解析层元法求解层状地基非轴对称荷载问题

艾智勇[1,2]，曾文泽[1,2]

（1. 同济大学地下建筑与工程系，上海 200092；2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室，上海 200092）

摘　要：从弹性层状地基非轴对称问题的解析解出发，推导出 Hankel 积分变换域内单层地基的解析层元，即对称的精确刚度矩阵；然后根据有限层法原理组合相邻层元得到总刚度矩阵，并结合边界条件，求解总刚度矩阵形成的代数方程，得到层状地基非轴对称问题在 Hankel 积分变换域内的解答；最后应用 Hankel 逆变换技术，得到物理域内的解。编制了相应的计算程序，分析了非轴对称荷载作用下多层地基沿径向的地表水平位移性状。

关键词：解析层元；层状地基；非轴对称荷载；Hankel 变换

中图分类号：TU433　　　**文献标识码**：A　　　**文章编号**：1000－4548(2011)07－1078－04

作者简介：艾智勇(1966－　)，男，江西余江人，博士，教授，主要从事岩土及地下工程方面的教学和研究工作。E-mail: zhiyongai@tongji.edu.cn。

Analytical layer-element method for non-axisymmetric loading problem of multi-layered soils

AI Zhi-yong[1, 2], ZENG Wen-ze[1, 2]

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Starting from the analytical solution for the non-axisymmetric elastic problem of multi-layered soils, the analytical layer element of a single soil layer, namely a symmetric exact stiffness matrix, is acquired in the Hankel transform domain. The global stiffness matrix is obtained by assembling the interrelated layer-elements based on the principles of finite layer method. By solving algebraic equations of the global stiffness matrix which satisfy the boundary conditions, we can get the solution to the non-axisymmetric loading problem for multi-layered soils in the Hankel transform domain. Eventually the actual solutions in the physical domain can be acquired by inverting the Hankel transform. Numerical calculation and analysis are carried out by means of the corresponding computer program, and the surface horizontal displacement of multi-layered soils along the radial direction under non-axisymmetric loading is discussed.

Key words: analytical layer element; multi-layered soils; non-axisymmetric loading; Hankel transform

0　引　　言

层状结构及地基的求解方法主要包括有限元法[1]、有限层法[2-3]、传递矩阵法[4-5]等。本文提出一种新的方法，即解析层元法来求解非轴对称荷载下的多层地基问题。解析层元法的基本思想：运用所求解问题基本控制方程的解析解，推导出相应层元的解析层元，即对称的精确刚度矩阵；然后根据有限层法原理组合相邻层元得到总刚度矩阵，并结合边界条件求解总刚度矩阵形成的代数方程，得到相应问题的精确解。

传统的有限元及有限层法在构造单元刚度及层元刚度矩阵时，需要采用近似的插值函数（通常采用多项式或半解析函数）；而解析层元法则是通过相应问题的解析解，直接推导出精确的刚度矩阵，因此具有精确、高效的特点。

1　解析层元刚度矩阵的推导

层状弹性体系作用非轴对称荷载，是一个典型的为非轴对称空间课题。为分析该课题，将应力和位移分量进行级数展开[6]，得

$$\left.\begin{aligned}
u_r &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{rk}(r,z)\cos k\theta，\quad \tau_{zr} = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{zrk}(r,z)\cos k\theta \\
u_\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{\theta k}(r,z)\sin k\theta，\quad \tau_{z\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{z\theta k}(r,z)\sin k\theta \\
u_z &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{zk}(r,z)\cos k\theta，\quad \sigma_z = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{zk}(r,z)\cos k\theta
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

收稿日期：2010－04－12

式中，u_r，u_θ，u_z 分别为径向、切向和竖向的位移，σ_z 为 z 方向的轴向应力，$\tau_{\theta z}$，τ_{rz} 为剪应力。当只存在 k=0 这一项时，上述问题就转化为轴对称空间问题。

Muki[6]在研究单一弹性层问题时，给出了柱坐标下一般的应力和位移表达式。引入相同的参数符号，并进一步令 $\tilde{A}=\xi^3 A_\xi$、$\tilde{B}=\xi^2 B_\xi$、$\tilde{C}=\xi^3 C_\xi$、$\tilde{D}=\xi^2 D_\xi$、$\tilde{E}=\xi^2 E_\xi$、$\tilde{F}=\xi^2 F_\xi$，可得非轴对称空间课题中应力和位移的表达式为[5]

$$u_{rk}=-\frac{1+\nu}{2E}(I_{k+1}-I_{k-1}) \quad , \tag{2a}$$

$$u_{\theta k}=-\frac{1+\nu}{2E}(I_{k+1}+I_{k-1}) \quad , \tag{2b}$$

$$u_{zk}=-\frac{1+\nu}{E}\int_0^\infty\{[\tilde{A}+(2-4\nu+\xi z)\tilde{B}]\mathrm{e}^{-\xi z}+[\tilde{C}-(2-4\nu-z\xi)\tilde{D}]\mathrm{e}^{\xi z}\}\mathrm{J}_k(\xi r)\mathrm{d}\xi \quad , \tag{2c}$$

$$\tau_{rzk}=\frac{1}{2}(L_{k+1}-L_{k-1}) \quad , \tag{2d}$$

$$\tau_{\theta zk}=\frac{1}{2}(L_{k+1}+L_{k-1}) \quad , \tag{2e}$$

$$\sigma_{zk}=\int_0^\infty \xi\{[\tilde{A}+(1-2\nu+\xi z)\tilde{B}]\mathrm{e}^{-\xi z}-[\tilde{C}-(1-2\nu-\xi z)\tilde{D}]\mathrm{e}^{\xi z}\}\mathrm{J}_k(\xi r)\mathrm{d}\xi \quad , \tag{2f}$$

式中，

$$I_{k+1}=\int_0^\infty \{[\tilde{A}-(1-\xi z)\tilde{B}-2\tilde{E}]\mathrm{e}^{-\xi z}-[\tilde{C}+(1+\xi z)\tilde{D}+2\tilde{F}]\mathrm{e}^{\xi z}\}\mathrm{J}_{k+1}(\xi r)\mathrm{d}\xi \quad , \tag{3a}$$

$$I_{k-1}=\int_0^\infty \{[\tilde{A}-(1-\xi z)\tilde{B}+2\tilde{E}]\mathrm{e}^{-\xi z}-[\tilde{C}+(1+\xi z)\tilde{D}-2\tilde{F}]\mathrm{e}^{\xi z}\}\mathrm{J}_{k-1}(\xi r)\mathrm{d}\xi \quad , \tag{3b}$$

$$L_{k+1}=\int_0^\infty \xi\{[\tilde{A}-(2\nu-\xi z)\tilde{B}-\tilde{E}]\mathrm{e}^{-\xi z}+[\tilde{C}+(2\nu+\xi z)\tilde{D}+\tilde{F}]\mathrm{e}^{\xi z}\}\mathrm{J}_{k+1}(\xi r)\mathrm{d}\xi \quad , \tag{3c}$$

$$L_{k-1}=\int_0^\infty \xi\{[\tilde{A}-(2\nu-\xi z)\tilde{B}+\tilde{E}]\mathrm{e}^{-\xi z}+[\tilde{C}+(2\nu+\xi z)\tilde{D}-\tilde{F}]\mathrm{e}^{\xi z}\}\mathrm{J}_{k-1}(\xi r)\mathrm{d}\xi \quad , \tag{3d}$$

且 $\mathrm{J}_k(\xi r)$ 表示 k 阶 Bessel 函数，E 为弹性模量，ν 为泊松比。

为分析方便，令

$$\left.\begin{aligned}V_{k+1}&=u_{rk}+u_{\theta k}\ ,\\ V_{k-1}&=u_{rk}-u_{\theta k}\ ,\\ T_{k+1}&=\tau_{zrk}+\tau_{z\theta k}\ ,\\ T_{k-1}&=\tau_{zrk}-\tau_{z\theta k}\ 。\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

记 V_{k+1}，T_{k+1} 的 k+1 阶，V_{k-1}，T_{k-1} 的 k−1 阶，u_{zk}，σ_{zk} 的 k 阶 Hankel 变换后的量分别为 $\bar{V}_{k+1}$，$\bar{T}_{k+1}$，$\bar{V}_{k-1}$，$\bar{T}_{k-1}$，$\bar{u}_{zk}$ 和 $\bar{\sigma}_{zk}$，其中 k 阶 Hankel 变换及逆变换[7]的定义为

$$\left.\begin{aligned}\bar{f}(\xi,z)&=\int_0^\infty f(r,z)r\mathrm{J}_k(\xi r)\mathrm{d}r,\\ f(r,z)&=\int_0^\infty \bar{f}(\xi,z)\xi\mathrm{J}_k(\xi r)\mathrm{d}\xi 。\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

为获得较为简洁的对称刚度矩阵，对上述 Hankel 变换域内的变量作如下进一步的定义：

$$\left.\begin{aligned}\bar{U}_1&=\frac{1}{2}(\bar{V}_{k+1}-\bar{V}_{k-1})\ ,\\ \bar{U}_2&=\frac{1}{2}(\bar{V}_{k+1}+\bar{V}_{k-1})\ ,\\ \bar{\varGamma}_1&=\frac{1}{2}(\bar{T}_{k+1}-\bar{T}_{k-1})\ ,\\ \bar{\varGamma}_2&=\frac{1}{2}(\bar{T}_{k+1}+\bar{T}_{k-1})\ 。\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

根据深度 z 处和深度 0 处 $\bar{U}_1$，$\bar{U}_2$，$\bar{u}_{zk}$，$\bar{\varGamma}_1$，$\bar{\varGamma}_2$ 和 $\bar{\sigma}_{zk}$ 这 6 个状态量在 Hankel 变换域内的表达式(均为 $\tilde{A}\sim\tilde{F}$ 的函数)，经过推导可得如下矩阵公式

$$\begin{bmatrix}-\bar{\varGamma}(\xi,0)\\ \bar{\varGamma}(\xi,z)\end{bmatrix}=\varPhi(\xi,z)\begin{bmatrix}\bar{U}(\xi,0)\\ \bar{U}(\xi,z)\end{bmatrix}, \tag{7}$$

式中，$\bar{\varGamma}(\xi,z)=[\bar{\varGamma}_1(\xi,z),\bar{\varGamma}_2(\xi,z),\bar{\sigma}_{zk}(\xi,z)]^{\mathrm{T}}$，$\bar{U}(\xi,z)=[\bar{U}_1(\xi,z),\bar{U}_2(\xi,z),\bar{u}_{zk}(\xi,z)]^{\mathrm{T}}$，$\varPhi(\xi,z)$ 为 6×6 的对称刚度矩阵，它建立了在 Hankel 变换域内任一土层单元上表面与下表面应力量与位移量间的关系（见图 1），并具有解析解的性质，故文中将其称为解析层元。

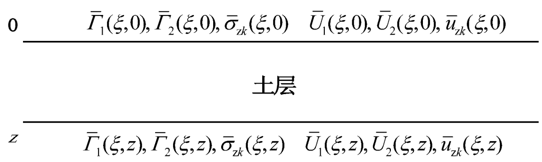


图 1　单一土层广义应力量与位移量

Fig. 1 Generalized stresses and displacements for a single soil layer

解析层元 $\varPhi(\xi,z)$ 的具体元素：

$\varPhi_{11}=\varPhi_{44}=2E\xi(\nu-1)((3-4\nu)(a_3-1)+4a_2 z\xi)/T$，

$\varPhi_{13}=\varPhi_{31}=-\varPhi_{46}=-\varPhi_{64}=-\xi E((1+a_3)(-3+10\nu-8\nu^2)+2a_2(3-10\nu+8\nu^2+2\xi^2z^2))/T$，

$\varPhi_{14}=\varPhi_{41}=-4\xi a_1 E(\nu-1)((3-4\nu+\xi z)a_2+(-3+4\nu+\xi z))/T$，

$\varPhi_{16}=\varPhi_{61}=-\varPhi_{34}=-\varPhi_{43}=4\xi^2 a_1(1-a_2)E(\nu-1)z/T$，

$\varPhi_{22}=\varPhi_{55}=\xi(1+a_2)E/(2(1-a_2)(1+\nu))$，

$\varPhi_{25}=\varPhi_{52}=-\xi a_1 E/((1-a_2)(1+\nu))$，

$\varPhi_{33}=\varPhi_{66}=-2\xi E(\nu-1)((3-4\nu)(1-a_3)+4\xi a_2 z)/T$，

$\varPhi_{36}=\varPhi_{63}=4\xi a_1 E(\nu-1)((-3+4\nu+\xi z)a_2+3-4\nu+z\xi)/T$，

$\varPhi_{12}=\varPhi_{21}=\varPhi_{15}=\varPhi_{51}=\varPhi_{23}=\varPhi_{32}=\varPhi_{24}=\varPhi_{42}=\varPhi_{26}=\varPhi_{62}=\varPhi_{35}=\varPhi_{53}=\varPhi_{45}=\varPhi_{54}=\varPhi_{56}=\varPhi_{65}=0$，

其中，$a_1=\mathrm{e}^{-z\xi}$，$a_2=\mathrm{e}^{-2z\xi}$，$a_3=\mathrm{e}^{-4z\xi}$，$T=(1+\nu)$

$((3-4v)^2(1+a_3)-2a_2(9-24v+16v^2+2z^2\xi^2))$。

2 层状地基作用非轴对称荷载的解

图 2 为层状地基表面作用非轴对称荷载的示意图，各土层参数如图 2 所示，其中第 i 层土的厚度为 $\Delta H_i=H_i-H_{i-1}$，H_i 为第 i 层土层底至地表面的距离。

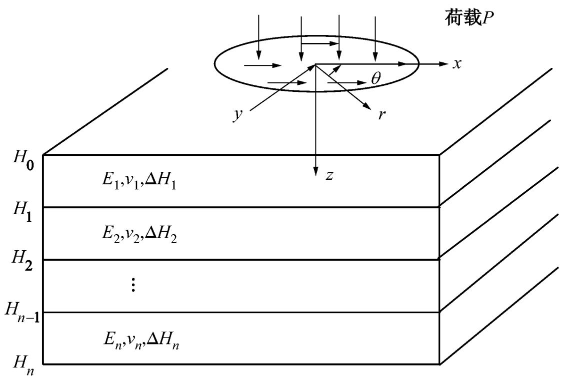


图 2 层状地基中作用非轴对称荷载示意图

Fig. 2 Multi-layered soils under non-axisymmetric loading

定义第 i 层土的解析层元为 $\varPhi^{(i)}(\xi,\Delta H_i)$，假设各土层间完全接触，根据层间连续条件，并结合式（7），进行矩阵叠加，可得

$$\begin{bmatrix}-\bar{\varGamma}(\xi,H_0)\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \bar{\varGamma}(\xi,H_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varPhi^{(1)} & & & & \mathbf{0}\\ & \varPhi^{(2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \varPhi^{(n-1)} & \\ \mathbf{0} & & & & \varPhi^{(n)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{U}(\xi,H_0)\\ \bar{U}(\xi,H_1)\\ \vdots\\ \bar{U}(\xi,H_i)\\ \vdots\\ \bar{U}(\xi,H_{n-1})\\ \bar{U}(\xi,H_n)\end{bmatrix} \tag{8}$$

式中，经叠加后所得的 $[-\bar{\varGamma}(\xi,H_0),0,\cdots,0,\bar{\varGamma}(\xi,H_n)]^{\mathrm{T}}$ 即为各计算点处外荷载变量经 Hankel 变换后的量；将相邻解析层元 $\varPhi^{(1)}$，$\varPhi^{(2)}$，$\cdots$，$\varPhi^{(n)}$ 两两叠加得一 $(3n+3)\times(3n+3)$ 阶对称矩阵 K，即为多层地基作用非轴对称荷载时的总刚度矩阵；$[\bar{U}(\xi,H_0),\bar{U}(\xi,H_1),\cdots,\bar{U}(\xi,H_n)]^{\mathrm{T}}$ 为各计算点处的位移变量经 Hankel 变换后的量。

对于底部边界，可假定为固定边界条件，即

$$\bar{U}(\xi,H_n)=0 \quad 。 \tag{9}$$

结合式（9）求解式（8），从而求出在 Hankel 变换域内任意深度处的广义位移量。将其代入式（7），就可进一步求得任意深度处的广义应力量：

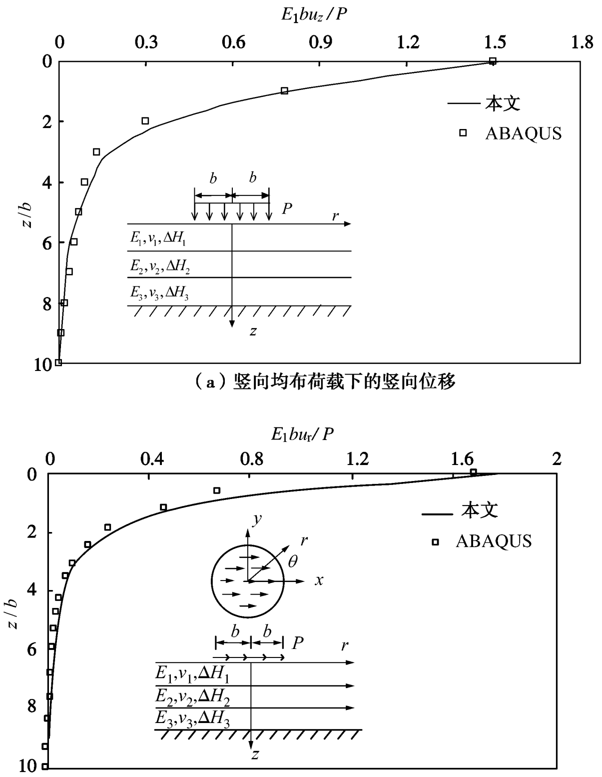
$$\bar{\varGamma}(\xi,H_{i-1})=-\begin{bmatrix}\varPhi_{11} & \varPhi_{12} & \varPhi_{13} & \varPhi_{14} & \varPhi_{15} & \varPhi_{16}\\ \varPhi_{21} & \varPhi_{22} & \varPhi_{23} & \varPhi_{24} & \varPhi_{25} & \varPhi_{26}\\ \varPhi_{31} & \varPhi_{32} & \varPhi_{33} & \varPhi_{34} & \varPhi_{35} & \varPhi_{36}\end{bmatrix}^{(i)}\cdot\begin{bmatrix}\bar{U}(\xi,H_{i-1})\\ \bar{U}(\xi,H_i)\end{bmatrix} 。\tag{10}$$

结合式（4）、（6）中的定义，对广义状态量进行转换及相应阶数的 Hankel 逆变换，就可求得真实问题的解 $[u_{rk},u_{\theta k},u_{zk},\sigma_{rzk},\sigma_{\theta zk},\sigma_{zk}]^{\mathrm{T}}$，之后再将其带入式（1），层状弹性体系作用非轴对称荷载的问题就可迎刃而解。

3 数值计算及分析

在前面理论推导出的 Hankel 变换域内层状地基中作用非轴对称荷载解的基础上，对其进行 Hankel 逆变换，就可求得该问题物理域内的真实解。Hankel 逆变换的数值计算可参见 Ai 等[5]的工作。依据以上理论编制了相应的程序，并设计了一些数值算例，以分析层状地基作用竖向荷载与水平荷载时的力学问题。这里选取模型为三层弹性地基，土层参数满足：$E_1:E_2:E_3=1:2:4$，$\Delta H_1:\Delta H_2:\Delta H_3:b=3:3:4:1$，$v=0.2$，其中 b 为圆形均布荷载的作用半径。

显然，当 k=0，1 时，$[u_{rk},u_{\theta k},u_{zk},\sigma_{rzk},\sigma_{\theta zk},\sigma_{zk}]^{\mathrm{T}}$ 的解可分别适用于层状地基作用竖向圆形均布荷载与水平圆形均布荷载的情况。



（a）竖向均布荷载下的竖向位移

（b）水平均布荷载下的水平位移

图 3 多层地基沿深度方向各点的竖向及水平位移

Fig. 3 Vertical and horizontal displacements of multi-layered soils along depth

首先，为了验证本文方法的正确性，在这里分析

了层状地基表面作用圆形竖向均布荷载与圆形水平均布荷载的问题，并将本文的计算结果（计算点取在 $r=b/2$，$\theta=0^\circ$ 的沿深度纵轴上）与有限元软件 ABAQUS 的结果进行了对比，如图 3 所示。算例中，为避免参数取值对计算结果的影响，对应力和位移做了无量纲化处理，其中 P 为均布荷载大小。从图 3 可见，本文的计算结果与 ABAQUS 有限元软件的结果是比较吻合的，从而验证了解析层元法的正确性。同时，曲线变化规律反映出荷载对土体的影响主要体现在约 3 倍荷载半径的浅层范围。

下面再通过解析层元法进一步分析非轴对称荷载作用下多层地基沿径向（$z=0,\theta,=0^\circ$ $r=1\sim5b$）的水平位移规律，计算时的土层参数及不同荷载形式下的计算结果如图 4 所示。比较等值的水平荷载 p_{h} 与竖向荷载 p_{v} 作用下的地基水平位移情况可见，水平荷载作用产生的水平位移要比竖向荷载的情况大得多；另外，由两者合力形成的非轴对称荷载产生的水平位移也主要表现为受其中水平分力的影响。因此，在水平荷载较大的层状体系的力学分析中，必须对其加以特别考虑：如路面设计中，因车辆加速行驶和刹车形成的水平力往往是路面损坏的重要因素[8]。

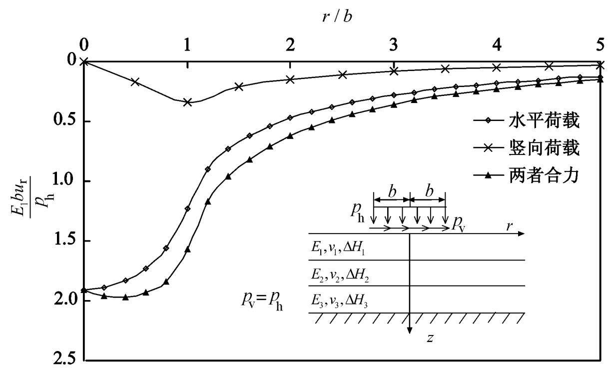


图 4　多层地基作用非轴对称荷载时沿径向的水平表面位移

Fig. 4 Surface horizontal displacement of multi-layered soils along radial direction under non-axisymmetric loading

4　结　　论

本文从弹性层状地基作用非轴对称荷载问题的解析解出发，推导出 Hankel 积分变换域内单层地基的精确刚度矩阵，即解析层元；根据层间连续条件组装各解析层元，得到总刚度矩阵；结合边界条件，求解总刚度矩阵形成的方程组，得到层状地基作用非轴对称荷载问题在 Hankel 积分变换域内的解答；最后应用 Hankel 逆变换技术，得到该问题物理域内的解。编制了相应的计算程序，分析了非轴对称荷载作用下多层地基沿深度和径向（$z=0$，$\theta=0^\circ$）的水平位移性状，计算结果表明：

（1）本文的计算结果与 ABAQUS 有限元软件的结果比较吻合，从而验证了解析层元法求解层状地基作用非轴对称荷载问题的正确性。

（2）等值的水平荷载作用产生的水平位移要比竖向荷载的情况大得多，而且由两者合力形成的非轴对称荷载产生的水平位移也主要表现为受其中水平分力的影响，因此，在水平荷载较大的层状体系的力学分析中，必须对其加以考虑。

本文提出的解析层元法的解答具有精确解析解的性质，且计算高效、稳定；在计算多层体系的力学问题中，具有其独到之处；结合具体的工程特性，可用于路面结构设计或水平荷载不可忽视的相关地基基础问题的分析。

参考文献：

[1] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR K L. The finite element method[M]. 4th ed. New York: McGraw-Hill Inc, 1989.

[2] CHEUNG Y K. Finite strip method in structural mechanics[M]. New York: Pergamon Press, 1976.

[3] 张问清，赵锡宏，宰金珉. 任意力系作用下的层状弹性半空间的有限层分析方法[J]. 岩土工程学报，1982, **3**(2): 27－42. (ZHANG Wen-qing, ZHAO Xi-hong, ZAI Jin-min. Finite layer analysis for layered and elastic half-space under arbitrary force system[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1982, **3**(2): 27－42. (in Chinese))

[4] 钟　阳，王哲人，郭大智. 求解多层弹性半空间轴对称问题的传递矩阵法[J].土木工程学报，1992, **25**(6): 38－43. (ZHONG Yang, WANG Zhe-ren, GUO Da-zhi. The transfer matrix method for solving axisymetrical problems in muti-layered elastic half space[J]. China Civil Engineering Journal, 1992, **25**(6): 38－43. (in Chinese))

[5] AI Z Y, YUE Z Q, THAM L G, et al. Extended sneddon and muki solutions for multilayered elastic materials[J]. International Journal of Engineering Science, 2002, **40**(13): 1453－1483.

[6] MUKI T. Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semi-infinite solid and a thick plate[M]// Progress in Solid Mechanics. North-Holland, Amsterdam, 1960: 399－439.

[7] SNEDDON I N. The use of integral transform[M]. New York: McGraw-Hill, 1972.

[8] 朱照宏，王秉纲，郭大智. 路面力学计算[M]. 北京：人民交通出版社，1985. (ZHU Zhao-hong, WANG Bing-gang, GUO Da-zhi. The calculation of pavement[M]. Beijing: China Communications Press, 1985. (in Chinese))