

# 土的三维渐近状态准则

罗汀, 田新国, 姚仰平, 崔文杰

(北京航空航天大学交通科学与工程学院, 北京 100191)

**摘要:**天然地基中土是在某种约束下而受力变形的, 试验结果表明, 土在等应变增量比的路径约束下, 无论应力路径的起点如何最终都会逼近于应力比为一常数的稳定状态, 称为渐近状态。简要分析了渐近状态下土的剪胀规律, 应变增量比作为反映剪胀性的一个参数, 可以用来描述渐近状态应力比, 结合广义非线性强度准则, 把土渐近状态应力比的计算推广到三维, 提出了土的三维渐近状态准则, 并详细分析了该准则中各参数对渐近状态应力比的影响程度, 最后通过试验验证了准则的有效性。

**关键词:**土; 应变增量比; 渐近状态应力比; 三维; 准则

**中图分类号:** TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2011)05-0792-05

**作者简介:** 罗汀(1957-), 女, 福建长汀人, 博士, 教授, 主要从事土的基本特性和本构模型研究。E-mail: [tluo@buaa.edu.cn](mailto:tluo@buaa.edu.cn)。

## Three-dimensional asymptotic state criterion for soils

LUO Ting, TIAN Xin-guo, YAO Yang-ping, CUI Wen-jie

(School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** The deformation is suffered by shearing when the natural soils are in some strain constraints. The experimental results show that a constant strain increment ratio path in soils will lead to a constant stress ratio for any initial stress state. These states are called the asymptotic ones. The shearing deformation mechanism of the soils in the asymptotic state is analyzed. The stress ratio in the asymptotic state is affected by a volumetric strain increment ratio which controls the dilatancy of the soils. The equation, used to calculate the stress ratio in the asymptotic state, is developed to three-dimensional stress state based on the generalized nonlinear strength criterion. This equation is called the three-dimensional asymptotic state criterion. The comparison between the test results and criterion calculation is analyzed.

**Key words:** soil; strain increment ratio; asymptotic state stress ratio; three-dimension; criterion

## 0 引言

强度通常指材料破坏时的应力状态, 在简单应力条件下, 可采用试验方法确定材料强度, 例如, 莫尔-库仑强度理论中土的内摩擦角可由三轴压缩试验确定。而复杂应力条件下, 试验仪器的制造和使用都不容易, 且复杂应力状态有无数组合, 单靠试验解决问题很困难。可行的途径是基于简单应力条件下的试验结果, 结合理论假设来建立复杂应力状态下的破坏条件, 即破坏时的应力状态表达式。

Gudehus等<sup>[1]</sup>最早提出了渐近状态的概念, 即土在不同的变形约束条件下对应着不同的应力应变规律, 当沿着某应变路径加载时, 不管试样初始应力状态如何, 最终都趋于应力比为一常数的状态, 称为渐近状态。Chu和Lo等<sup>[2-3]</sup>也对应变增量比为常数的路径进行了一系列的试验和研究, 他们的研究表明, 极限

应力比随应变增量比的变化而变化, 不同的应变增量比对应不同的极限应力比, 即极限应力比的大小取决于加载过程中应变增量比的大小。张建民等<sup>[4]</sup>也对应变路径试验结果及其物理机制进行了深入地分析和研究。

渐近状态线是极限应力比与应变增量比的关系曲线, 渐近状态线上对应的极限应力比有的达到破坏状态, 例如排水条件下三轴压缩试验; 有的没有破坏, 例如等向固结试验, 此时不论应力加到多大, 土都不会破坏, 但终值应力比为常数。因此, 渐近状态线描述的应力状态比破坏范围更广, 破坏只是渐近状态中的一种特殊形式。

本文在渐近状态概念的基础上, 建立了土的三维渐近状态准则, 其中也包括复杂应力状态下破坏时土的应力状态, 该表达式中简单应力条件下的试验是不

基金项目: 国家自然科学基金项目(50879001, 10872016, 90815024)

收稿日期: 2009-12-23

排水三轴压缩试验、不排水三轴伸长试验。

### 1 土的渐近状态及其描述

一般来讲地基中的土是在某种约束下受力变形的, 如  $K_0$  固结、不排水剪切试验等。这种变形约束通常可用体积应变增量与轴向应变增量之比为某一常数来描述, 即应变路径  $n = de_v / de_1$  为常数。不同的  $n$  值代表了不同的体变约束条件, 也即不同的排水条件,  $n = 0$  对应完全不排水情况,  $n > 0$  对应部分排水情况,  $n < 0$  对应部分吸水情况, 通过研究这种应变路径加载下土的极限应力比规律具有现实的工程意义。

图 1 给出了 3 组 Sydney 砂在不同应变增量比加载下的试验结果<sup>[3]</sup>, 应变增量比  $n$  分别为 -0.11, -0.43, -0.67, 横坐标为轴向应变, 纵坐标为应力比, 从试验结果可以看出, 最终应力比都趋于常数, 对于不同的应变增量比, 其对应的极限应力比(渐近状态应力比)也不同, 应变增量比的负值越大, 渐近状态应力比越大, 渐近状态应力比与应变约束路径  $n = de_v / de_1$  有直接关系。

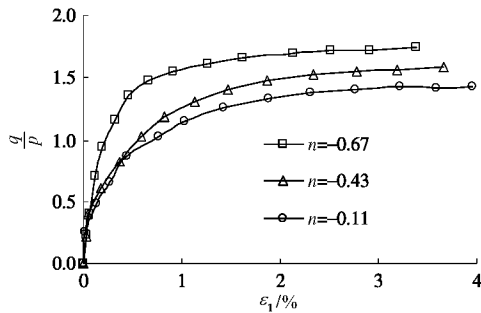


图 1 3 组 Sydney 砂在不同应变增量比加载下的试验结果  
Fig. 1 Stress-strain relations of Sydney sand under different strain increment ratios

Chu 和 Lo 给出了下面的公式来描述这种关系<sup>[2]</sup>:

$$n = \frac{de_v}{de_1} = \frac{3(M_0 - h)}{M_0} \quad (1)$$

式 (1) 中  $M_0$  是不排水剪的极限应力比, 把每一个路径下的试验结果绘制在横坐标为负的应变增量比, 纵坐标为应力比的图上<sup>[5]</sup>, 如图 2 所示, 图中点  $\Delta$  表示试验点, 点  $\circ$  表示特征点, 直线为式 (1) 描述的渐近状态线。式 (1) 也可以改写为

$$h = q/p = M_0 [1 - (n/3)] \quad (2)$$

式 (2) 中的应力比  $h$  是渐近状态应力比, 表示了  $M_0$  为一定值时, 土所对应的渐近状态面, 由图可知, 对于  $n = 3$  的等向固结情况,  $q = 0$ ; 对于  $n = 0$  的不排水情况, 应力比  $q/p = M_0$ , 由图 3 可以直观地看出渐近状态面上  $p, q, n$  三者的关系。

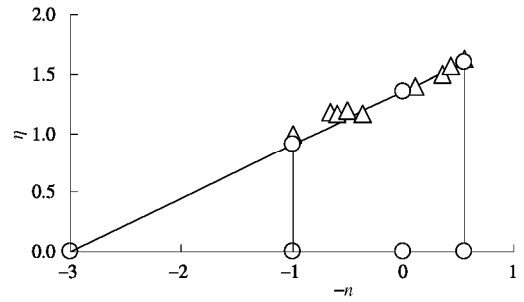


图 2 应变增量比与渐近状态应力比关系  
Fig. 2 Relation between asymptotic stress ratio and strain increment ratio

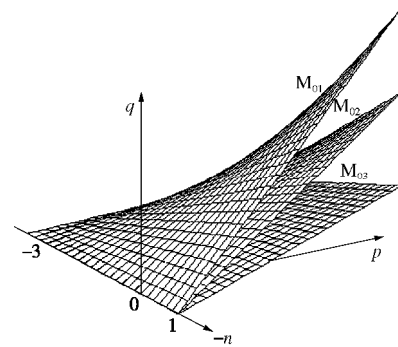


图 3 p-q-n 曲面  
Fig. 3 p-q-n surfaces

设体积应变增量和剪应变增量为  $de_v / de_d = m$ , 可以把上述表示的加载路径  $n = de_v / de_1$  转化为  $m = de_v / de_d$ , 这种应变增量比的表示形式更具有一般性, 由常规三轴压缩条件可得:

$$\left. \begin{aligned} de_d &= 2/3(de_1 - de_3) \\ de_v &= de_1 + 2de_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由式 (3) 得:

$$de_1 = de_d + de_v / 3 \quad (4)$$

把式 (4) 代入到式 (1) 得:

$$m = de_v / de_d = 3n / (3 - n) \quad (5)$$

式 (5) 表示了两种应变增量比之间的关系,  $m$  和  $n$  具有一一对应的关系。对于  $de_v = 0$  的不排水情况,  $m = n = 0$ ; 对于  $n = 1$  的  $K_0$  固结情况,  $m = 1.5$ ; 在等向固结  $n = 3$  时,  $m \rightarrow \infty$ 。

根据式 (1), (5) 得

$$m = de_v / de_d = 3(M_0 - h) / h \quad (6)$$

式 (6) 是用  $de_v / de_d$  表示的渐近状态线, 由式 (6) 可以得出

$$h = 3M_0 / (3 + m) \quad (7)$$

式 (7) 表示了渐近状态应力比  $h$  与应变增量比  $m$  的关系。在式 (7) 中的  $M_0$  与密度相关,  $m$  为反映剪胀程度的条件, 也即变形约束条件。式 (6) 与式 (1) 的比较见图 4, 图中直观地表示了应变增量比  $m$  同  $n$  的对应关系。

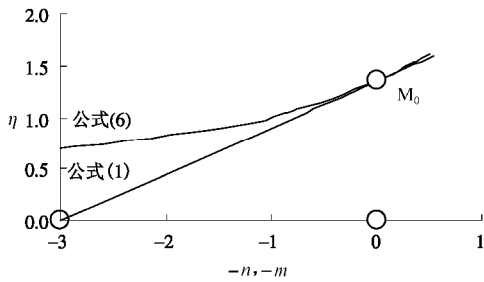


图4 公式(6)与公式(1)的比较

Fig. 4 Comparison between Eq. (6) and Eq. (1)

## 2 变形机理及渐近状态面

### 2.1 应变增量比与渐近状态应力比的对应关系

渐近状态是一个包含临界状态和破坏状态等的更广泛的概念，不同的渐近状态应力比是由不同的应变约束条件产生的。如  $m \rightarrow \infty$  时为等向压缩状态，若不考虑各向异性的影响，等向压缩状态没有剪应力产生，渐近状态应力比为零； $m > 0$  时，土的剪切体缩占主导地位，渐近状态应力比较小； $m < 0$  时土剪切体胀占主导地位，对应的渐近状态应力比值比较大；当应变增量比达到土的剪切破坏对应的值时，强度得到完全发挥，渐近状态应力比为最大。所以，不同应变增量比对土的变形和强度发挥有不同的约束控制效应。

### 2.2 主应力空间中的渐近状态面

若设渐近状态应力比与应力洛德角无关，则应力比为某一常数的渐近状态线在主应力空间中对应的是一圆锥曲面，即渐近状态面。不同的应变增量比  $m$  对应不同开口大小的渐近状态面如图 5 所示， $m \rightarrow \infty$  的等向压缩，在主应力空间中为三轴压缩子午线。由图 5 可见，应变增量比  $m$  的负值越大，即土的剪胀性越明显，圆锥的开口也越大，渐近状态应力比越大。

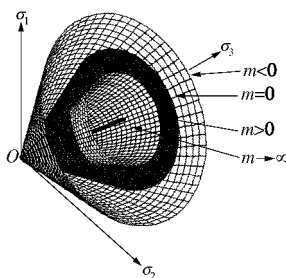


图5 主应力空间中的渐近状态面

Fig. 5 Asymptotic state surfaces in principal stress space

## 3 土的三维渐近状态准则

### 3.1 广义非线性强度准则

姚仰平等<sup>[6]</sup>根据 SMP 准则和广义 Mises 准则提出了广义非线性强度准则，广义剪应力  $q_\alpha$  的表达式为

$$q_\alpha = a q_M + (1 - a) q_S \quad (8)$$

式中  $a$  为反映  $\pi$  平面上的拉压强度比的强度参数，是一个土性参数； $q_M$  为广义米赛斯准则对应的广义剪应力， $q_S$  为 SMP 准则对应的广义剪应力，表达式为

$$\left. \begin{aligned} q_M &= \sqrt{I_1^2 - 3I_2} \quad , \\ q_S &= 2I_1 / \left[ 3\sqrt{(I_1 I_2 - I_3) / (I_1 I_2 - 9I_3)} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中  $I_1, I_2, I_3$  分别为第一、第二和第三应力不变量。

### 3.2 土的三维渐近状态准则

各种土的强度准则只是涉及土的最终剪切破坏状态，而土的渐近状态涵盖了从单纯的等向压缩作用到极限剪切破坏之间所有状态。由式 (7) 可知，不考虑应力洛德角影响的渐近状态应力比为

$$h = q / p = 3M_0 / (3 + m) \quad (10)$$

式 (10) 中的  $q$  与应力洛德角无关，在主应力空间中绘出的渐近状态应力比包括破坏面如图 5 所示，由图 5 定义的圆锥破坏包络面中三轴压缩与伸长强度相等。实际土的三轴压缩强度与三轴伸长强度明显不同，土的破坏面与洛德角相关，用广义非线性强度准则中定义的  $\pi$  平面上的剪应力  $q_\alpha$  来代替式 (10) 中的  $q$ ，可以得出

$$q_\alpha / p = 3M_0 / (3 + m) \quad (11)$$

把式 (8) 代入式 (11)，用应力不变量  $I_1, I_2, I_3$  表示为

$$\alpha \sqrt{I_1^2 - 3I_2} + 2(1 - \alpha) I_1 / \left[ 3\sqrt{(I_1 I_2 - I_3) / (I_1 I_2 - 9I_3)} - 1 \right] = p [3M_0 / (3 + m)] \quad (12)$$

式 (12) 即为土的三维渐近状态准则。根据应力不变量之间的关系：

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= (I_1^2 - 3I_2) / 3 \quad , \\ J_3 &= (2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27I_3) / 27 \quad , \\ \cos 3q &= \frac{3\sqrt{3} J_3}{2 J_2^{3/2}} \quad , \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

可以推导出用  $p, q, q$  表示土的三维渐近状态准则为

$$ah + 6(1 - \alpha)h / \left( \sqrt{\frac{108 - 9h^2 - \cos 3qh^3}{3 - \cos 3qh}} - h \right) = 3M_0 / (3 + m) \quad (14)$$

式 (14) 中的  $q$  称为应力洛德角，三轴压缩情况  $q = 0$ ，三轴伸长情况  $q = \pi/3, 0 \leq q \leq \pi/3$ 。式 (12) 或 (14) 即为土的三维渐近状态准则，该准则中土的基本参数有 2 个：不排水剪极限应力比  $M_0$  和土性参数  $a, m$  为应变约束条件。由式 (14) 可知，该准则可以反映包括三轴压缩、三轴伸长在内的不同应力洛德角时的渐近状态应力比。

(1) 应变约束条件  $m$  对渐近状态应力比的影响

土的三维渐近状态准则可以反映不同应变增量比  $m$  约束条件下的渐近状态应力比，对于不排水剪切条

件  $m=0$ , 对于剪缩情况  $m>0$ , 对于剪胀情况  $m<0$ , 当土性参数  $a=0$  时, 在主应力空间根据式 (14) 绘制的土的渐近状态面见图 6,  $m$  的取值负值越大, 土的渐近状态应力比越大。

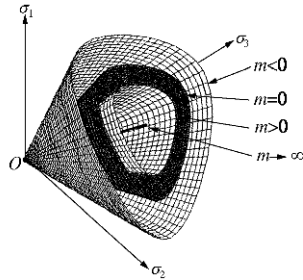


图 6 土的三维渐近状态面

Fig. 6 Three-dimensional asymptotic state surfaces of soils

(2) 土性参数  $a$  对渐近状态应力比的影响

$\pi$  平面上不同的  $a$  值对应的渐近状态线介于 Mises 准则与 SMP 准则之间, 如图 7 所示。

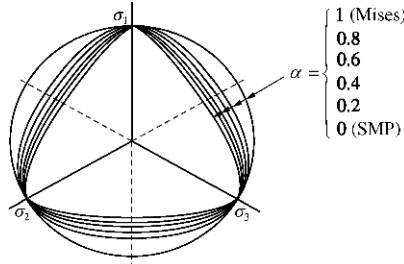


图 7 不同  $\alpha$  值对应的渐近曲线

Fig. 7 Asymptotic state curves with different  $\alpha$

根据式 (14), 推导出土性参数  $a$  可以用不排水条件下三轴压缩内摩擦角  $f_c$  和三轴伸长内摩擦角  $f_e$  表示为

$$a = \frac{3(3 + \sin f_e)(\sin f_e - \sin f_c)}{2\sin^2 f_e (3 - \sin f_c)} \quad (15)$$

土的三维渐近状态准则不仅考虑土性参数  $a$  的不同, 而且考虑了应变路径  $m$  的影响, 其渐近状态线介于 Mises 曲线与 SMP 曲线之间。当参数  $M_0$  为某一定值, 参数  $m$  与  $a$  变化时, 在同一  $p$  平面上绘制的曲线如图 8 所示, 图中分别绘制了  $m<0$ 、 $m=0$  和  $m>0$  的三种情况, 而在相同  $m$  值的情况下, 土性参数  $a$  不同, 渐近状态应力比  $h$  也不同, 图 8 中, 在  $m$  值相同时分别绘制了  $a=0, 0.5, 1$  时的情况。

(3) 应力洛德角  $q$  对渐近状态应力比的影响

土的三维渐近状态准则也表示出了应力洛德角与渐近状态应力比的关系, 分别取  $q=0, \pi/6$  和  $\pi/3$  三种情况, 把三轴压缩条件  $q=0$ , 代入式 (14) 得

$$ah + 6(1 - \alpha)h / \left( \sqrt{\frac{108 - 9h^2 - h^3}{3 - h}} - h \right) = 3M_0 / (3 + m) \quad (16)$$

整理可得

$$h = 3M_0 / (3 + m) \quad (17)$$

把  $q = \pi/6$  的条件代入式 (14), 得:

$$ah + 6(1 - \alpha)h / (\sqrt{36 - 3h^2} - h) = 3M_0 / (3 + m) \quad (18)$$

把  $q = \pi/3$  的三轴伸长条件代入式 (14), 得

$$ah + 6(1 - \alpha)h / \left( \sqrt{\frac{108 - 9h^2 + h^3}{3 + h}} - h \right) = 3M_0 / (3 + m),$$

整理可得

$$ah + (1 - \alpha)3h / (3 - h) = 3M_0 / (3 + m) \quad (19)$$

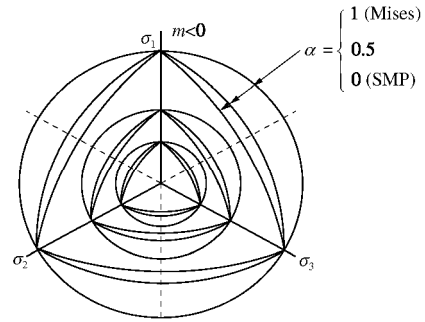


图 8 在  $\pi$  平面上不同  $m$  和  $a$  对应的渐近状态线

Fig. 8 Asymptotic state curves with different  $m$  and  $a$  in  $\pi$  plane

式 (17)、(18) 和 (19) 分别表示了 3 种特殊洛德角情况时渐近状态应力比  $h$  与应变约束  $m$  的关系。

取土的三维渐近状态准则中的参数  $M_0$  为某一定值, 土性参数  $a$ 、应力洛德角  $q$  和应变约束  $m$  都变化时, 根据式 (14), 则其对应的渐近状态应力比关系曲线如图 9 所示。图 9 中参数的取值为  $M_0=1.3$ ,  $m$  取值分别为 -0.6, 0, 1.2,  $a$  的取值分别为 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1。从图 9 中可以看出, 随着负的  $m$  值和  $q$  角的增大, 土性参数  $a$  的取值对渐近状态应力比的影响敏感度增大。

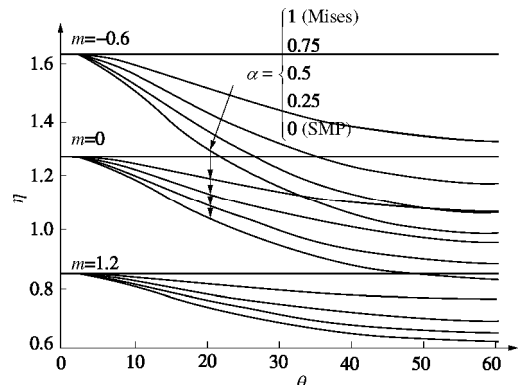


图 9 不同  $m, a$  和  $q$  对应的渐近状态应力比

Fig. 9 Asymptotic state stress ratios with different  $m, a$  and  $q$

### 4 三维渐近状态准则的试验验证

图 10 给出了饱和丰浦标准砂的真三轴排水试验、不排水试验的试验结果与准则预测比较。试验数据引

自文献[7~8], 试样平均粒径 0.2 mm, 比重 2.65, 最大最小孔隙比分别为 0.95 和 0.58。图中圆点●表示不排水试验的试验数据点, 试验中应力路径为  $s_m = \text{常数}$ , 在三轴压缩和三轴伸长条件下分别加荷至破坏。方形点■表示真三轴排水试验的试验数据点。图中虚线和实线都是根据式(14)的预测线, 其中虚线是  $a = 0$  的预测线, 实线的土性参数为  $a = 0.26$ 。

基本参数取值: ①不排水三轴压缩的极限应力比  $M_0$ : 根据不排水三轴压缩结果, 极限应力比  $s_1/s_3 = 3.82$ , 求得  $M_0 = 1.45$ ; ②土性参数  $a$ : 根据不排水三轴伸长的试验结果, 极限应力比  $s_1/s_3 = 4.4$ , 求得  $M_c = 1.04$ , 可; 求得  $\sin f_c = 0.63$ ; 根据不排水三轴压缩试验结果  $M_0 = 1.45$ , 可求得  $\sin f_c = 0.585$ 。再由式(15)求得  $a = 0.26$ 。由图 10 亦可知, 不排水的三轴伸长试验点位于 SMP 准则 ( $a = 0$ ) 之上, 所以求得的  $f_c > f_c$ ; ③应变增量比  $m$ : 由三轴压缩排水试验的结果可知破坏时的应变增量比为  $-de_{oct}/dg_{oct} = 0.097$ , 由应变增量比之间的关系  $de_v/de_d = 3\sqrt{2}de_{oct}/dg_{oct}$ , 求得  $m = -0.41$ 。

根据土性参数  $M_0$  和  $a$ , 由式(14)分别绘出不排水试验和排水试验 ( $m = -0.41$ ) 的渐近状态预测曲线, 由预测和试验结果对比可知, 由三轴不排水试验确定的  $M_0$  和  $a$  可以较好地描述排水试验破坏时, 即  $m = -0.41$  时真三轴试验的极限应力比。

本文在推导土的三维渐近状态准则时没有考虑黏结特性的影响, 所以对于有内聚力的黏性土可参照文献[9]的方法进行修正。

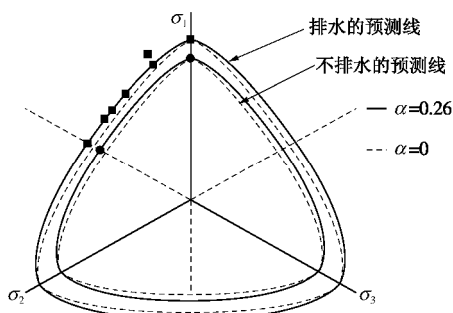


图 10 试验结果与三维渐近状态准则的比较

Fig. 10 Comparison between three-dimensional asymptotic state criterion and test results for sand

## 5 结 论

本文是在渐近状态概念的基础上, 基于广义非线性强度准则, 建立了三维条件下土的渐近状态准则。

(1)把应变增量比表示为体应变增量广义剪应变增量之比的形式, 可解释三维条件下应变增量比对渐

近状态发挥的控制约束效应。

(2)结合广义非线性强度准则, 提出的三维渐近状态准则中只包含两个土性参数 ( $M_0, a$ ) 和一个变形约束条件 ( $m$ )。两个土性参数可根据不排水三轴压缩和三轴拉伸试验结果求出。

(3)由预测和试验结果对比可知, 本文建立的渐近状态准则简单易用, 并且较好地反映了试验结果。

## 参考文献:

- [1] GUDEHUS G, GOLDSCHIEDER M, WINTER H. Mechanical properties of sand and clay and numerical integration methods: some sources of errors and bounds of accuracy[M]// Finite elements in Geomechanics, London; New York: wiley, 1977: 121 - 150.
- [2] CHU J, LO S-C R. Asymptotic behavior of a granular soil in strain path testing[J]. Géotechnique, 1994, 44: 65 - 82.
- [3] CHU J, LO S-C R, LEE I K. Response of a granular soil during strain path testing[C]// Proceedings of the Workshop on Modern Approaches to Plasticity, Horton, Greece, 1993: 599 - 640.
- [4] 张建民, 宋 飞. 砂土的压剪效应与渐近状态准则[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(2): 166 - 171. (ZHANG Jian-min, SONG Fei. Compression-dilatancy coupling effect and asymptotic state criterion of sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(2): 166 - 171. (in Chinese))
- [5] LUO T, YAO Y P, CHU J. Asymptotic state behaviour and its modeling for saturated sand[J]. Science in China (Ser. E), 2009, 52(8): 2350 - 2358.
- [6] YAO Y P, LU D C, ZHOU A N, et al. Generalized non-linear strength theory and transformed stress space[J]. Science in China(Ser E), 2004, 47(6): 691 - 709.
- [7] NAKAI T, MATSUOKA H. A unified law for soil deformation behavior under various stress paths[C]// Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 1981, 306: 23 - 34. (in Japanese)
- [8] NAKAI T, MATSUOKA H. A unified law for soil shear behavior under three dimensional stress condition[J]. Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 1980(303): 65 - 77. (in Japanese)
- [9] MATSUOKA H, SUN D A. Extension of Spatially Mobilized Plane to friction and cohesive materials and its application to cemented sand[J]. Soils and Foundations, 1995, 35(4): 63 - 72.