugate gradient) 型算法^[10-11]的基础上, 邓乃扬提出的求解大规模非线性问题的非精确 Newton-PCG 方法, 经过这种精确步和不精确步的结合, 运算量会大大的减少。

求解无约束最优化问题的 Newton-PCG 方法, 本质上就是用 Cholesky 分解精确求解 Newton 方程 (2) (记为 CF 步) 和用预条件共轭梯度法近似求解 Newton 方程 (记为 PCG 步), 实际上, 也就是一步 CF 步和 p 步 PCG 步进行组合, 其中 p 是一个参数。假设产生的点列

$$\{x_k\} = \left\{ x_{j(p+1)}^{CF}, x_{j(p+1)+1}^{PCG}, \dots, x_{j(p+1)+p}^{PCG}, x_{(j+1)(p+1)}^{CF}, \dots \right\}, \quad (3)$$

在 $k = j(p+1) + t, 0 < t < p$ 为预条件步, 使每预优步的残差小于一定数可保证求的 x_k 具有二次收敛性^[13]。

2 Newton-PCG 算法的有限元程序实现

PCG 算法是已经被证明的求解二次方程极小值问题的有效技术, Newton-PCG 算法也逐渐得到了运

筹学领域学者的重视, 但是运用 Newton-PCG 算法来求解大型有限元的刚度矩阵, 还是一个较为新颖的尝试, 本文应用基于该技术, 将其引入到有限元计算领域, 并实现了算法的程序化。

前面已经叙述过, Newton-PCG 算法由牛顿步与预条件共轭梯度步组成, 首先进行一次牛顿步, 接着进行 p 步预条件共轭梯度子迭代, 然后再进行牛顿步, 如此循环, 其中算法中步数 p 是依赖于所求解问题的维数 n 的参数, 即 $p = p(n)$, 它是由一维最优问题的解 $y(n)$ 来确定:

$$\min u(y, n) = \frac{1}{1+y} + \frac{2^{y+1} + y - 2}{1+y} Q(n), \quad (4)$$

其中, $y \geq 0$ 且 $y \in Z$, $Q(n) = \frac{2n^2 + 6n + 2}{\frac{n^3}{6} + \frac{3n^2}{2} - \frac{2n}{3}}$ 。

图 1 为 Newton-PCG 核心算法的流程图。

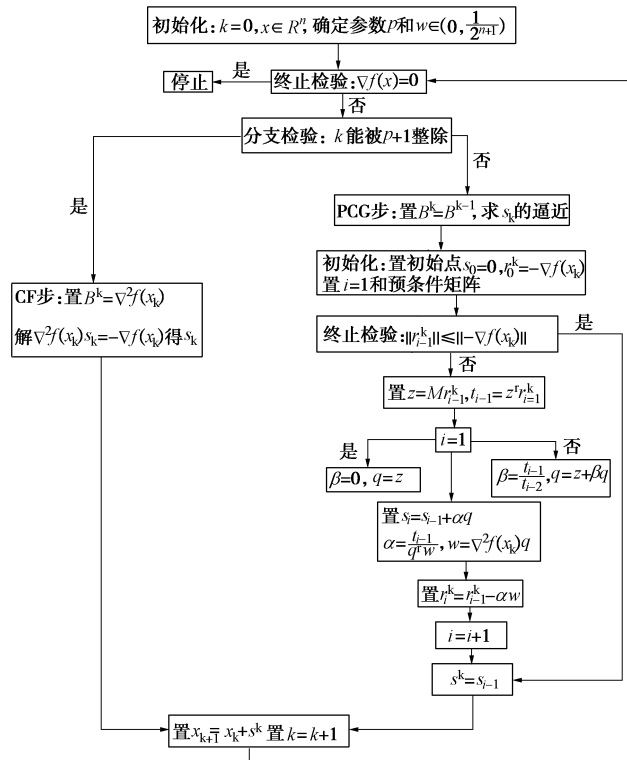


图 1 Newton-PCG 算法流程图

Fig. 1 Flow chart of Newton-PCG algorithm

根据以上 Newton-PCG 算法流程, 编写了基于 FORTRAN 语言的核心算法程序, 并结合某饱和砂土体边坡工程, 进行了数值模拟分析。

3 饱和砂土弹塑性本构模型

在工程实际中, 对于饱和砂土体, 里面充斥着水, 因此需要建立一个涉及固 - 流耦合, 并适用于工程实际的针对多孔砂土体的本构模型。

根据连续力学理论, 首先约定符号计算的意义: 两个向量 a, b 的内积记为 $a \cdot b$; 两个二阶张量 c, d 的内积记为 $c : d$; 两个向量 m, n 的叉乘记为 $m \otimes n$; 二阶张量 S 的对称和斜对角部分分别记为 $\text{sym} S = (S + S^T)/2$, $\text{skw} S = (S - S^T)/2$; 算子 \square 表示 \square 对时间的物质导数。

基于 Borja 和 Andrade^[14-15]建立的临界状态塑性模型, 下面将建立适用于饱和砂土体的本构关系框架, 来描述其力学行为, 这个本构准则必须反映以下的内容: ①有效应力 σ^* 与固相矩阵形变 ε 之间的发展方程; ②饱和度 S_r 与吸力 s 之间的关系; ③液相状态下, 相关联的流动法则与固有压力的发展方程。下面将一一阐述这 4 个方面的本构关系式。

3.1 固相矩阵的本构模型

对于固相矩阵, 考虑这个弹塑性力学行为的屈服方程为 $F = F(\sigma^*, s, p_c) = 0$, 这里标量 p_c 代表屈服方程 F 中的 q , 表示零吸力区域的塑性映像应力, 同时其有效应力 σ^* 的率表达可以写成

$$\dot{\sigma}^* = c^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} g), \quad g = \frac{\partial G}{\partial \sigma^*}, \quad (5)$$

式中, $c^e = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^e \partial \varepsilon^e}$, $\dot{\varepsilon}$ 是应变率张量, G 为塑性势函数, $\dot{\lambda}$ 是非负乘子, 并满足 Kuhn-Tucker 条件。

这里考虑硬化法则为

$$\dot{p}_c = \dot{\lambda} h(\sigma^*, p_c), \quad (6)$$

其中, h 为标量值函数。值得注意的是, 对于岩土材料而言, 其硬化准则基本上都可以写成上式的形式。 \dot{p}_c 通常会在塑性应变的作用下随着 $\dot{\lambda}$ 而变化, $\dot{\varepsilon}_v^p = \text{tr}(\dot{\varepsilon}^p) = \dot{\lambda} \text{tr}(g)$ 。

屈服方程 F 上的相容条件写作

$$F = f : \dot{\sigma}^* + \varphi \dot{s} - H \dot{\lambda} = 0, \quad (7)$$

式中,

$$f = \frac{\partial F}{\partial \sigma^*}, \quad \varphi = \frac{\partial F}{\partial s}, \quad H = -\frac{\partial F}{\partial p_c} h(\sigma^*, p_c). \quad (8)$$

这里, H 表示塑性模量, 物理意义是材料抵抗塑性变形的能力, 符号由映像应力速率的符号决定: 映像应力速率 $\dot{\sigma}^* < 0$ 时, 塑性模量 $H > 0$, 此时屈服面扩张, 材料硬化; $\dot{\sigma}^* > 0$ 时, $H < 0$, 屈服面收缩, 材料软化; 当 $\dot{\sigma}^* = 0$ 时, $H = 0$, 为理想塑性。

从而可得到塑性非负乘子 $\dot{\lambda}$ 的表达式为

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\chi} (f : c^e : \dot{\varepsilon} + \varphi \dot{s}), \quad \chi = f : c^e : g + H. \quad (9)$$

由于 $\dot{\lambda} > 0$, 又根据文献[14]可知, $\chi > 0$, 所以有

$$f : c^e : \dot{\varepsilon} + \varphi \dot{s} > 0. \quad (10)$$

注意到仅仅考虑 $f:c^e:\dot{\varepsilon}$ 的标量值符号不能决定材料是否塑性屈服或者是否弹性卸载，还必须考虑到变量 s 的符号。

将式 (9) 带入式 (5)，得到了应力本构方程的率表达形式

$$\sigma^* = c^{ep} : \dot{\varepsilon} - \frac{1}{\chi} (c^e : g) \phi \dot{s} \quad (11)$$

式中， c^{ep} 为弹塑性本构张量，

$$c^{ep} = c^e - \frac{1}{\chi} c^e : g \otimes f : c^e \quad (12)$$

注意到，当 $\dot{s} = 0$ ，即 s 为常数的时候，式 (11) 就是常见的经典弹塑性本构关系。

3.2 饱和度——吸力矩阵的关系方程

很多研究都表明，吸力 s 与饱和度 S_r 相关^[14]。这里，采用本构关系

$$S_r = S_r(s) \quad (13)$$

3.3 流动法则——固有压力的关系方程

这里要探讨的是：在液相状态下，相关联的流动向量 $\tilde{v}^\alpha = \phi^\alpha \tilde{v}_\alpha$ 与固有压力的发展方程固有压力 $p_\alpha, \alpha = w, a$ 的本构关系；或者，通过以下本构方程将流动向量 $\tilde{v}^\alpha = v_\alpha - v$ 与体内力 h^α 相关联：

$$h^\alpha = -\xi^\alpha \cdot \tilde{v}^\alpha \quad (14)$$

式中， ξ^α 为对称的正定型二阶张量，

$$\xi^\alpha = (\phi^\alpha)^2 \left(\frac{k^\alpha}{\mu_\alpha} \right)^{-1} \quad (15)$$

k^α 为描述固有渗透性的张量， μ_α 表示 α 相的黏度。

同时，由液相的动量守恒可知

$$h^\alpha = \text{grad}(\phi^\alpha p_\alpha) + \rho^\alpha (\tilde{v}^\alpha - g) \quad (16)$$

结合式 (14) 和 (16)，得到了流动向量与固有压力的发展方程

$$-\xi^\alpha \cdot \tilde{v}^\alpha = \text{grad}(\phi^\alpha p_\alpha) + \rho^\alpha (\tilde{v}^\alpha - g) \quad (17)$$

图 2 为当前坐标系与参考坐标系的示意图，区域 Ω 是当前坐标系，由固体 (土) $\phi_s(X_s, t)$ 和流体 (水) $\phi_f(X_f, t)$ 的两相状态决定，其中， $X_s \equiv X$ 是参考坐标系 $\Omega_0^s = \Omega_0$ 的位置向量， X_f 为参考坐标系 Ω_0^f 的位置向量。

4 有限元数值计算

基于以上的内容，结合有限元理论，编制了 FORTRAN 环境下的大型有限元数值分析程序；同时根据第 3 节的内容编写了饱和砂土模型的材料子程序，从而实现了饱和砂土局部化变形的有限元数值分析。下面将应用该大型有限元分析程序以及

Newton-PCG 算法的核心程序，模拟并分析某饱和砂土边坡液化形成时的力学状态。

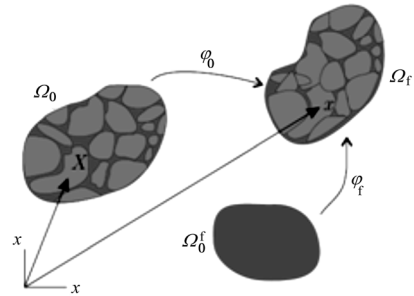


图 2 当前坐标系与参考坐标系的示意图

Fig. 2 Sketch map of current and reference configuration

4.1 计算模型

计算模拟中边坡尺寸如图 3 所示，边坡高 10 m，坡度为 30°，水平面为边坡顶面 5 m 位置。计算网格为二维四边形 Q9P4 等参单元，计算模型如图 4 所示。每个 Q9P4 单元中有 9 个位移节点和 4 个连续孔隙水压力节点，这种单元能够很好地满足 Babuska-Brezzi 稳定性条件，从而可以避免由于多孔介质的固结而引起的稳定性问题，如图 5 所示。

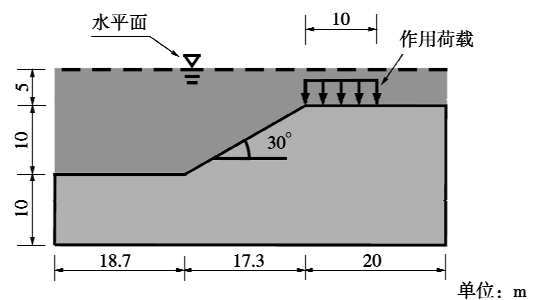


图 3 计算模型的几何尺寸和边界条件

Fig. 3 Geometrical dimension and boundary condition of computational model

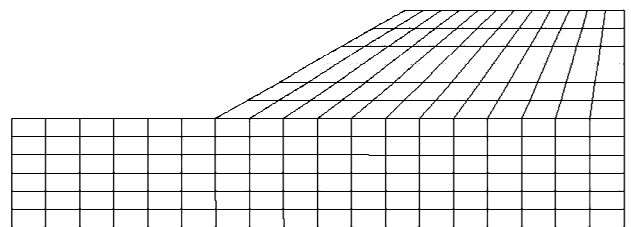


图 4 计算模型

Fig. 4 Computational model

其计算边界条件是：模型下部、左右两侧为铰接固定支座，上部 (包括边坡部分) 为自由条件；同时，模拟中采用预压固结应力 100 kPa 的静力加载；加载因子 - 时间曲线如图 6 所示。

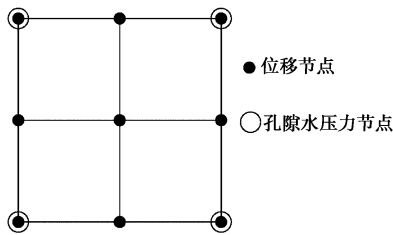


图 5 Q9P4 单元

Fig. 5 Q9P4 element

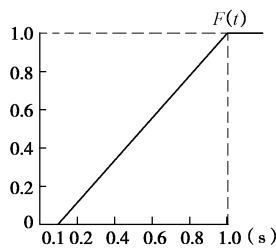


图 6 加载因子 - 时间曲线

Fig. 6 Load factor-time function curve

4.2 计算参数

进行数值模拟用的试件材料是 Erksak 砂土^[16], 其主要计算参数见表 3。

表 3 材料的计算参数

Table 3 Summary of material parameters

参数	数值	说明
$\bar{\kappa}$	0.03	超弹性压缩率
p_0 /kPa	-100	超弹性基准应力
ε_{v0}^e	0	超弹性基准体积应变
α_0	0	超弹性耦合参数
μ_0 /kPa	2000	超弹性基准剪切模量
ψ	1.20	临界状态参数
$\tilde{\lambda}$	0.04	塑性压缩率
N	0.4	塑性屈服面参数
N^*	0.2	塑性势能参数
h	280	塑性硬化参数

由于加载速率对局部剪切带的影响由 $Z = u_y / k$ 决定^[14], 其中 u_y 是加载速率, k 为水力传导系数。这里, $u_y = 0.05$ m/s, $k = 3.0 \times 10^{-5}$ m/s, 即数值模拟中 $Z = 1667$ 。

4.3 计算结果与分析

Borja 和 Andrade 在文献[7~8]中给出了硬化模量 H 以及临界硬化模量 H_{crit} 的表达式, 并指出当 $H = H_{crit}$ 时, 开始出现液化现象。根据这个判据, 得到了此处边坡发生局部变形产生液化的力学状态。

图 7 为边坡发生液化时刻的水压力分布图, 白色箭头为水压力的流动方向。对于饱和土体而言, 正如前面材料本构模型中所叙述的, 流体对于这种颗粒状介质的力学行为影响较大。可以看出, 在边坡中心处的水压力值最大, 靠近边坡顶面位置尤为明显, 达到

280 kPa 左右; 注意到在剪切带即将形成的区域, 孔隙水压力明显增大, 而且沿着剪切带的外法线方向向外流动; 在远离剪切带区域, 水压力值分布较为均匀, 且流动方向趋于水平。

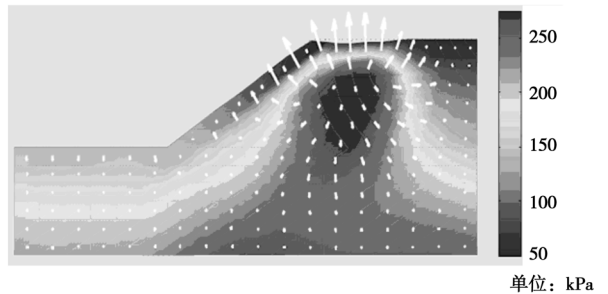


图 7 水压力分布图

Fig. 7 Load-time function curve

图 8 给出了边坡液化发生时叠加流体向量的偏应变云图。可以看出在整个斜坡坡面, 其偏应变最大, 超过了 0.3% 的应变值, 因此该坡面处于不稳定的状态; 和水压力分布相似的是, 在边坡的中心, 尤其靠近边坡顶面的位置, 其偏应变也很大, 而且与斜坡的局部变形带连成了一起, 从而导致了边坡体的液化变形。

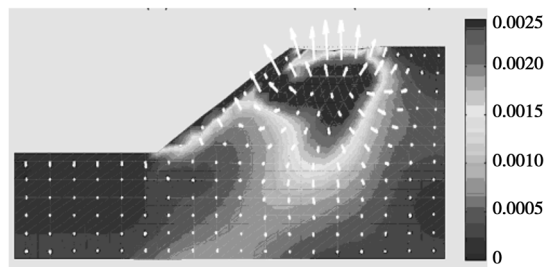


图 8 叠加流体向量的偏应变云图

Fig. 8 Deviatoric strains in contour with superimposed flow vector

图 9 画出了每个高斯点的 $H - H_{crit}$ 数值, 根据液化判断准则, 当 $H - H_{crit} \leq 0$ 时, 液化发生。如图所示, 整个坡面以及靠近边坡顶部中心的部位都处于数值小于 0 的位置, 因此这些部位将是液化发生时坡面下滑的区域。这一结果与前面的水压力分布以及偏应变分布相吻合。这也再一次说明了多孔类颗粒状介质中水压力对于其力学行为的影响较大。图中的虚线即为边坡发生液化的滑动面。

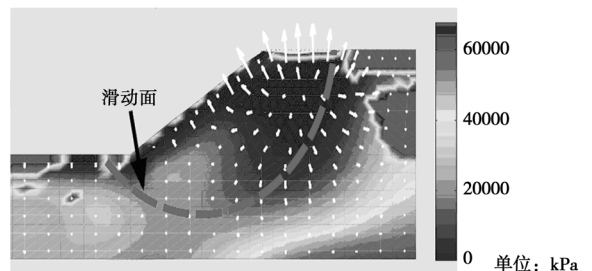


图 9 各个高斯点的 $H - H_{crit}$ 值

Fig. 9 $H - H_{crit}$ values of each Gauss point

5 结 论

将 Newton-PCG 复合算法引入到有限元数值计算中,来求解大型多维刚度矩阵;结合 Borja 和 Andrade 的临界状态塑性模型框架,得到了流体-固体耦合状态下的饱和砂土模型,通过编写的 FORTRAN 语言有限元计算程序、砂土体类材料子程序以及 Newton-PCG 算法程序模拟分析了饱和砂土边坡液化的力学行为。取得了如下成果:

(1) Newton-PCG 复合算法对于求解大型非线性问题效率高,而且得到了其程序实现。

(2) 在工程实际中,多孔介质一般涉及与流体耦合的问题,而且流体的流动与孔隙水压力对局部变形带的形成影响较大。

(3) 在边坡局部剪切带即将形成的区域,孔隙水压力明显增大,而且沿着剪切带的外法线方向向外流动;在远离剪切带区域,水压力值分布较为均匀,且流动方向趋于水平。

(4) 根据液化发生准则,得到了边坡发生液化的滑动面,这对于预测边坡的发生具有重要的现实意义。

参考文献:

- [1] BELYTSCHKO T, LIU W K, MORAN B. Nonlinear finite elements for continua and structures[M]. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd, 2000.
- [2] LANDIS E N, NAGY E N, KEANE D T. Microstructure and fracture in three dimensions[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2003, **70**: 911 - 925.
- [3] 陈育民, 刘汉龙, 周云东. 液化及液化后砂土的流动特性分析[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(9): 1139 - 1143. (CHEN Yu-min, LIU Han-long, ZHOU Yun-dong. Analysis on flow characteristics of liquefied and post-liquefied sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(9): 1139 - 1143. (in Chinese))
- [4] LIU W K, JUN S, LI S F, ADEE J, BELYTSCHKO, T. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics[J]. International Journal for Numerical Methods, 1995, **38**(10): 1655 - 1679.
- [5] BELYTSCHKO T, FISH J, ENGELMANN B E. A finite element with embedded localization zones[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, **70**(1): 59 - 89.
- [6] BAZANT Z P, BELYTSCHKO T, CHANG T P. Continuum theory for strain softening[J]. Journal Engineering Mechanics, ASCE, 1984, **110**(8): 1666 - 1691.
- [7] BORJA R I, ANDRADE J E. Critical state plasticity, part VI: meso-scale finite element simulation of strain localization in discrete granular materials[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, **195**: 5115 - 5140.
- [8] ANDRADE J E, BORJA R I. Capturing strain localization in dense sands with random density[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, **67**: 1531 - 1564.
- [9] RUDINICKI J W, RICE J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1975, **23**: 371 - 394.
- [10] STEIHAUG T. The conjugate gradient method and trust region in large scale optimization[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1983, **20**: 626 - 637.
- [11] TOINT P L. Towards an efficient sparsity exploiting Newton method for minimization, sparse matrices and their uses[M]. London: Academic Press, 1981: 57 - 88.
- [12] DENG N Y, WANG Z Z. Theoretical efficiency of an inexact Newton method[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, **105**: 97 - 112.
- [13] 钟萍, 张建中, 邓乃扬. 一个 Newton-PCG 型算法和它的效率分析[J]. 运筹学报, 2002, **6**(3): 85 - 96. (ZHONG Ping, ZHANG Jian-zhong, DENG Nai-yang, A Newton-PCG like algorithm and its theoretical efficiency[J]. OR Transactions, 2002, **6**(3): 85 - 96. (in Chinese))
- [14] BORJA R I. Bifurcation of elastoplastic solids to shear band mode at finite strains[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, **191**: 5287-5314.
- [15] ANDRADE J E, BORJA R I. Modeling deformation banding in dense and loose fluid-saturated sands[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2007, **43**: 361 - 383.
- [16] JEFFERIES M G. Nor-Sand: a simple critical state model for sand[J]. Geotechnique, 1993, **43**: 91 - 103.