

# 基于体积估算岩石断面分维的算法研究

薛东杰, 周宏伟, 赵 天, 丁靖洋, 李 潮

(1. 中国矿业大学(北京)煤炭资源与安全开采国家重点实验室, 北京 100083; 2. 中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院, 北京 100083)

**摘 要:** 在计算岩石断裂粗糙表面分维时, 为充分考虑利用基于激光扫描的断面高程数据, 通过将各数据点连接构成类棱柱平行体或 3 面平行体直接覆盖粗糙断裂面, 根据盒维数直接定义, 提出体积覆盖算法。与传统的立方体覆盖法相比, 体积覆盖法可以直接利用无须修正激光扫描点数据, 避免立方体覆盖法坐标系位置差异导致的计算分维值差异, 通过直接计算覆盖平行体体积估算岩石断面分维。进一步比较两类不同的平行体覆盖方法, 针对同一粗糙表面, 体积覆盖法计算的岩石断面分维均具有较高的精度, 很好地克服了其他覆盖法中对覆盖格子形状(全部立方体或全部圆柱体)的统一要求, 具有很强的适用性。

**关键词:** 类棱柱平行体; 3 面平行体; 立方体覆盖法; 体积覆盖法

中图分类号: TU443 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2012)07-1256-06

**作者简介:** 薛东杰(1986-), 男, 山东微山人, 博士, 主要从事煤与瓦斯共采及岩土工程等方面的研究。E-mail: xuedongjie@163.com。

## Algorithm of fractal dimension of rock fracture surface based on volume estimation

XUE Dong-jie, ZHOU Hong-wei, ZHAO Tian, DING Jing-yang, LI Chao

(1. State Key Laboratory of Coal Resources and Safe Mining, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China;

2. School of Mechanics, Architecture and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China)

**Abstract:** For calculating the fractal dimension of rock fracture rough surface, the prism-like or 3-side parallel bodies may be generated by connecting the data points on the fracture surface in order to take full account of laser scanning-based elevation data of the surface. A volume covering method is proposed for estimation of the fractal dimension of rough surface according to the definition of Minkowski dimension. Compared with the traditional cubic covering method, the volume covering method can be employed to directly calculate the volume of covering body and to estimate the fractal dimension without correction point of laser scanning data so as to avoid the differences caused by different coordinate systems. Furthermore, by comparing the two different types of parallel body covering methods for the same rough surface, all the volume covering methods have high accuracy in calculating the fractal dimension and have strong applicability overcoming the uniform shape requirements of the covering cells (all cubes or all cylinders).

**Key words:** prism-like parallel body; 3-side parallel body; cubic covering method; volume covering method

## 0 引 言

自 Mandelbrot 等<sup>[1]</sup>1984 年首次应用分形定量分析金属断裂表面以来, 国内外已进行了大量的研究与探索。大量实验结果表明, 在某一标度范围内, 许多材料的断裂表面, 尤其是脆性非均质材料如岩石、混凝土或陶瓷呈现出某种程度上的统计分析特征<sup>[2-8]</sup>。目前已有 4 种分形测量方法用于对材料断裂表面的分形测量, 分别是周长-面积关系方法(小岛法-silt island method)、剖面位形法(Profile 或 Vertical section method)、幂律谱方法和自仿射分形方法, 但这些方法大都普遍应用剖面剖线的维数加 1 来近似表示整个粗

糙表面的维数, 很难准确表达粗糙断面在空间分布上的各向异性和局域特征<sup>[9]</sup>。

目前用于估算岩石断面真实分维的计算方法中, 最具代表性的是三角形棱柱表面积法<sup>[10]</sup>、投影覆盖法<sup>[11-12]</sup>和立方体覆盖法<sup>[13]</sup>, 前两种方法在估算表面分维时都存在面积的近似计算问题, 从而导致计算结果的偏差, 立方体覆盖法有效避免了由于近似计算导致的计算偏差。改进的立方体覆盖法<sup>[14]</sup>在立方体覆盖法

基金项目: 国家自然科学基金项目(11172318); 国家 973 项目(2009CB724602); 科技部国际科技合作项目(2010DFA14640)

收稿日期: 2011-08-10

思想基础上基于整体考虑定义了统一的覆盖起始点, 但是未从本质上改善分维值的精度。另外立方体覆盖法不能保证严格意义上的立方体覆盖并且忽略了中间两个高度值对粗糙度的贡献, 同时立方体覆盖法人为增加了较多的冗余立方体单元格。

本文提出体积覆盖法, 从盒维数的基本定义出发给出其概念, 并通过试验计算, 分析比较了传统覆盖法与体积覆盖法算法之间的差异, 并比较两类不同的平行体体积覆盖法计算岩石断面的真实分维值, 从而认为体积覆盖法是一种有效计算岩石断面分维的新方法。

## 1 试样的加工

本次泥岩试验样本取自湖北应城盐岩夹层, 将试件加工成尺寸为  $25\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 5\text{ mm}$  的 5 个样本, 预制缺口, 长度为  $2\text{ mm}$ 。利用中国矿业大学(北京)煤炭资源与安全开采国家重点实验室岛津 SEM 全数字液压伺服试验系统开展三点弯曲实验(见图 1), 加载时两个支撑点间距是  $20\text{ mm}$ , 加载方式采用位移控制, 加载速度为  $0.5\text{ }\mu\text{m/s}$ , 最终试件脆性破坏产生新的粗糙表面。从中选出一个较典型的断裂粗糙表面, 然后使用大尺度激光扫描仪测量粗糙表面, 仪器精度为  $0.1\text{ mm}$ , 量程为  $300\text{ mm}$ 。

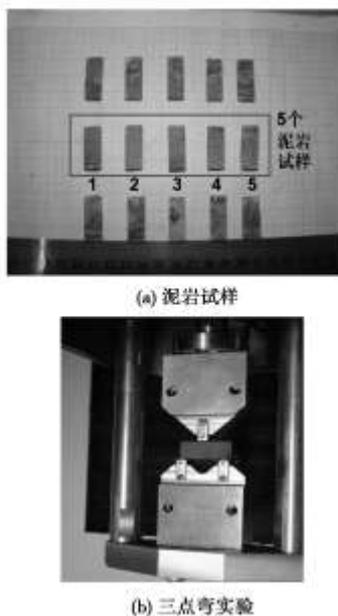


图 1 实验示意图

Fig. 1 Schematic diagram of three-point bending experiments

本次试验扫描的断面尺寸约  $5\text{ mm} \times 10\text{ mm}$ , 测量间距为  $0.1\text{ mm}$ , 这样获取的数据点总数约为  $50 \times 100$ , 图 2 (a) 为 Winsurf 下生成的岩石断裂表面形貌图。

## 2 类棱柱体积覆盖法

用立方体覆盖法估算的分维是纯几何意义上的分维。立方体覆盖法的操作过程如下: 在平面  $XOY$  上存在一正方形网格, 网格中每格的尺寸是  $\delta$ , 正方形的 4 个角点处分别对应 4 个高度  $h(i, j)$ 、 $h(i, j+1)$ 、 $h(i+1, j)$  和  $h(i+1, j+1)$  ( $1 \leq i, j \leq n-1$ ,  $n$  为每个边的量测点数)。用边长为  $\delta$  的立方体对粗糙表面进行覆盖, 统计计算覆盖区域  $\delta \times \delta$  内的立方体个数, 而改进的立方体覆盖法与立方体覆盖法最大的区别在于每个网格中覆盖的起始位置不是从最低角点高度处开始, 而是从一个统一的高度开始覆盖。可以看出立方体覆盖法的基本原理是在单个网格单元内角点的最高值减去最低值, 除以立方体单位边长再加 1 取整。改进的立方体覆盖法是在单个网格单元内覆盖的起始位置不是从最低角点的高度处开始, 而是从一个统一的高度开始覆盖。事实上, 激光扫描仪扫描的数据不能保证严格的等间距, 这两种方法必须针对激光扫描数据作简单的等间距处理以保证严格意义上的等间距覆盖, 这就导致了人为的插值误差, 因为插值得到的数据高度不能保证在原有粗糙断裂表面上。另一方面, 从基本原理可以看出这两种方法都是针对单个网格单元的 4 个高度值的两个极限值进行计算, 忽略了两个中间值, 导致了这两种方法计算的分维明显偏小, 即计算方法对粗糙表面的表达并不敏感。同时, 这两种方法中由于坐标系的位置定义偏差, 导致不同的原点计算出的分维不同。

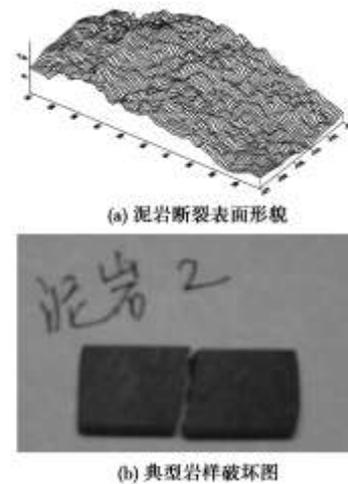


图 2 泥岩断裂示意图

Fig. 2 Sketch map of mudstone fracture

目前还没有对于所有分形都适用的维数定义, 统称那些取非整数值的维数为分维数, 或称分形维数<sup>[15]</sup>。大多数分形维数的定义是基于“尺度  $\delta$  下的度量”这一思想<sup>[11]</sup>。设  $F$  是一个分形集, 对于每个  $\delta > 0$ , 忽略尺度小于  $\delta$  的不规则性, 并且考察测量值  $M_\delta(F)$  在

$\delta \rightarrow 0$ 时的状况。如果存在两个非负常数  $c$  和  $s$ , 使得  $M_\delta(F)$  满足幂定律:

$$M_\delta(F) \sim c\delta^{-s} \quad (1)$$

则称  $F$  具有“维数”  $s$ , 而  $c$  可以看作集  $F$  的  $s$  维长度。

盒维数又称为闵可夫斯基 (Minkowski) 维数、容量维数和度量维数; 这种维数由于计算简单以及易于经验估计而得到广泛应用。盒维数具有多种等价定义, 不同的定义所依据的盒子类型不同。对于实际中所遇到的分形  $A$ , 人们也常常用  $n$  维球或者其他的集合作为测量分形的盒子尺度。一个集合的盒维数常常与一个使用方便而且较少限制的概念  $s$ - 维容量有着密切的关系。为了说明这一点, 先定义  $A$  的  $\delta$ - 平行体:

$$A_\delta = \{x \in R^n : |x - y| \leq \delta, \forall y \in A \text{ 成立} \} \quad (2)$$

可见  $A$  的  $\delta$ - 平行体是与  $A$  距离小于  $\delta$  的点集合。比如, 在  $R^3$  中, 如果  $A = \{x_0\}$  是单点集, 则  $A_\delta$  是一个以  $x_0$  为中心, 以  $\delta$  为半径的球; 如果  $A$  是一个线段, 则  $A_\delta$  是以  $A$  为中心线的柱体。记  $\text{vol}^n(A_\delta)$  表示  $A_\delta$  的  $n$  维体积, 并且考虑当  $\delta \rightarrow 0$  时,  $\text{vol}^n(A_\delta)$  收敛的速度, 如果

$$\text{vol}^n(A_\delta) \sim c\delta^{n-s} \quad (\delta \rightarrow 0) \quad (3)$$

则称  $s$  是  $A$  的维数,  $c$  是  $A$  的  $s$  维容量 (容量)。

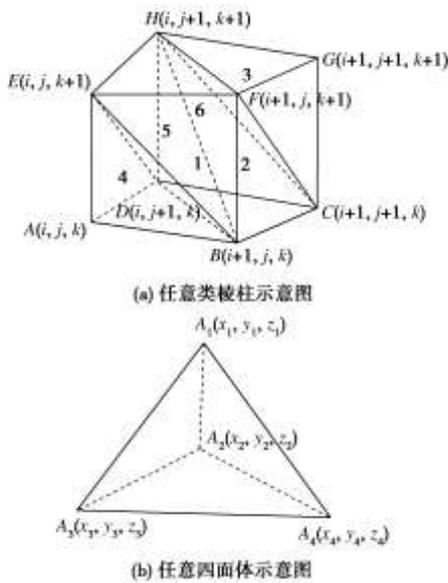


图3 类棱柱切分示意图

Fig. 3 Splitting diagram of prism-like parallel body

定义类棱柱 (见图3): 上下底面为三角形或四边形, 其余各面都是四边形, 并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行, 由这些面所围成的多面体。任意类棱柱都可以划分为6个任意四面体 (见图4), 累加6个任意四面体体积即可得到类棱柱的体积。任意四面体的体积公式为

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad (4)$$

式中,  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$  与  $(x_4, y_4, z_4)$  是任意四面体4个顶点的坐标值。

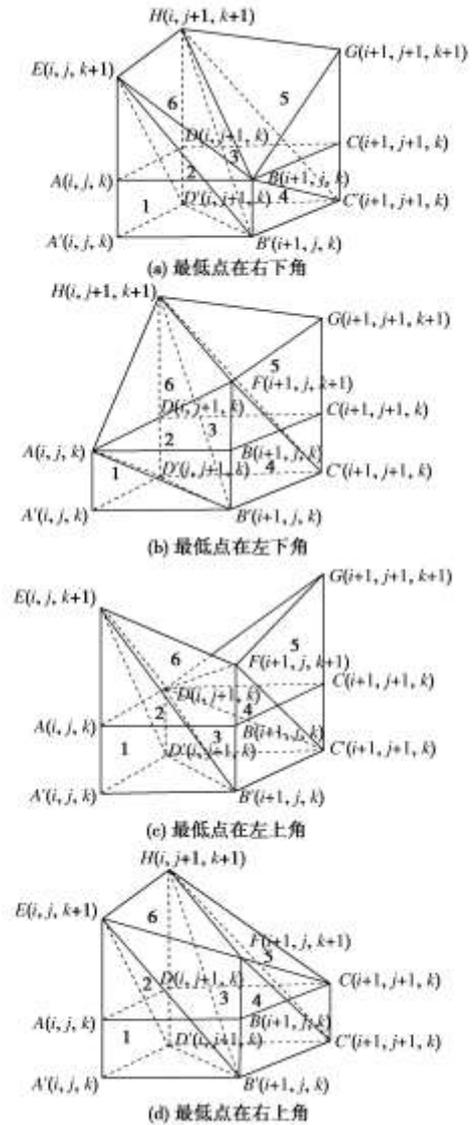


图4 4种形式类棱柱 (左上右下) 示意图

Fig. 4 Diagram about four forms of prism-like parallel body (upper left corner to lower right corner)

事实上亦可定义  $A$  是粗糙断裂表面, 定义  $A$  的  $\delta$ - 类棱柱: 单元网格粗糙表面四点引垂线至四点中最低值 (即从最低点延伸), 再延长激光扫描仪精度单位长度形成典型的类棱柱。粗糙表面单元网格连接方向存在两种连接方式从左上角到右下角或者从左下角到右上角 (俯视方向)。由于单元网格内最低点的位置不同, 根据定义关于粗糙表面的类棱柱或准平行体存在四种形式 (图5), 为了具有统一的形式, 在每个最低点正上方引入一个虚拟点, 其坐标与最低点坐标完全

一致, 这样四种几何体积形式统一, 利于体积的编程计算。记  $\text{vol}^3(A_\delta)$  表示  $A_\delta$  的 3 维体积, 并且考虑当  $\delta \rightarrow 0$  时,  $\text{vol}^3(A_\delta)$  收敛的速度, 如果

$$\frac{\text{vol}^3(A_\delta)}{\delta^3} \sim c\delta^{-s} \quad (\delta \rightarrow 0) \quad (5)$$

扩展  $\delta^3$  立方体体积的含义, 定义  $v(\delta)$  满足条件:  $\lim_{\delta \rightarrow 0} v(\delta) = 0$ 。用  $v(\delta)$  的体积去覆盖包含有整个粗糙表面的类棱柱, 计算单元网格的立方体个数, 即在第  $i, j$  网格内, 覆盖类棱柱  $v(\delta)$  的总数:

$$N_{i,j} = \text{INT} \left( \frac{\text{vol}^3(A_\delta)}{v(\delta)} + 1 \right), \quad (6)$$

式中, INT 为取整函数。

则覆盖整个粗糙表面所需的  $v(\delta)$  总数  $N$  为<sup>[12]</sup>

$$N(\delta) = \sum_{i,j=1}^{n-1} N_{i,j} \quad (7)$$

改变观测尺度再次覆盖计算覆盖整个粗糙表面所需的  $v(\delta)$  总数, 若粗糙表面具有分形性质, 按分形理论, 存在如下关系:

$$N(\delta) \sim c\delta^{-s}, \quad (8)$$

则称  $s$  是  $A$  的维数,  $c$  是  $R^3$  中单位体积。

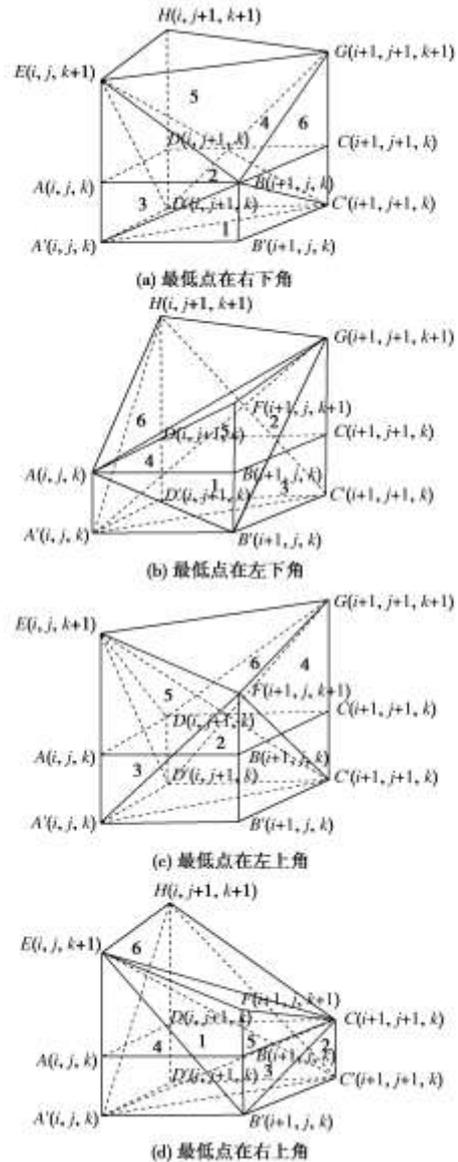


图 5 4 种形式类棱柱 (左下右上) 示意图

Fig. 5 Four forms of prism-like parallel body (lower left corner to upper right corner)

### 3 3 面平行体体积覆盖法

如果在类棱柱的基础上去掉延长的单位长度就是断裂表面的纯覆盖准平行体, 同样亦可定义  $A$  的  $\delta$ -3 面平行体, 同理存在连接线方式与角点位置组合 8 种形式 (图 6, 7), 每个 3 面平行体都可以由 4 个四面体组成, 使用上述算法可算出粗糙表面分维值。

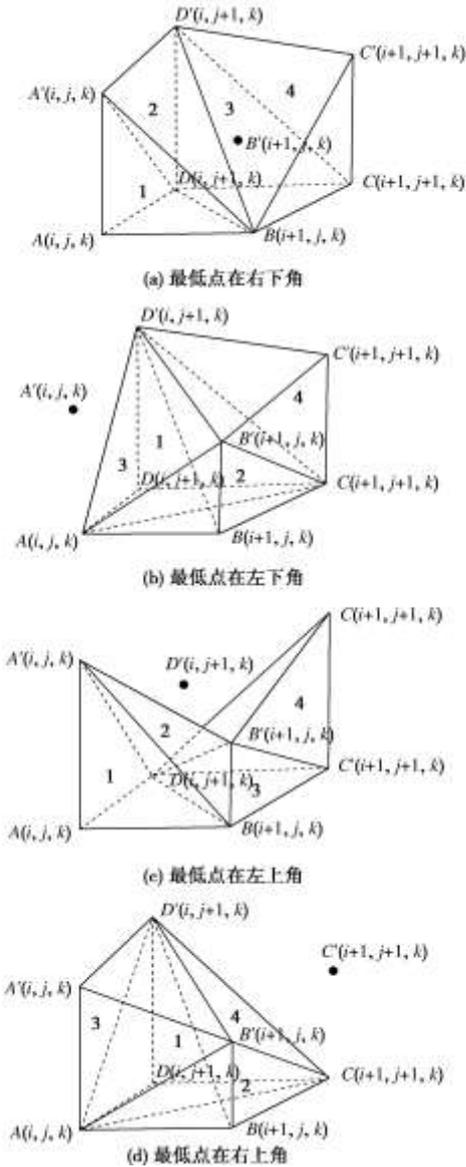


图 6 4 种形式 3 面平行体 (左上右下) 示意图

Fig. 6 Four forms of 3-side parallel body (upper left corner to lower right corner)

### 4 不同方法对比分析

由于改进的立方体覆盖法没有本质上改善粗糙断裂表面分维的计算精度, 因此可以通过比较立方体覆盖法与体积覆盖法的差异说明问题。采用激光扫描试验数据, 将不同覆盖法的计算过程用 MATLAB 编写程序, 建立  $N(\delta)$  与  $\delta$  之间的关系, 反映  $N(\delta)$  与  $\delta$  关系的双对数坐标图见图 8~10。

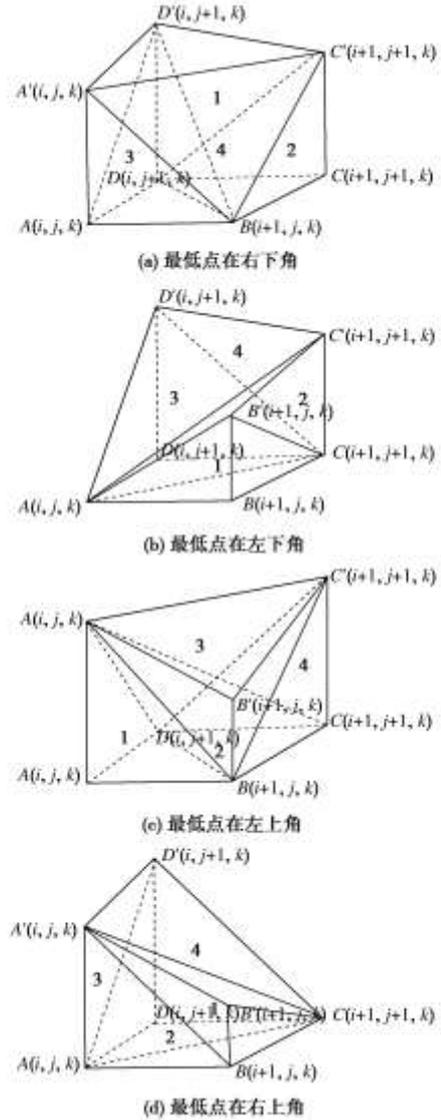


图 7 4 种形式 3 面平行体 (左下右上) 示意图

Fig. 7 Four forms of 3-side parallel body (lower left corner to upper right corner)

从图 8~10 可见, 在双对数坐标中,  $N(\delta)$  与  $\delta$  之间存在很好的线性关系, 说明用体积覆盖法与立方体覆盖法计算粗糙表面的分维值是可行的。当  $\delta$  的范围在 0.1~1.0 mm 之间时, 由立方体覆盖法计算的分维值为 2.2139, 由类棱柱体积覆盖法计算的分维值为: 2.3977 (左上右下) 与 2.3973 (左下右上), 由 3 面平行体体积覆盖法计算的分维值为: 2.1290 (左上右下) 与 2.1285 (左下右上)。无论是类棱柱形式还是 3 面平行体形式, 两种连接方式计算得到的分维值分别相差 0.0004 与 0.0005, 可见连接方式对最后的分维计算较小, 即通过类棱柱与 3 面平行体体积覆盖法计算的分维是唯一的。按大小排序, 类棱柱法增加了单位激光精度的长度的体积其分维值最大, 立方体覆盖法居中, 3 面平行体体积覆盖法最小, 但这 3 类方法之间的分维值大小差异并不大, 可见都能较好地表达粗糙度信

息, 从算法上讲, 体积覆盖法能充分使用断面激光扫描数据并且可避免坐标系所带来的人为误差。类棱柱体积覆盖法在算法上具有统一的形式, 而 3 面平行体体积覆盖法即使定义了虚拟点也很难找到统一的形式, 同样类棱柱考虑了不同的激光扫描精度, 而 3 面平行体体积覆盖法是对粗糙表面的纯覆盖, 两种方法各有优点, 总之体积覆盖法是有有效的计算岩石断面分维的新方法。

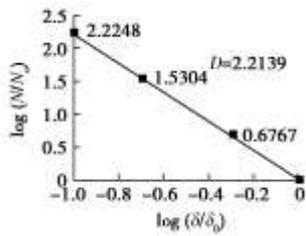


图 8 立方体覆盖法计算粗糙表面分维结果

Fig. 8 Results of fractal dimension of rough surface estimated by cubic covering method

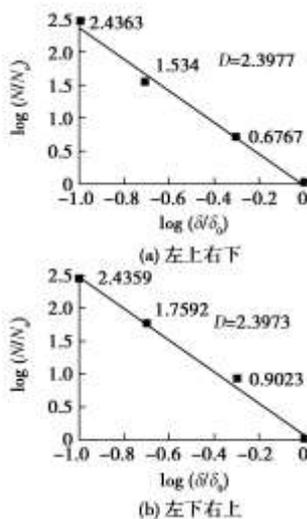


图 9 类棱柱体积覆盖法计算粗糙表面分维值

Fig. 9 Results of fractal dimension of rough surface estimated by volume covering method of prism-like parallel body

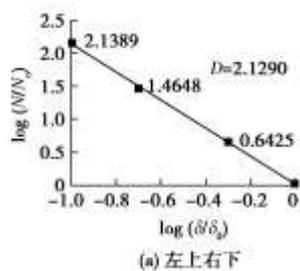


图 10 3 面平行体体积覆盖法计算粗糙表面分维值

Fig. 10 Results of fractal dimension of rough surface estimated by volume covering method of 3-side parallel body

## 5 结论与讨论

针对同一粗糙断裂表面计算的分维值, 可以发现体积覆盖法存在很好的线性关系, 说明用体积覆盖法计算粗糙表面的分维值是可行的。体积覆盖法直接采用激光扫描仪扫描的高程数据计算, 无须考虑扫描误差导致的是否等间距问题, 有效避免了立方体覆盖法保证严格意义覆盖而产生的插值误差问题。体积覆盖法考虑了单元网格内所有测量数据的高度值, 有效利用了断裂粗糙表现信息, 更有利于表达粗糙岩石形貌的复杂性。体积覆盖法的定义来源于盒维数的概念, 针对粗糙断裂表面文中提出类棱柱的定义并且考虑了不同激光扫描仪的精度, 一定程度上避免了不同扫描精度所导致的机器误差, 而三面平行体体积覆盖法是对粗糙表面的纯覆盖, 计算分维值也能很好反映粗糙度信息。而且文中扩展了覆盖体积的概念, 不再严格要求覆盖体是正方体, 还是圆柱体或球体, 可以灵活组合运用计算, 针对粗糙表面或腔体具有更强的适用性。因此, 体积覆盖法是更为有效的分形维数计算新方法。

## 参考文献:

- [1] MANDELBROT B B, et al. Fractal character of fracture surfaces of metals[J]. Nature, 1984, **308**: 721 - 723.
- [2] 孙红泉, 谢和平. 岩石断裂表面的分形模拟[J]. 岩土力学, 2008, **29**(2): 347 - 352. (SUN Hong-quan, XIE He-ping. Fractal simulation of rock fracture surface[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, **29**(2): 347 - 352. (in Chinese))
- [3] 王金安, 谢和平, KWASNIEWSKI M. 岩石断裂面的各向异性分形和多重分形研究[J]. 岩土工程学报, 1998, **20**(6): 16 - 21. (WANG Jin-An, XIE He-ping, KWASNIEWSKI M A. On anisotropic fractal and multi fractal properties of rock fracture surfaces[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, **20**(6): 16 - 21. (in Chinese))
- [4] 王长虹, 朱合华. 多重分形与 Kriging 插值在地层模型生成中的应用[J]. 岩土力学, 2011, **32**(6): 1864 - 1868. (WANG

- Chang-hong, ZHU He-hua. Application of multifractal and Kriging interpolation to reconstruction of stratum[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(6): 1864 - 1868. (in Chinese))
- [5] ZHOU H W, XIE H, KWASNIEWSKI M A. Developments in characterization of surface topography of rock joint[J]. Progress in Natural Science, 2001, **11**(7): 481 - 489.
- [6] ZHOU H W, XIE H. Anisotropic characterization of rock fracture surfaces subjected to profile analysis[J]. Physics Letters A, 2004, **325**(5-6): 355 - 362.
- [7] XIE H, WANG J A, XIE W H. Fractal effect of surface roughness on the mechanical behavior of rock joints[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 1997, **8**(2): 221 - 252.
- [8] CLARK K C. Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface areamethod[J]. Computers & Geoscience, 1986, **12**(5): 713 - 722.
- [9] 谢和平. 分形 - 岩石力学导论[M]. 北京: 科学出版社, 1996. (XIE He-ping. Fractals-rock mechanics[M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese))
- [10] CLARK K C. Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface areamethod[J]. Computers & Geoscience, 1986, **12**(5): 713 - 722.
- [11] XIE H, WANG J A, STEIN E. Direct fractal measurement and multifractal properties of fracture surface[J]. Phy Lett A, 1998, **A 242**: 41 - 50.
- [12] XIE H, WANG J A, KWASNIEWSKI M A. Multifractal characterization of rock fracture surfaces[J]. Int J Rock Mech Min Sci, 1999, **35**(1): 19 - 27.
- [13] ZHOU H W, XIE H. Direct estimation of the fractal dimensions of a fracture surface of rock[J]. Surface Review and Letters, 2003, **10**(5): 751 - 762.
- [14] 张亚衡, 周宏伟, 谢和平. 粗糙表面分形维数估算的改进立方体覆盖法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, **24**(17): 3192 - 3196. (ZHANG Ya-heng, ZHOU Hong-wei, XIE He-ping. Improved cubic covering method for fractal dimensions of a fracture surface of rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, **24**(17): 3192 - 3196. (in Chinese))
- [15] 谢和平, 薛秀谦. 分形应用中的数学基础与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2005. (XIE He-ping, XUE Xiu-qian. Mathematical foundations and methods in fractals[M]. Beijing: Science Press, 2005. (in Chinese))