

不透水地基上设有排水棱体堤坝渗流计算的理论解

吴世余, 宋新江

(安徽省·淮委水利科学研究院, 安徽 蚌埠 233000)

摘要: 论述了堤坝下游设有棱体和褥垫排水堤坝的渗流计算, 排水边界的坡角大于 90° 。主要内容和成果有: ①对于下游水深 $H_2=0$ 的棱体排水, 按柯钦娜式 $q/k=\mu h_0$, 高精度计算出流量和出逸点高度关系式的比例系数 μ 的倒值, 并提出相应的 $1/\mu$ 拟合式, 以便于应用, 应用转化的超越几何函数, 导出出逸段的坡降计算式, 并具体计算出排水边坡坡角 90° , 135° , 180° 的出逸坡降分布; ②应用速度平面保角变换的简化方法, 导出排水棱体临界水深 H_C 的计算式, 其推导过程较之努米诺夫的混合函数法大为简化, 另提出相应的 H_C 拟合式, 以便于应用; ③对于下游水深 $H_2 \geq H_C$ 的棱体排水, 按努氏式 $\Delta L_2=D_1 H_2+D_2 q/k$, 高精度计算出下游区附加渗径 ΔL_2 式的比例系数 D_1 和 D_2 , 并提出相应的拟合式, 以便于应用, 应用保角变换求出该型堤坝下游区的精确解, 再结合努氏的上游区精确解, 举出一具体算例, 精确计算出堤坝的流量和渗透系数的比值 q/k , 出逸点高度 h_s , 出逸段坡降 I 的分布, 以及全程浸润线和上下两反弯点的坐标, 可借以校核该型堤坝渗流有限元计算程序和其它近似计算方法的正确性及其计算精度; ④对于下游水深 $0 < H_2 < H_C$ 的棱体排水, 提出出逸点高度 h_s 和下游区附加渗径 ΔL_2 两近似理论计算式, 据此算出的 q/k 和 h_s , 与有限元计算的结果相符。
关键词: 渗流; 堤坝; 棱体排水; 复变函数; 超越几何函数

中图分类号: TV233.6

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2012)01-0102-08

作者简介: 吴世余(1926-), 男, 教授级高级工程师, 从事土工和渗流研究工作。E-mail: qianfu66@163.com。

Analytic solution of seepage calculation for dams and levees with mound drains on impervious strata

WU Shi-yu, SONG Xin-jiang

(Anhui and Huaihe River Water Resources Research Institute, Bengbu 233000, China)

Abstract: The seepage calculations of dams and levees with mound and layer drains on impervious strata are introduced. The slope angle of drain boundary is greater than 90° . The main contents and results are as follows: (1) For the mound drain with the downstream water depth $H_2=0$, according to the Kochina's theory $q/k=\mu h_0$, the reciprocal of ratio μ between the flow quantity and the height h_0 of release point is calculated, and the relevant fitting formula for $1/\mu$ is presented. By means of the transformed hypergeometric function, a formula for the exit gradient and its distributions with slope angles of 90° , 135° , 180° is given. (2) The conformal mapping method is employed to get the critical water depth H_C of the mound drain, and its derivation process is much simpler than that of the Novmurov's method. (3) For the mound drain with $H_2 \geq H_C$, according to the Novmurov's theory $\Delta L_2=D_1 H_2+D_2 q/k$, the proportional coefficients D_1 and D_2 of additional length of downstream seepage path are calculated, and two fitting formulae for D_1 and D_2 with enough precision are presented. The conformal mapping method is used to get the exact seepage solution in downstream district with mound drains, combined with the corresponding solution by Normurov in the upstream district of dams and levees, an example is calculated accurately to get the flow quantity ratio q/k , height of release point h_s , distribution of exit gradient I , coordinates of the whole phreatic line and its inflection points to check the corresponding program of finite element and other approximate methods. (4) For the mound drain with $0 < H_2 < H_C$, two approximate formulae for the height h_s of release point and the additional length ΔL_2 of downstream seepage path are presented. The calculated results agree with the results of the finite element methods.

Key words: seepage; dam and levee; mound drain; complex variable; hypergeometric function

0 引言

文献[1]系论述不透水地基上贴坡排水堤坝的渗流计算, 排水边坡坡角小于 90° , 其论述主要系针对堤防工程; 本文则论述不透水地基上设有棱体和褥垫

排水堤坝的渗流计算, 排水边坡坡角大于 90° , 其论述主要系针对土坝工程。土坝下游通常均有尾水, 故

本篇对尾水条件下的堤坝作了比较深入的研究分析和计算。

本文仍以文献[1]关于堤坝流态分区概念以及上下游流态互不影响的论点为基础, 继续求解堤坝棱体和褥垫排水的渗流问题。

1 下游水深 $H_2=0$ 条件下的理论解

设有排水棱体且下游水深 $H_2=0$ 的堤坝如图 1 所示, 图中示出堤坝的边界条件和流态, 以及坝体各部分尺寸的符号, 并设 $L' \geq (2.5 \sim 3.5) H_1$ 。

1.1 摘录文献[1, 2]的部分计算式备用

$$q/k = \frac{H_1^2 - h_0^2}{2L} = \frac{H_1^2 - h_0^2}{2(L' + \Delta L_1 + \Delta L_2)} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{\mu} q/k, \\ \Delta L_1 &= C_1 H_1 - C_2 q/k, \\ \Delta L_2 &= C_3 q/k, \\ C_1 &= 0.44 \frac{m_1^{1.2}}{0.58 + m_1^{1.2}}, \\ C_2 &= \frac{1}{3} \frac{1}{1 + 0.625 m_1^{1.2}}, \\ C_3 &= \frac{0.0577}{1 + 0.364 m_3^{1.25}}, \\ m_1 &= \cot \tau \pi, \\ m_3 &= \cot \beta \pi, \\ L' &= L_0 + m_3 h_0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= F(1/2, 1/2; 3/2 - \sigma; \zeta), \\ V_0 &= \zeta^{\sigma-1/2} F(\sigma, \sigma; 1/2 + \sigma; \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 q 为单宽流量, k 为渗透系数; μ 为 q/k 和出逸点高度 h_0 的比例系数, μ 将在下节中求出; $\Delta L_1, \Delta L_2$ 为上下游的附加渗径; ζ 为辅助平面, U_0, V_0 为和堤坝相应的三奇点线性方程在 $|\zeta| \leq 1$ 域内的第一和第二基础解; $F(a, b; c; x)$ 为超越几何函数; 其余符号可参阅图 1。

1.2 比例系数 μ 的计算

比例系数 μ 的定义见式 (2), $1/\mu$ 按下列 3 式计算^[1]:

$$\frac{h_0}{q/k} = \frac{1}{\mu} = \frac{4}{\pi^2} \sin \sigma \pi \int_0^{\pi/2} \cot^{1-2\sigma} \theta \ln(\cot \frac{\theta}{2}) d\theta, \quad (4)$$

$$\frac{h_0}{q/k} = \frac{1}{\mu} = \frac{4^\sigma \sin \sigma \pi}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n+m} \Gamma(m-1+2\sigma)}{(n+\sigma)^2 \Gamma(-1+2\sigma) m!}, \quad (5)$$

$$\frac{h_0}{q/k} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2\sqrt{0.454 + 0.59m_3^{0.9} + m_3^2}}. \quad (6)$$

式 (4) 系法尔科维奇以积分形式提出的理论计算式, 式 (5) 系米哈依洛夫以双级数形式提出的理论计算式, 式 (6) 系本文为简化计算提出的 $\sigma \geq 1/2$ 的拟合式, 计算结果列于表 1。

表 1 系数 μ 的倒数

Table 1 Values of reciprocal of coefficient μ			
$\theta_2 / (^\circ)$	m_3	$1/\mu$	
		级数式 (5)	拟合式 (6)
90	0	0.74246	0.74207
105	0.26795	0.59494	0.59501
120	0.57735	0.46717	0.46682
135	1.00000	0.35024	0.34973
150	1.73205	0.23753	0.23779
165	3.73205	0.12298	0.12380
180	∞	0	0

应用其他计算方法校核 $\sigma=1/2$ 的 $1/\mu$ 值。按式 (4) 应用 Simpson 数值积分法^[3] 计算, $1/\mu=0.74257$; 应用定积分计算^[1, 4], $1/\mu=0.74245$ (精确值), 均甚接近。也可改用下式计算比例系数 μ' :

$$\frac{1}{\mu'} = \frac{h_0 / \sin \sigma \pi}{q/k} = \frac{l_0}{q/k} \quad (7)$$

式中, l_0 为图 1 中出逸点 F 至坡脚 G 点的斜长。对于 $\sigma=1$, 按式 (4) 计算, $1/\mu'=0.50056$, 按式 (5) 计算, $1/\mu'=0.50054$, 按式 (6) 取 $\sigma \rightarrow 1$ 的极限计算, $1/\mu'=1/2$; 也可按定积分计算如下^[4]:

$$\begin{aligned} \frac{l_0}{q/k} = \frac{1}{\mu'} &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\cot \theta/2)}{\cot \theta} d\theta \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} -\tan \theta \ln(\tan \theta/2) d\theta, \end{aligned}$$

$$\text{变元 } u = \tan^2 \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{\mu'} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \frac{1 - \ln u}{1 - u^2} du = \frac{-4 - \pi^2}{\pi^2} = 1/2.$$

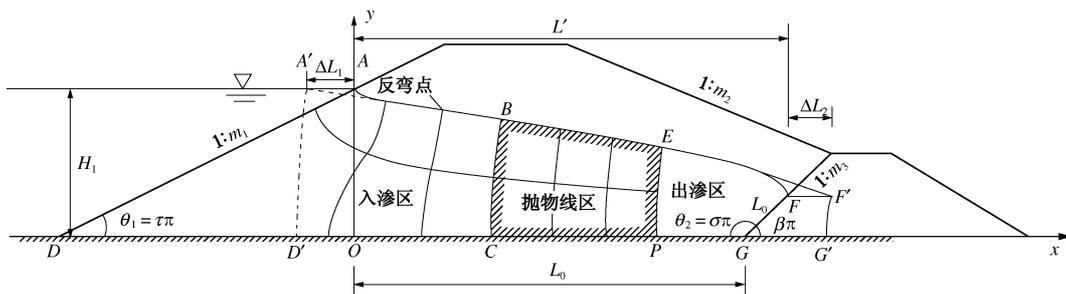


图 1 棱体排水的堤坝 (下游水深 $H_2=0$)

Fig. 1 Dams and levees with mound drains with $H_2=0$

根据上述计算知,按拟合式计算的 $1/\mu$ 和 $1/\mu'$ 与理论式十分接近,精度足够。拟合式计算简便,可用以计算堤坝渗流。

1.3 出逸坡降计算

下游水深 $H_2=0$ 条件下堤坝棱体排水如图 2 所示。出逸段的共轭速度为^[2]

$$\bar{W} = u - iv = \frac{d\omega}{dz} = \frac{d\omega/d\zeta}{dz/d\zeta} = \frac{F}{Z} = \frac{AU_0 + BV_0}{CU_0 + DV_0} \quad (8)$$

式中, \bar{W} 为共轭速度, u 为水平向分速, v 为垂直向分速, $\omega = \phi + i\psi$ 为复势, ϕ 为势函数, ψ 为流函数。

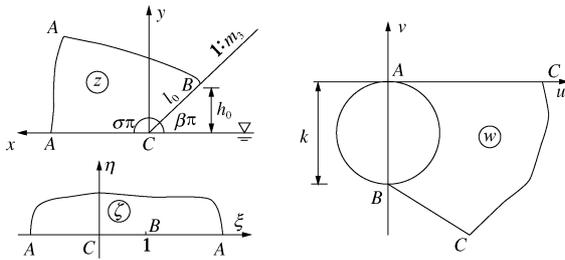


图 2 棱体排水的速度平面 ($H_2=0$)

Fig. 2 Velocity plane of mound drains with $H_2=0$

对于超越几何函数 $F(a,b;c;x)$, 如 $c \leq a+b$, 那么 $F(a,b;c;1) = \infty$ 。据此由于 $\sigma \geq 1/2$, 故 $U_0(1), V_0(1)$ 均为 ∞ , 但 $U_0(1)/V_0(1)$ 为定值。今应用下一变换式^[5]:

$$F(a,b;c;x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; x) \quad (9)$$

将 U_0, V_0 变换为

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= (1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\sigma} U'_0 = (1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\sigma} F(1-\sigma, 1-\sigma; \frac{3}{2}-\sigma; \zeta) \\ V_0 &= (1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\sigma} V'_0 = (1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\sigma} \zeta^{\sigma-\frac{1}{2}} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \sigma; \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将式 (10) 代入式 (8) 得

$$\bar{W} = \frac{AU'_0 + BV'_0}{CU'_0 + DV'_0} \quad (11)$$

式 (10)、(11) 中, $U'_0(1), V'_0(1)$ 均为定值。根据图 2 的速度平面确定式 (11) 的待定系数。 $\zeta \rightarrow 0, W \rightarrow \infty$, 故 $C=0$, 式 (11) 可写成

$$\bar{W} = \bar{A}U'_0/V'_0 + \bar{B} \quad (12)$$

式中, $\bar{A} = A/D, \bar{B} = B/D$ 。再以 $\zeta \rightarrow 0, u/v \rightarrow \tan \sigma\pi$ 条件代入, 求出 \bar{A}, \bar{B} 并代回式 (12), 得

$$\bar{W} = u - iv = \frac{\pi \Gamma(\frac{1}{2} + \sigma)}{\Gamma^2(\sigma) \Gamma(\frac{3}{2} - \sigma)} k(i + \tan \sigma\pi) \cdot \frac{F(1-\sigma, 1-\sigma; \frac{3}{2} - \sigma; \zeta)}{\zeta^{\sigma-\frac{1}{2}} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \sigma; \zeta)} - k \tan \sigma\pi \quad (13)$$

出逸段 y/h_0 的坐标式为

$$y/h_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\pi} \Gamma(1-\sigma) \Gamma(\frac{1}{2} + \sigma)} \int_0^\zeta \frac{F(\sigma, \sigma; \frac{1}{2} + \sigma; \zeta)}{\zeta^{1-\sigma}} d\zeta \quad (14)$$

以 $\sigma=3/4$ 代入式 (13)、(14), 计算棱体排水出逸段的坡降, 计算结果列于表 2。按表 2 的 I_x, I_y 曲线反算校核得 $q/k=2.835h_0$, 和理论值 $2.8552 h_0$ 接近。

表 2 $\sigma=135^\circ$ 棱体排水出逸段的坡降 ($H_2=0$)

Table 2 Exit gradients of mound drains with slope angle of 135° ($H_2=0$)

ζ	y/h_0	$\downarrow I_y$	$\rightarrow I_x$	I	倾角 $\alpha / (^\circ)$
0	0	∞	∞	∞	45
0.0004	0.0019	10.942	9.942	14.784	47.74
0.0060	0.0141	5.556	4.556	7.185	50.65
0.0300	0.0474	3.705	2.705	4.587	53.87
0.1000	0.1186	2.719	1.719	3.217	57.70
0.2000	0.2038	2.256	1.256	2.582	60.89
0.4000	0.3599	1.839	0.839	2.021	65.48
0.7000	0.6042	1.495	0.495	1.575	71.68
0.8500	0.7531	1.347	0.347	1.391	75.55
0.9500	0.8885	1.203	0.203	1.220	80.42
1.0000	1.0000	1.000	0	1.000	90

以 $\sigma=1$ 代入式 (13), 计算褥垫排水出逸段的出逸坡降:

$$\begin{aligned} \bar{I} = I_x - iI_y &= \frac{\pi \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma^2(1) \Gamma(\frac{1}{2})} i \frac{F(0, 0; \frac{1}{2}; \zeta)}{\sqrt{\zeta} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \zeta)} \\ &= \frac{\pi}{2} i \frac{1}{\sqrt{\zeta} \arcsin \sqrt{\zeta}} = \frac{\pi}{2} i \frac{1}{\arcsin \sqrt{\zeta}} \quad (15) \end{aligned}$$

再以 $\sigma=1-\varepsilon$ 代入式 (14), 并取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限, 得

$$\begin{aligned} \frac{-x}{l_0} = \frac{-x}{x_0} = \frac{-y}{h_0} &= \frac{\mu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\varepsilon) \Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\zeta F(1, 1; \frac{3}{2}; \zeta) d\zeta \\ &= \frac{\mu' \sin \pi \varepsilon}{\sqrt{\pi} \Gamma(\varepsilon) / 2} \int_0^\zeta \frac{\arcsin \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta} \sqrt{1-\zeta}} d\zeta \quad (16) \end{aligned}$$

变元 $\zeta = \sin^2 \theta$ 得

$$\frac{-x}{x_0} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\theta 2\theta d\theta = \frac{4}{\pi^2} (\arcsin \sqrt{\zeta})^2 \quad (16)$$

将式 (15) 代入式 (16), 得

$$\bar{I} = I_x - iI_y = i \sqrt{\frac{x_0}{-x}} \quad (17)$$

式 (17) 和应用保角变换导出的坡降式相符^[6]。

以 $\sigma=1/2+\varepsilon$ 代入式 (13), 计算竖向排水坡的出逸坡降:

$$\begin{aligned} \bar{I} = I_x - iI_y &= \frac{\pi \Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma^2(\frac{1}{2} + \varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon)} (i - \frac{1}{\pi \varepsilon}) \\ &= \frac{F(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon; 1 - \varepsilon; \zeta)}{\zeta^\varepsilon F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1 + \varepsilon; \zeta)} + \frac{1}{\pi \varepsilon} \quad (18) \end{aligned}$$

展开上式, 并取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限, 得

$$\bar{I} = I_x - iI_y = -\frac{4}{\pi} \ln 2 + \frac{1}{2K(\sqrt{\zeta})} (0.5\zeta + 0.32184\zeta^2 + 0.24089\zeta^3 + 0.18927\zeta^4 + 0.15640\zeta^5 + 0.13297\zeta^6 + 0.11562\zeta^7 + 0.10227\zeta^8 + 0.09166\zeta^9 + 0.08306\zeta^{10} + R_{11}) + \frac{1}{\pi} \ln \zeta + i, \quad (19)$$

式中, R_{11} 为级数 11 项以后的余项和, 可根据级数 8, 9, 10 项数值在全对数纸上点绘曲线, 再据此求出 R_{11} 。再以 $\sigma=1/2$ 代入式 (14), 得

$$y/h_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(1)} \int_0^\zeta \frac{F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \zeta)}{\zeta^{\frac{1}{2}}} d\zeta = \frac{\mu}{\pi} \int_0^\zeta \frac{2K(\sqrt{\zeta})}{\zeta^{\frac{1}{2}}} d\zeta,$$

变元 $\zeta = k^2$, 并以 $\mu=1.34689$ 代入, 得

$$y/h_0 = \frac{4\mu}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\zeta}} K(k) dk = \frac{4\mu}{\pi^2} \frac{\pi\sqrt{\zeta}}{2} \left[1 + \frac{(2!)^2 \zeta}{3 \times 2^4 (1!)^4} + \frac{(4!)^2 \zeta^2}{5 \times 2^8 (2!)^4} + \dots + \frac{(2n!)^2 \zeta^n}{(2n+1) \times 2^{4n} (n!)^4} \right] = \frac{2}{\pi} \times 1.34689 \sqrt{\zeta} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n!)^2 \zeta^n}{(2n+1) \times 2^{4n} (n!)^4} \right], \quad (20)$$

按式 (19)、(20) 计算的结果列于表 3。按表 3 的 I_x 分布曲线反算校核 $q/k=1.34h_0$, 和理论值 $1.34689 h_0$ 接近。

表 3 竖向边坡出逸段的坡降 ($H_2=0$)

Table 3 Exit gradients of mound drains with slope angle of 90°

$(H_2=0)$					
ζ	y/h_0	$\downarrow I_x$	$\rightarrow I_y$	I	倾角 $\alpha/(^\circ)$
0	0	∞	∞	∞	0
0.0001	0.0086	3.814	1	3.943	14.69
0.001	0.0271	3.081	1	3.239	17.98
0.01	0.0858	2.347	1	2.551	23.08
0.05	0.1926	1.828	1	2.084	28.68
0.1	0.2735	1.599	1	1.886	32.02
0.2	0.3903	1.360	1	1.688	36.33
0.3	0.4828	1.211	1	1.570	39.55
0.5	0.6374	1.000	1	1.414	45.00
0.7	0.7754	0.825	1	1.297	50.47
0.9	1.9144	0.596	1	1.164	59.21
1.0	1.0	0	1	1	90

1.4 算例

算例 1: $H_1=25$ m, $H_2=0$, $m_1=2.5$, $m_3=1$, $\sigma=3/4$, $L_0=62.5$ m, 计算流量 q/k , 出逸点高度 h_0 , 出逸段的坡降分布, 并绘制浸润线。

按式 (2) 计算得, $C_1=0.3688$, $C_2=0.1159$, $C_3=0.0423$; 按表 1, $1/\mu=0.35024$, $\mu=2.8552$; 按式 (1) 立出 q/k 方程式:

$$q/k = \frac{H_1^2 - h_0^2}{2(L_0 + m_2 h_0 + \Delta L_1 + \Delta L_2)} = \frac{25^2 - (0.35024 q/k)^2}{2(62.5 + 1 \times 0.35024 q/k + 0.3688 \times 25 - 0.1159 q/k + 0.0423 q/k)} \cdot 0.67595 (q/k)^2 + 143.44 q/k - 625 = 0.$$

$q/k = 4.271$ m; $h_0 = 4.271 \times 0.35024 = 1.496$ m。

按式 (2) 计算, $\Delta L_1=8.725$ m, $\Delta L_2=0.181$ m。已知 H_1 , h_0 , ΔL_1 和 ΔL_2 , 那么图 1 中的 A' 和 F' 点的坐标已确定。 $A'F'$ 为抛物线, 各点的坐标为

$$q/k = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2(x_2 - x_1)}. \quad (21)$$

按上式的计算结果绘出 $A'F'$ 线。然后从 A 点引一垂直于边坡并和 $A'F'$ 线相切的短线; 再从 F 点引一和垂线相切, 并和 $A'F'$ 线也相切的短线, AF 线即为浸润线。出逸段坡降见表 2。

2 下游水深 H_2 大于临界水深 H_C 条件下的理论解

受发电尾水和泄洪的影响, H_2 常大于临界水深 H_C , 本文对此作了比较深入的研究。

2.1 棱体排水的临界水深 H_C

根据不同类型边界 (等势线、流线、浸润线和出逸边界) 相交的法则^[7], 棱体排水有如图 3 所示的 3 种形式。对于一定流量 q/k 和棱体边坡坡比 m_3 , 有一对应的临界水深 H_C 。在 $H_2=H_C$ 条件下, 浸润线和下游水位线衔接, 且垂直于棱体边坡; $H_2>H_C$, 浸润线也和下游水位线衔接, 但浸润线在出逸点呈水平, 坡降为零; $H_2<H_C$, 浸润线在出逸点垂直向下, 且有临空的出逸段。

$$\text{努美罗夫应用混合函数法导出系数 } f(m_3) = \frac{H_C}{q/k}$$

的计算式^[2], 但是其推导过程繁复冗长, 本文在下面应用速度平面变换以简化计算。图 4 所示为 $H_2 = H_C$ 条件下棱体排水的映像平面, 各平面的变换式为

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{iq}{\pi} \arccos(1-2\zeta), \\ p &= \frac{-i + \tan \beta \pi}{k \Gamma(1/2 + \beta) \Gamma(1/2 - \beta)} \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\zeta^{1/2+\beta} (1-\zeta)^{1/2-\beta}} \end{aligned} \right\} (22)$$

$$z_B - z_C = H_C (\cot \beta \pi + i) = \int_{\zeta=0}^1 p d\omega = [p\omega]_{\zeta=0}^1 - \int_{\zeta=0}^1 \omega dp = \frac{q}{k} (1+i \tan \beta \pi) - \frac{q}{\pi k} \frac{1+i \tan \beta \pi}{\Gamma(\frac{1}{2}+\beta) \Gamma(\frac{1}{2}-\beta)} \int_0^1 \frac{\arccos(1-2\zeta)}{\zeta^{\frac{1}{2}+\beta} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\beta}} d\zeta,$$

$$H_c = \frac{q}{k} \left[\tan \beta \pi - \frac{\sin \beta \pi}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\arccos(1-2\zeta)}{\zeta^{\frac{1}{2}+\beta} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\beta}} d\zeta \right]$$

换元 $\arccos(1-2\zeta) = 2\theta$, 得

$$H_c = \frac{q}{k} \left[\tan \beta \pi - \frac{4 \sin \beta \pi}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cot^{2\beta} \theta d\theta \right], \quad (23)$$

式(23)即为本文以简化方法导出的努氏 H_c 计算式。

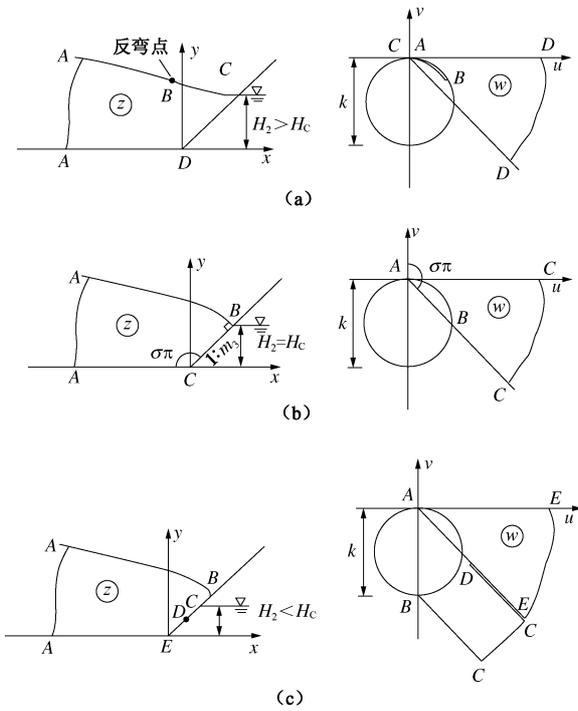


图3 棱体排水的3种状态

Fig. 3 Three states of mound drains

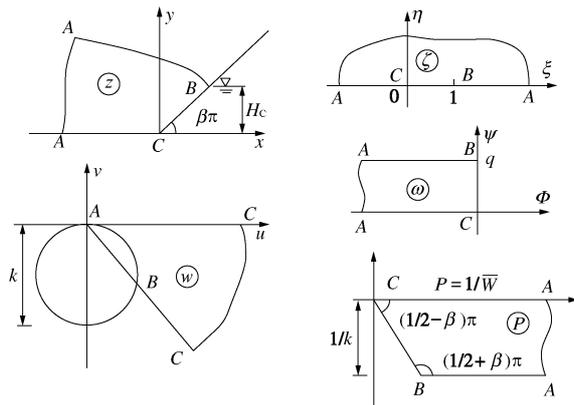


图4 棱体排水的映像平面 ($H_2=H_c$)

Fig. 4 Image planes of mound drains with $H_2=H_c$

再以 $m_3 = \cot \beta \pi$ 代入式(23), 得

$$f(m_3) = \frac{H_c}{q/k} = \frac{1}{m_3} - \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1+m_3^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cot^{2\beta} \theta d\theta, \quad (24)$$

按式(24)计算系数 $f(m_3)$ 。 $\theta=0^\circ \sim 5^\circ$ 和 $\theta=85^\circ \sim 90^\circ$ 区间。将 $\cot^{2\beta} \theta$ 展为级数取2项积分计算; $\theta=5^\circ \sim$

85° 区间应用 Simpson 数值积分法计算^[3]。计算结果列于表4。另提出一拟合式

$$\frac{H_c}{q/k} = \frac{1}{m_3} - \frac{0.75}{1.7 + m_3^{1.2}}, \quad (25)$$

计算结果也列于表4。

表4 棱体排水下游临界水深的系数 $f(m_3)$

m_3	努氏式 $f(m_3)$	拟合式 $f(m_3)$
0	∞	∞
0.25	3.6023	3.6031
0.50	1.6459	1.6488
1.00	0.7208	0.7222
1.50	0.4414	0.4412
2.00	0.3133	0.3124
2.50	0.2413	0.2405
3.00	0.1956	0.1954
∞	0	0

2.2 下游区的附加渗径

努美罗夫应用混合函数法求出 $H_2 > H_c$ 条件下堤坝下游区的浸润线方程为^[2] (参考图3(a)的坐标)

$$x = \frac{k(H_2^2 - y^2)}{2q/k} + H_2 \frac{4 \cos \beta \pi}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{1-2\beta} \theta \cdot \arccot \left[\tanh \frac{\pi(y-H_2)}{2q/k} \tan \theta \right] d\theta + \frac{q}{k} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^3} \sin \beta \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{1-2\beta} \theta \arccot^2 \left[\tanh \frac{\pi(y-H_2)}{2q/k} \tan \theta \right] d\theta \right\}, \quad (26)$$

当 x 进入反弯点之左一定距离后, 进入抛物线流网区, $\tanh \frac{\pi(y-H_2)}{2q/k} \approx 1$ 。式(26)可简化, 再和流量计算式

$$q/k = \frac{y^2 - H_2^2}{2(-x + \Delta L_2)} \quad (27)$$

相比较得

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_2 &= D_1 H_2 + D_2 q/k, \\ D_1 &= \frac{4}{\pi^2} \cos \beta \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cot^{1-2\beta} \theta d\theta, \\ D_2 &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^3} \sin \beta \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \cot^{1-2\beta} \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中, ΔL_2 系离棱体排水坡角点的附加渗径, 并非从出逸点计起的附加渗径。

另提出 D_1 和 D_2 的拟合式:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= 0.44 \frac{m_3^{1.2}}{0.58 + m_3^{1.2}}, \\ D_2 &= \frac{0.53 + m_3^{1.23}}{1.59 + 2m_3^{1.23}}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

按式(28)、(29)的计算结果列于表5。

表 5 $H_2 \geq H_C$ 棱体排水出渗区的附加渗径系数

Table 5 Coefficients of downstream additional seepage path for mound drains with $H_2 \geq H_C$

$B\pi/(^\circ)$	90	75	60	45	30	15	0
m_3	0	0.26795	0.57735	1	1.73205	3.73205	∞
式 (28) D_1	0	0.1149	0.2054	0.2794	0.3415	0.3948	0.4413
式 (29) D_1	0	0.1153	0.2074	0.2785	0.3385	0.3931	0.4400
式 (28) D_2	0.3333	0.3670	0.3979	0.4263	0.4525	0.4770	0.5
式 (29) D_2	0.3333	0.3666	0.3984	0.4262	0.4520	0.4773	0.5

2.3 出逸坡降

为便于计算出逸坡降, 本文应用速度平面变换求出坡降的计算式。排水棱体的映像平面如图 5 所示, 平面变换式为

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{\bar{W}} = \frac{1}{\pi k(a-1)} \int_0^\zeta \frac{a-\zeta}{\zeta^{1/2+\beta}(1-\zeta)} d\zeta, \\ \omega &= \phi + i\psi = \frac{-q}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\zeta} + 1}{\sqrt{\zeta} - 1} = \frac{-2q}{\pi} \operatorname{arctanh} \frac{1}{\sqrt{\zeta}}, \\ z &= x + iy = \int_0^\zeta p d\omega = [\omega p]_0^\zeta - \int_0^\zeta \omega dp. \end{aligned} \right\} (30)$$

以 CD 段的坐标代入式 (30), 并设 $\zeta = -s$, 得

$$\left. \begin{aligned} H_2 &= \frac{2q \sin \beta\pi}{k\pi^2} \left[\int_0^\infty \frac{1}{s^{1/2+\beta}(1+s)} \operatorname{arctan} \frac{1}{\sqrt{s}} ds + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{a-1} \int_0^\infty \frac{1}{s^{1/2+\beta}} \operatorname{arctan} \frac{1}{\sqrt{s}} ds \right]. \end{aligned} \right\} (31)$$

再以已知的 H_2 , β 和 q/k 代入式 (31), 求出反弯点的参数 a 。

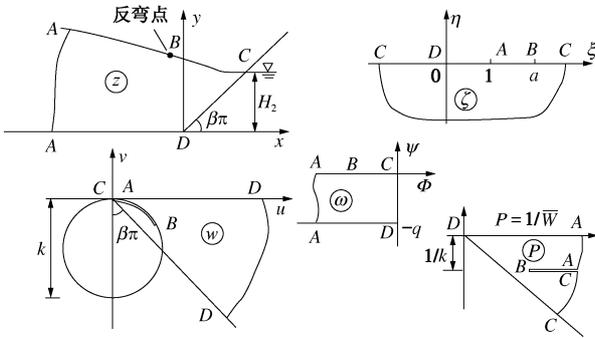


图 5 棱体排水的映像平面 ($H_2 > H_C$)

Fig. 5 Image planes of mound drains with $H_2 > H_C$

按下式计算 CD 段的出逸坡降

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} &= u - iv = \frac{1}{p}, \\ p &= \frac{1}{\pi k(a-1)(\sin \beta\pi + i \cos \beta\pi)} \int_0^s \frac{a+s}{s^{1/2+\beta}(1+s)} ds, \\ y &= \frac{2q \sin \beta\pi}{\pi^2 k(a-1)} \left[\int_0^s \frac{a+s}{s^{1/2+\beta}(1+s)} \operatorname{arctan} \frac{1}{\sqrt{s}} ds \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arctan} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \frac{a+s}{s^{1/2+\beta}(1+s)} ds \right]. \end{aligned} \right\} (32)$$

2.4 算例

算例 2: $H_1=25$ m, $H_2=4 \sim 10$ m, $m_1=2.5$, $m_3=1$,

$L_0=62.5$ m, 计算不同水深 H_2 的 q/k , 并计算 $H_2=5$ m 的出逸段坡降和全程浸润线。

按提供的数据得 $C_1=0.3688$, $C_2=0.1159$, $D_1=0.2794$, $D_2=0.4263$ 。

按下式计算 H_C : $\frac{2H_C}{0.721} = (25^2 - H_C^2)/(62.5 + 0.3688 \times 25 - \frac{0.1159H_C}{0.721} + 0.2794H_C + \frac{0.4263H_C}{0.721})$, 得 $2.969H_C^2 + 198.951H_C - 625 = 0$, 解方程, $H_C=3.007$ m, 相应 $q_C/k=4.170$ m, 再按下式计算 $H_2=H_C \sim 10$ m 的 q/k 。

$$\frac{2q}{k} = \frac{25^2 - H_2^2}{62.5 + 0.3688 \times 25 - \frac{0.1159q}{k} + 0.2794H_2 + \frac{0.4263q}{k}}$$

q/k 的计算结果列于表 6。按河海大学有限元计算程序^[8]的计算结果也列于表 6, 按式 (31) 计算出反弯点参数 $a=0.34464$ 。再按式 (32) 计算 $H_2=5$ m 出逸段的坡降, 计算结果列于表 7。据表 7 的坡降分布反算校核 $q/k=4.05$ m, 和理论值 4.034 m 接近。

表 6 算例 2 $H_2 \geq H_C$ 不同水深下的 q/k

Table 6 Relation between H_2 and q/k of Example 2 with $H_2 \geq H_C$

$h_s=H_2/m$	h_s/m 有限元	$q/k/m$ 理论	$q/k/m$ 有限元
3.007	—	4.170	—
4	4.00	4.109	4.10
5	5.08	4.034	4.02
6	5.99	3.947	3.93
7	7.03	3.847	3.83
8	8.00	3.734	3.72
9	9.06	3.610	3.60
10	10.00	3.473	3.46

表 7 算例 2 $H_2=5$ m 的出逸段坡降

Table 7 Exit gradients of Example 2 with $H_2=5$ m

ζ	y/H_2	l
0	0	∞
0.00001	0.00011	9.922
0.0001	0.00067	5.580
0.001	0.00377	3.159
0.01	0.02038	1.806
0.1	0.07676	1.018
1	0.30367	0.620
10	0.63704	0.442
100	0.82976	0.328
1000	0.91684	0.231
10000	0.95746	0.151
∞	1	0

对于 $m_3=1$, $\sigma=3/4$ 的排水棱体, 求出下游区的

浸润线方程及其斜率为

$$z = x + iy = H_2(1+i) - \frac{q/k}{\pi^2} \int_{\zeta}^{\infty} \left(\frac{4}{a-1} \zeta^{1/4} + 2\operatorname{ar} \tanh \frac{1}{\zeta^{1/4}} + 2\operatorname{ar} \operatorname{ctan} \zeta^{1/4} - \pi i \right) \frac{d\zeta}{\zeta^{1/2}(\zeta-1)} \quad (33)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\pi}{\frac{4\zeta^{1/4}}{a-1} + 2\operatorname{ar} \tanh \frac{1}{\zeta^{1/4}} + 2\operatorname{ar} \operatorname{ctan} \zeta^{1/4}}$$

出逸点 C, $\zeta \rightarrow \infty$, 按式 (33) 知 $dy/dx=0$; 以反弯点 $\zeta = a=0.34464$ 代入式 (33), 得 $dy/dx=0.5256$ 。

将浸润线化为等效的抛物线, 其起始点坐标为 $x = -62.5 - \Delta L_1 = -71.252 \text{ m}$, $y = 25 \text{ m}$; 终点坐标为 $x = \Delta L_2 = 3.117 \text{ m}$, $y = 5 \text{ m}$ 。据此绘出抛物线, 并按前述方法近似地修正始段和终段, 即为全程的浸润线。也可按式 (33) 严格地计算下游区的浸润线。

$\zeta = \infty \sim 10000$ 将 z 式展为级数取首项积分; $\zeta = 1.0001 \sim 10000$ 应用 Simpson 数值积分法^[7]计算。上游区上反弯点以左的浸润线应用文献[1]中式 (6)、(9) 严格计算。计算结果和有限元的计算结果列于表 8。有限元计算中, 已根据理论提示: $H_2 \geq H_C$, $h_s = H_2$, 将出逸点直接定在 $h_s = H_2 = 5 \text{ m}$ 的一点。如不预先定出出逸点, 那么按程序自动求出的出逸点高度和 5 m 有差; 浸润线在出逸点并不趋于水平, 略上翘, 最低点 5.067 m, 上翘至 5.090 m。

表 8 算例 2 $H_2=5 \text{ m}$ 的浸润线坐标

Table 8 Coordinates of phreatic line of Example 2 with $H_2=5 \text{ m}$

ζ	x/m	y/m 理论	y/m 有限元	y/m 抛物线
—	-62.500	25.000	25.000	—
—	-60.726	24.000	24.025	—
—	-57.176	23.000	23.008	—
—	-51.372	21.700	21.704	21.555
上反弯点	-44.680	20.298	20.311	20.264
1.0001	-36.840	18.607	18.646	18.638
1.001	-24.245	15.651	15.669	15.677
1.01	-13.832	12.700	12.705	12.718
1.1	-5.773	9.799	9.840	9.835
2	-0.223	7.263	7.306	7.207
下反弯点	3.44664	6.547	6.578	6.390
10	2.520	5.841	5.871	—
100	3.864	5.258	5.283	—
1000	4.434	5.081	5.094	—
10000	4.707	5.026	—	—
∞	5.000	5.000	5.000	—

3 下游水深 $0 < H_2 < H_C$ 条件下的近似理论解

3.1 出逸点高度 h_s

h_s 的计算系借用矩形坝的计算结果^[2]整理出计算式:

$$s'_2 = h_0 \left(1 - \frac{H_2}{H_1} \right)^{\frac{H_1 + H_2}{h_0 + H_1}} \quad (34)$$

式中, H_1 为上游水深, h_0 为下游水深 $H_2=0$ 条件下的出逸点高度, 其他符号如图 6 所示。按式 (34) 计算的 s'_2 须加以修正。修正方法: 先按 $H_2=H_C$ 代入式 (34) 计算出 s'_C , 再按下式计算 s_2 和 h_s :

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= s'_2 - \frac{H_2}{H_C} s'_C, \\ h_s &= H_2 + s_2. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

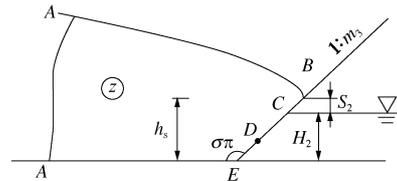


图 6 $0 < H_2 < H_C$ 条件下棱体排水的示意图

Fig. 6 Sketch map of mound drains with $0 < H_2 < H_C$

3.2 出渗区的附加渗径 ΔL_2

$H_2=0$ 和 $H_2=H_C$ 条件下的附加渗径已知, 可近似地按线性比例求出 $0 < H_2 < H_C$ 条件下的附加渗径, 计算式为

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_2 &= \Delta L_{20} + \frac{\Delta L_{2C} - \Delta L_{20}}{H_C} H_2, \\ \Delta L_{20} &= m_3 h_0 + c_3 q/k, \\ \Delta L_{2C} &= D_1 H_C + D_2 q_C/k. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

式 (36) 的 ΔL_2 系从棱体排水坡坡角点计起。

3.3 算例

算例 3: $H_1=25 \text{ m}$, $H_2=1 \sim 3 \text{ m}$, $m_1=2.5$, $m_3=1$, $L_0=62.5 \text{ m}$, 求不同水深 H_2 的 q/k 和 h_s 。已知 $H_C=3.007 \text{ m}$, $h_0=1.496 \text{ m}$, 代入式 (34) 得 $s'_C=0.173 \text{ m}$ 。按式 (36) 计算 ΔL_{20} 和 ΔL_{2C} 。($H_2=0$, $q/k=4.271 \text{ m}$), $\Delta L_{20}=1.496 \times 1 + 0.0423 \times 4.271=1.677 \text{ m}$, $\Delta L_{2C}=0.2794 \times 3.007 + 0.4263 \times 4.170=2.618 \text{ m}$ 。

再按式 (35)、(36) 和式 (1) (将式中 L 改为 L_0) 计算出 q/k 和 h_s 列于表 9, 另列出有限元的计算结果以资比较。

表 9 算例 3 的 q/k 和 h_s ($0 < H_2 < H_C$)

Table 9 q/k and h_s of Example 3 with $0 < H_2 < H_C$

H_2/m	h_s/m 式(32)	h_s/m 有限元	$q/k/m$ 式(1)	$q/k/m$ 有限元
0	1.496	1.480	4.271	4.26
1	1.697	1.653	4.234	4.24
2	2.254	2.320	4.201	4.21
3	3.001	3.000	4.171	4.17
$H_C=3.007$	3.007	—	4.170	—

浸润线仍按上述等效抛物线并修正始段和终段的方法绘制。对于 $0 < H_2 < H_C$ 的情况, 出逸段的坡降除矩形坝外无理论解, 仅按图 3 (c) 的速度平面简述出逸

段控制点 B, C, D, E 的坡降。 B 点 $I_x=0; I_y=-1$; 向下坡降渐增, 至 C 点 $I_x=\infty; I_y=-\infty, I_x/I_y=\tan\sigma\pi$; 再向下坡降渐减, 至 D 点为极值; 过 D 点坡降又渐增, 趋近 E 点 $I_x=\infty; I_y=-\infty, I_x/I_y=\tan\sigma\pi$ 。

4 结 论

(1) 对于下游水深 $H_2=0$ 棱体排水的堤坝, 按米氏双级数式计算出 $q/k=\mu h_0$ 式中的系数 μ , 并相应地提出有足够精度的拟合式, 以便于应用。应用转化的超越几何函数导出出逸段的出逸坡降式, 并具体计算出 $\pi\sigma=90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ 的出逸坡降分布。

(2) 应用速度平面变换的简单方法导出排水棱体临界水深的计算式。

(3) 对于下游水深 $H_2>H_C$ 棱体排水的堤坝, 按努氏式 $\Delta L_2=D_1H_2+D_2q/k$ 精确计算出下游区附加渗径的比例系数 D_1 和 D_2 , 并相应地提出有足够精度的拟合式。应用保角变换求出该型堤坝中下游区的精确解, 可据此计算出逸段的坡降和中下游区的浸润线及其反弯点。结合努氏上游区的严格解, 举出一具体算例, 精确计算出流量 q/k , 出逸点高度 h_s , 出逸段坡降 I 和全程浸润线及反弯点的坐标, 可借以校核该型堤坝渗流有限元的计算程序和其它近似方法的正确性及其计算精度。

(4) 对于下游水深 $0<H_2<H_C$ 棱体排水的堤坝, 提出出逸点高度 h_s 和下游区附加渗径 ΔL_2 的两近似理论计算式。据此计算出的 q/k 和 h_s , 与有限元的计算结果相符。

致 谢: 本文有限元计算部分由孟繁瑾提供, 附言致谢。

参考文献:

[1] 吴世余, 宋新江. 不透水地基上堤坝渗流计算的理论解[J].

岩土工程学报, 2010, 32(11): 1695 - 1702. (WU Shi-yu, SONG Xin-jiang. Analytic solution of seepage calculation for dams and levees on impervious strata[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(11): 1695 - 1702. (in Chinese))

[2] 波卢巴里诺娃-可钦娜 П Я. 地下水运动原理[M]. 肖南森, 等译. 北京: 地质出版社, 1957. (POLUBARINOVA-Kochina P Y. Theory of grond water movment[M]. XIAO Nan-sen et al. trans. Beijing: Geology Press, 1952. (in Russian))

[3] SMITH P F. Mathematical texts of colleages[M]. Shanghai: Dragon Gate Press, 1946: 247.

[4] GRADSHTEYN I S. et al. Table of integrals, series, and products[M]. Academic Press, 1980: 533.

[5] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 科学出版社, 1965: 159. (WANG Zhu-xi, GUO Dun-ren. Introduction of special functions[M]. Beijing: Science Press, 1965: 159. (in Chinese))

[6] 毛昶熙. 渗流计算分析与控制(再版)[M]. 北京: 水利水电出版社, 2003: 94 - 95. (MAO Chang-xi. Seepage computation analysis and control[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003: 94 - 95. (in Chinese))

[7] 贝尔 J. 多孔介质流体动力学[M]. 李竞生等译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983: 224 - 228. (BEAR J. Dynamics of fluids in porous media[M]. LI Jing-sheng, et al. trans. Beijing: China Architecture and Building Press, 1983: 224 - 228. (in Chinese))

[8] 河海大学. 水工结构分析系统计算程序——Autobank 1.0 [CP]. 南京: 河海大学, 2004. (Hohai University. Calculating program of hydraulic structure analysis system——Autobank 1.0[CP]. Nanjing: Hohai University, 2004. (in Chinese))