

基于中厚圆柱壳理论的地铁隧道结构振动特性分析

王鑫, 刘增荣

(西安建筑科技大学土木工程学院, 陕西 西安 710055)

摘要: 以土介质中的地铁隧道为研究背景, 首先利用考虑横向剪切变形的中厚圆柱壳理论建立了隧道结构的振动方程, 然后利用均匀、各向同性、线弹性介质的 Navier's 波动理论建立了隧道周围土体的运动方程, 在此基础上, 利用波传播方法, 通过接触面连续条件建立了考虑土层-隧道结构动力相互作用的隧道结构振动控制方程, 继而利用其频散特征方程, 对隧道结构的振动特性进行了分析, 并与基于薄壳理论、有限元理论的相应结果进行了对比, 验证了方程的有效性, 进而就隧道半径、壁厚、长度以及隧道埋深对隧道结构振动特性的影响进行了分析。

关键词: 隧道结构; 土与结构相互作用; 波传播方法; 振动特性

中图分类号: TU311.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2011)05-0762-07

作者简介: 王鑫(1982-), 男, 山东莱芜人, 博士研究生, 主要从事土与结构相互作用的理论与应用研究。E-mail: wangsanjin@yahoo.com.cn。

Vibration characteristics of metro tunnel structures based on theory of moderately thick cylindrical shells

WANG Xin, LIU Zeng-rong

(School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: Taking metro tunnels in soil as research background, at first, according to the theory of moderately thick cylindrical shells considering transverse shear deformation, a vibration equation for tunnel structures is established. Secondly, a motion equation for the soil around the tunnel is set up by use of the Navier's wave theory of homogeneous, isotropic, linear elastic media. Based on these, taking advantages of the wave propagation approach, a vibration control equation for tunnel structures considering soil-structure dynamic interaction is established through the continuous conditions of interface, and then, by making use of its dispersion characteristic equation, the vibration characteristics of the tunnel structures are analyzed, which validates the effectiveness of the equation gained above by comparing with the corresponding results obtained by using the thin shell theory and the finite element method. Furthermore, the influences of radius, wall-thickness, length and buried-depth of the tunnel on the vibration characteristics of the structure are also analyzed.

Key words: tunnel structure; soil-structure interaction; wave propagation approach; vibration characteristic

0 引言

随着现代工业的发展和城市规模的扩大, 地铁成为解决城市交通问题的重要手段, 对于地铁隧道结构的振动特性研究也就成为了一项重要的课题。地下结构工程动力分析的一个重要内容就是确定结构的自振特性, 而且地下结构动力计算的设计荷载也需要依据结构自振频率。目前, 圆柱壳结构已广泛应用于城市基础设施、石油运输、航空工业等领域, 对其进行的研究也主要是集中在基于薄壳理论(厚径比小于 1/20)特别是管道力学特性的分析^[1-5], 文献[4]在对地铁引起的地层振动分析中也采用薄壳理论建立隧道结构振动控制方程, 忽略了隧道结构的横向剪切变形, 认为隧道(壳)表面的位移与中面相等, 考虑到地铁隧道结构厚径比一般大于 1/12, 其方法显然是不合适的。本

文将隧道结构视为中厚圆柱壳, 利用考虑横向剪切变形的中厚壳理论建立其振动方程, 而将隧道周围土层简化为均匀、各向同性、线弹性介质, 利用 Navier's 波动理论建立其运动方程。在此基础上, 利用波传播方法, 通过接触面连续条件, 建立考虑隧道结构与周围地层耦合作用的隧道结构振动控制方程, 从而对土介质中的地铁隧道结构的振动特性进行了分析研究。

1 隧道结构振动方程

本文采用考虑横向剪切变形的中厚圆柱壳理论建立隧道结构的振动方程, 所采用的坐标系统以及几何

基金项目: 国家自然科学基金项目(59978038); 陕西省重点实验室基金项目(05JS19)

收稿日期: 2010-01-26

模型如图1所示, 得到的关于隧道中面5个位移分量的基本微分方程如式(1a)、(1b)、(1c)、(1d)、(1e)所示^[6-7]。

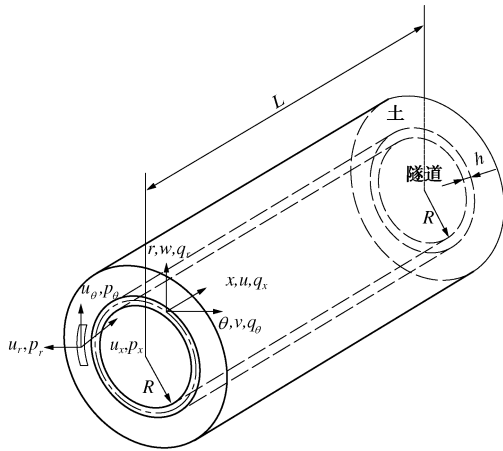


图1 隧道和土的几何模型

Fig. 1 Geometric model for tunnel and soil

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon^{(a)} \frac{h^2}{12R} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{1}{K} q_x = \frac{1}{K} \rho J_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1a)$$

$$\frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \varepsilon^{(a)} \frac{h^2}{12R} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{K} \frac{1}{R} \frac{Gh}{k_\tau} \left(\phi - \frac{v}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{K} q_\theta = \frac{1}{K} \rho J_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1b)$$

$$-\frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} w + \varepsilon^{(a)} \frac{h^2}{12R^3} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{K} \frac{Gh}{k_\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{K} \frac{Gh}{k_\tau} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\phi - \frac{v}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{K} q_r = \frac{1}{K} \rho J_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1c)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \theta} + \varepsilon^{(a)} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{D} \frac{Gh}{k_\tau} \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{m_x}{D} = \frac{1}{D} \rho J_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (1d)$$

$$\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \theta} + \varepsilon^{(a)} \frac{1}{R} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{D} \frac{Gh}{k_\tau} \left(\phi - \frac{v}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{m_\theta}{D} = \frac{1}{D} \rho J_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (1e)$$

式中 x, θ, r 为壳体的轴向、切向和径向坐标; E, G, ρ, ν 分别为隧道结构材料的杨氏模量、剪切模量、密度、泊松比; h 为隧道结构的厚度; R 为隧

道中面的半径, $K = Eh/(1-\nu^2)$; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$; $J_0 = h$; $J_2 = h^3/12$; u, v, w 分别表示隧道结构中面上一点轴向、切向和径向的位移; ϕ, φ 分别表示隧道中面一点在 $x-r, \theta-r$ 平面内的转角; $q_x, q_\theta, q_r, m_x, m_\theta$ 分别表示隧道结构中面在轴向、切向和径向、以及在 $x-r, \theta-r$ 平面内受到的外力; $\varepsilon^{(a)}$ 表示该项为附加项; k_τ 为剪切因子, 对于圆柱壳来说, $k_\tau = 6/5$ 。

对基于中厚圆柱壳理论的隧道结构中面的位移函数, 采用波传播方法^[1-2], 式(1)中的位移可表示为满足边界条件与轴向传播波波数 k 和周向模态数 n 有关的波传播形式的解:

$$\left. \begin{aligned} u &= U \cos(n\theta) \exp(i(\omega t - kx)), \\ v &= V \sin(n\theta) \exp(i(\omega t - kx)), \\ w &= W \cos(n\theta) \exp(i(\omega t - kx)), \\ \phi &= \Phi \cos(n\theta) \exp(i(\omega t - kx)), \\ \varphi &= \Psi \sin(n\theta) \exp(i(\omega t - kx)). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 U, V, W, Φ, Ψ 分别为隧道结构在 x, θ, r 方向以及在 $x-r, \theta-r$ 平面内的位移幅值; ω 为圆频率。将式(2)代入式(1), 并忽略附加项的影响, 可以得到隧道结构的振动方程, 以矩阵形式表示为

$$[g][l]\{\bar{U}\} + [\bar{K}]\{q\} = 0. \quad (3)$$

式中 $[l]$ 为 5×5 的系数矩阵, $[\bar{K}]$, $[g]$ 为 5×5 的对角线系数矩阵, $\{\bar{U}\} = \{U, V, W, \Phi, \Psi\}^T$, $\{q\} = \{q_x, q_\theta, q_r, m_x, m_\theta\}^T$, $[l]$, $[\bar{K}]$, $[g]$ 中各元素分别如式(4)、(5)所示:

$$\left. \begin{aligned} l_{11} &= -k^2 - \frac{1-\nu}{2R^2} n^2 + \frac{\rho J_0}{K} \omega^2, \quad l_{12} = -\frac{1+\nu}{2R} ikn = -l_{21}, \\ l_{13} &= -ik \frac{\nu}{R} = -l_{31}, \quad l_{14} = l_{15} = 0, \\ l_{22} &= -\frac{1-\nu}{2} k^2 - \frac{1}{R^2} n^2 - \frac{1}{KR^2} \frac{Gh}{k_\tau} + \frac{\rho J_0}{K} \omega^2, \\ l_{23} &= -\frac{1}{R^2} n - \frac{1}{KR^2} \frac{Gh}{k_\tau} n = l_{32}, \quad l_{24} = 0, \quad l_{25} = \frac{1}{KR} \frac{Gh}{k_\tau}, \\ l_{33} &= -\frac{1}{R^2} - \frac{1}{KR^2} \frac{Gh}{k_\tau} n^2 - \frac{1}{K} \frac{Gh}{k_\tau} k^2 + \frac{\rho J_0}{K} \omega^2, \\ l_{34} &= -\frac{1}{K} \frac{Gh}{k_\tau} ik, \quad l_{35} = \frac{1}{KR} \frac{Gh}{k_\tau} n, \quad l_{41} = l_{42} = 0, \\ l_{43} &= \frac{1}{D} \frac{Gh}{k_\tau} ik, \quad l_{44} = -k^2 - \frac{1-\nu}{2R^2} n^2 - \frac{1}{D} \frac{Gh}{k_\tau} + \frac{\rho J_2}{D} \omega^2, \\ l_{45} &= -\frac{1+\nu}{2R} ikn = -l_{54}, \quad l_{51} = 0, \quad l_{52} = \frac{1}{DR} \frac{Gh}{k_\tau}, \\ l_{53} &= \frac{1}{DR} \frac{Gh}{k_\tau} n, \quad l_{55} = -\frac{1-\nu}{2} k^2 - \frac{1}{R^2} n^2 - \frac{1}{D} \frac{Gh}{k_\tau} + \frac{\rho J_2}{D} \omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{11} = \bar{K}_{22} = \bar{K}_{33} = 1/K, \quad \bar{K}_{44} = \bar{K}_{55} = -1/D, \\ g_{11} = \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx), \\ g_{22} = \sin(n\theta) \exp i(\omega t - kx), \\ g_{33} = \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx), \\ g_{44} = \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx), \\ g_{55} = \sin(n\theta) \exp i(\omega t - kx). \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \Pi = f(r) \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx), \\ \Omega_r = -ig_r(r) \sin(n\theta) \exp i(\omega t - kx), \\ \Omega_\theta = -ig_\theta(r) \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx), \\ \Omega_x = g_x(r) \sin(n\theta) \exp i(\omega t - kx). \end{aligned} \right\} (10)$$

式中 $f(r), g_r(r), g_\theta(r), g_x(r)$ 为势函数。

将式 (10) 代入式 (8) 得

2 土体运动方程

假定隧道结构周围土体为均匀、各向同性的线弹性介质，则土介质中任意一点的位移都可以满足纳维 (Navier's) 波动方程，隧道周围土体的运动方程可以表达为^[8-9]

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u} + \mu \nabla^2 \bar{u} + \rho_s f = \rho_s \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (6)$$

式中 $\bar{u} = \{u_r, u_\theta, u_x\}^T$ 为土体的位移矢量， $\lambda = 2\nu_s G_s / (1 - 2\nu_s)$ ， $\mu = E_s / 2(1 + \nu_s)$ 为土体的拉梅弹性常数； E_s, G_s, ν_s, ρ_s 分别为土体的杨氏变形模量、剪切模量、泊松比以及密度； f 为土体的体力矢量，动力计算中通常予以省略； ∇ 为 Hamilton 微分算子。

纳维方程的微分算子结构比较复杂，往往是难以积分求解的，但可以将 \bar{u} 通过某种变换来简化方程，这种变换通常要引入势函数，其中一种就是引入拉梅势。根据斯托克斯 - 亥姆霍兹矢量分解定理，位移场可以分解为无旋场与无散场两个部分。如果位移矢量 \bar{u} 是纳维方程的二次可微解，那么就存在一个标量势函数 Π 和一个矢量势函数 Ω ，使得位移矢量场可以表示为

$$\bar{u} = \nabla \Pi + \nabla \times \Omega, \quad (7)$$

且 Π 和 Ω 分别满足

$$\nabla^2 \Pi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \Omega = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \quad (8)$$

式中 c_1, c_2 分别为土介质中纵波和剪切波波速。

利用式 (7) 拉梅势函数分解得到的土介质的位移分量可以表示为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial x}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Omega_r}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_x}{\partial r}, \\ u_x &= \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Omega_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} (9)$$

式中 $\Pi, \Omega_x, \Omega_\theta, \Omega_r$ 为满足柱坐标系下的 Helmholtz 波动方程的标量势函数和矢量势函数在 x, θ, r 三个方向上的投影。

满足式 (8) 表示的波动方程的波传播解可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \left[\frac{n^2}{r^2} - \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2 \right) \right] f &= 0, \\ \frac{d^2 g_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg_r}{dr} + \frac{1}{r^2} (-n^2 g_r + 2ng_\theta - g_r) - k^2 g_r + \frac{\omega^2}{c_2^2} g_r &= 0, \\ \frac{d^2 g_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg_\theta}{dr} + \frac{1}{r^2} (-n^2 g_\theta + 2ng_r - g_\theta) - k^2 g_\theta + \frac{\omega^2}{c_2^2} g_\theta &= 0, \\ \frac{d^2 g_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg_x}{dr} - \left[\frac{n^2}{r^2} - \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2 \right) \right] g_x &= 0. \end{aligned} \right\} (11)$$

利用规范变换不变性，可以设 $g_r = -g_\theta$ ，代入式 (11) 中的第二、三式可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 g_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg_r}{dr} - \left[\frac{(n+1)^2}{r^2} - \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2 \right) \right] g_r &= 0, \\ \frac{d^2 g_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg_\theta}{dr} - \left[\frac{(n+1)^2}{r^2} - \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2 \right) \right] g_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} (12)$$

可见，式 (11) 满足贝塞尔函数方程，其中第一、四式为 n 阶，第二、三式为 $n+1$ 阶。又根据远场辐射边界条件，可得

$$\left. \begin{aligned} f(r) &= AW_n(\xi_1 r), \\ g_r(r) &= BW_{n+1}(\xi_2 r) = -g_\theta(r), \\ g_x(r) &= CW_{n+1}(\xi_2 r). \end{aligned} \right\} (13)$$

式中 W_n, W_{n+1} 分别为 $n, n+1$ 阶第三类贝塞尔函数即汉克尔函数； $\xi_1 = \sqrt{\omega^2 / c_1^2 - k^2}$ ， $\xi_2 = \sqrt{\omega^2 / c_2^2 - k^2}$ ，分别为土介质中纵波波数的径向分量和剪切波波数的径向分量； A, B, C 为待定常数。

将式 (10)、(13) 代入式 (9)，可以得到轴向位移 u_x 、切向位移 u_θ 、径向位移 u_r 的表达式为：

$$u_r = \left[\xi_1 AW'_n(\xi_1 r) - kBW_{n+1}(\xi_2 r) + \frac{n}{r} CW_{n+1}(\xi_2 r) \right] \cdot \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx) \quad (14a)$$

$$u_\theta = \left[-\frac{n}{r} AW_n(\xi_1 r) - kBW_{n+1}(\xi_2 r) - \xi_2 CW'_{n+1}(\xi_2 r) \right] \cdot \sin(n\theta) \exp i(\omega t - kx) \quad (14b)$$

$$u_x = \left[-ikAW_n(\xi_1 r) + i\xi_2 BW'_{n+1}(\xi_2 r) + i\frac{n+1}{r} BW_{n+1}(\xi_2 r) \right] \cdot \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx) \quad (14c)$$

又由胡克定律应力与应变的关系可得土介质中的

应力表达式为:

$$\sigma_{rr} = \left\{ A \left[(\lambda + \mu) \xi_1^2 W_n''(\xi_1 r) + \lambda \frac{\xi_1}{r} W_n'(\xi_1 r) - \lambda \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2 \right) W_n(\xi_1 r) \right] - B \left[2\mu k B \xi_2 W_{n+1}'(\xi_2 r) \right] + C \left[2\mu \frac{n}{r} \xi_2 W_{n+1}'(\xi_2 r) + \lambda \frac{n^2}{r^2} W_{n+1}(\xi_2 r) \right] \right\} \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx), \quad (15a)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left\{ 2A \left[\frac{n}{r^2} W_n(\xi_1 r) - \frac{n}{r} \xi_1 W_n'(\xi_1 r) \right] + B \left[\frac{n+1}{r} k W_{n+1}(\xi_2 r) - k \xi_2 W_{n+1}'(\xi_2 r) \right] + C \left[\frac{1}{r} \xi_2 W_{n+1}'(\xi_2 r) - \frac{n^2}{r^2} W_{n+1}(\xi_2 r) - \xi_2^2 W_{n+1}''(\xi_2 r) \right] \right\} \sin(n\theta) \exp i(\omega t - kx), \quad (15b)$$

$$\sigma_{rx} = \mu \left\{ -2ikA \xi_1 W_n'(\xi_1 r) + B \left[\left(ik^2 - i \frac{n+1}{r^2} \right) W_{n+1}(\xi_2 r) + i \xi_2 \frac{n+1}{r} k W_{n+1}'(\xi_2 r) + i \xi_2 W_{n+1}''(\xi_2 r) \right] - ik \frac{n}{r} C W_{n+1}(\xi_2 r) \right\} \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx). \quad (15c)$$

3 基于土-结构相互作用的隧道结构振动控制方程

在隧道结构与周围土体的接触面上,隧道结构(圆柱壳)的表面位移与土介质的位移相等,利用圆柱壳中面位移与表面位移的关系,建立隧道结构中面与土介质的位移连续条件:

$$\left. \begin{aligned} &U \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx) + \\ &\quad \Phi \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx) \cdot \frac{h}{2} = u_x \Big|_{r=R+\frac{h}{2}}, \\ &V \sin(n\theta) \exp i(\omega t - kx) + \\ &\quad \Psi \sin(n\theta) \exp i(\omega t - kx) \cdot \frac{h}{2} = u_\theta \Big|_{r=R+\frac{h}{2}}, \\ &W \cos(n\theta) \exp i(\omega t - kx) = u_r \Big|_{r=R+\frac{h}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将式(14)代入式(16),得到矩阵形式表示的位移连续条件:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \Big|_{r=R+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U + \frac{h}{2} \Phi \\ V + \frac{h}{2} \Psi \\ W \end{bmatrix}. \quad (17)$$

式中 $Q_{11} = -ikW_n(\xi_1 r), Q_{12} = i\xi_2 W_{n+1}'(\xi_2 r) + i \frac{n+1}{r} W_{n+1}(\xi_2 r), Q_{13} = 0; Q_{21} = -\frac{n}{r} W_n(\xi_1 r), Q_{22} = -kW_{n+1}(\xi_2 r), Q_{23} = -\xi_2 W_{n+1}'(\xi_2 r), Q_{31} = \xi_1 W_n'(\xi_1 r), Q_{32} = -kW_{n+1}(\xi_2 r), Q_{33} = \frac{n}{r} W_{n+1}(\xi_2 r)$.

又由接触面上的力的连续条件,得到土介质作用在隧道结构外表面上的力为:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_{rx} \Big|_{r=R+\frac{h}{2}}, \\ p_\theta &= \sigma_{r\theta} \Big|_{r=R+\frac{h}{2}}, \\ p_r &= \sigma_{rr} \Big|_{r=R+\frac{h}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将式(15)代入式(18),得到矩阵形式表示的力的连续条件:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_\theta \\ p_r \end{bmatrix} = [g'] \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \Big|_{r=R+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}. \quad (19)$$

式中 $[g'] [g]$ 的前三阶元素组成, $\alpha_{11} = -2i\mu k \xi_1, W_n'(\xi_1 r), \alpha_{13} = i\mu k \frac{n}{r} W_{n+1}(\xi_2 r), \alpha_{12} = \mu[(ik^2 - i \frac{n+1}{r^2}) W_{n+1}(\xi_2 r) + i \xi_2 \frac{n+1}{r} k W_{n+1}'(\xi_2 r) + i \xi_2^2 W_{n+1}''(\xi_2 r)]; \alpha_{21} = 2\mu \left[\frac{n}{r^2} W_n(\xi_1 r) - \frac{n}{r^2} \xi_1 W_n'(\xi_1 r) \right], \alpha_{22} = \mu \left[\frac{n+1}{r} k W_{n+1}(\xi_2 r) - k \xi_2 W_{n+1}'(\xi_2 r) \right], \alpha_{23} = \mu \left[\frac{1}{r} \xi_2 W_{n+1}'(\xi_2 r) - \frac{n^2}{r^2} W_{n+1}(\xi_2 r) - \xi_2^2 W_{n+1}''(\xi_2 r) \right]; \alpha_{31} = (\lambda + 2\mu) \xi_1^2 W_n''(\xi_1 r) + \lambda \frac{\xi_1}{r} W_n'(\xi_1 r) - \lambda \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2 \right) W_n(\xi_1 r), \alpha_{32} = -2\mu k \xi_2 W_{n+1}'(\xi_2 r), \alpha_{33} = 2\mu \frac{n}{r} \xi_2 W_{n+1}'(\xi_2 r) + \lambda \frac{n}{r^2} W_{n+1}(\xi_2 r)$.

将式(17)代入式(19)得

$$\{P\} = [g'] [\alpha] [\beta] \{\overline{U}'\}, \quad (20)$$

式中 $\{\overline{U}'\} = \left\{ U + \frac{h}{2} \Phi, V + \frac{h}{2} \Psi, W \right\}^T$,

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \Big|_{r=R+\frac{h}{2}}, [\beta] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \Big|_{r=R+\frac{h}{2}}.$$

将式(20)中的矩阵 $\{P\}$ 延拓为 5×1 阶矩阵,矩阵 $[\alpha]$, $[\beta]$ 延拓为 5×5 阶矩阵,并将矩阵 $\{\overline{U}'\}$ 进行矩阵变换,得到力的连续条件

$$\{\overline{P}\} = [g] [\overline{\alpha}] [\overline{\beta}] [\overline{h}] \{\overline{U}\}. \quad (21)$$

式中 $\{\overline{P}\} = \{p_x, p_\theta, p_r, 0, 0\}^T$,

$$\begin{aligned} [\alpha] &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{r=R+h/2}, [\beta] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{r=R+h/2} \\ [\bar{h}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & h_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{其中 } h_0 = h/2. \end{aligned}$$

基于接触面上的力的连续条件式(21),利用力的平移得到土介质对隧道结构中面上的作用力表示为

$$\{q\} = [\bar{H}]\{\bar{P}\} = [\bar{H}][g][\alpha][\beta][\bar{h}]\{\bar{U}\}, \quad (22)$$

$$\text{式中 } [\bar{H}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

并将式(22)代入式(3),整理得

$$\{[L] + [\bar{K}][\bar{H}][\alpha][\beta][\bar{h}]\}\{\bar{U}\} = 0. \quad (23)$$

式(23)即为考虑土与结构相互作用的隧道结构振动控制方程。

4 隧道振动特性分析暨方程有效性验证

对于式(23)中的非零解,系数矩阵的行列式必为零,从而得到隧道振动特性的频散特征方程

$$|[L] + [\bar{K}][\bar{H}][\alpha][\beta][\bar{h}]| = 0. \quad (24)$$

4.1 隧道结构两端边界条件的选择

基于前述理论对隧道结构进行模态分析,选择合适的轴向波数 k 以满足隧道系统所要求的边界条件是取得准确分析结果的必要条件。根据文献[1]在研究无限流场中圆柱壳的振动特性时基于波传播方法对边界条件的简化处理方法,本文取隧道结构边界条件为两端固支,则 $kL = (2m+1)\pi/2$,再根据其相应的周向模态数 n ,利用高阶超越方程(24)即土介质中隧道结构的频散特征方程,在整个复平面上求解,可以得到土介质中隧道结构的实固有频率和复固有频率,本文在自振频率的分析中所给出的计算结果均为表示弯曲振动的实固有频率。

4.2 计算参数的选择

在进行隧道结构的振动特性分析时,结合工程实际,方程中圆柱壳的计算参数取西安地铁二号线的隧道结构参数,弹性介质的计算参数依据西安钟楼周围

土层的物理力学指标统计进行选取。具体计算参数见表1,其中, E 为杨氏弹性模量, E_s 为土的压缩模量, ρ 为密度, ν 为泊松比, α 为土的压缩系数, c_1 , c_2 分别为弹性介质中的纵波波速和剪切波波速, L 为隧道的长度, R 为隧道的半径, h 为隧道的壁厚, d 为隧道埋深。

表1 模型计算参数

Table 1 Model parameters

隧道(圆柱壳)	土层(弹性介质)
$E=3 \times 10^{10}$ Pa	$E_s=8.3 \times 10^6$ Pa
$\nu=0.2$	$\nu=0.3$
$\rho=2400$ kg/m ³	$\rho=2000$ kg/m ³
$L=31.4$ m	$\alpha=0.21$
$R=3.0$ m	$c_1=400$ m/s
$h=0.3$ m	$c_2=300$ m/s
$d=15$ m	

4.3 数值计算及有效性验证

基于前述边界条件和计算参数的选取,根据式(24)在 Matlab 平台上编制相应的计算程序,分别得到了不考虑周围土层和考虑周围土层作用时隧道结构的自振频率,并与基于薄壳理论和有限元理论的相应计算结果进行了比较。计算结果分别列于表2和表3。

表2 不考虑周围土层时隧道结构的固有频率

Table 2 Natural frequencies of tunnel structures without

计算 方法	consideration of surrounding soil						Hz
	模态阶数(m, n)						
	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(3, 2)	(4, 3)
本文	13.19	23.54	28.74	31.44	36.93	38.38	45.18
文献[4]	17.51	26.66	43.04	45.73	50.94	40.96	58.87
FEM	12.66	21.64	28.43	30.70	35.51	34.80	42.91

表3 考虑周围土层时隧道结构的固有频率

Table 3 Natural frequencies of tunnel structures with consideration

计算 方法	of surrounding soil						Hz
	模态阶数(m, n)						
	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(3, 2)	(4, 3)
本文	15.12	24.73	29.59	32.18	37.53	39.16	45.64
文献[4]	19.14	27.68	43.70	46.35	51.49	41.65	59.34
FEM	16.46	24.13	31.07	32.93	37.41	36.52	45.04

5 土介质中隧道结构振动特性影响因素的分析

影响因素分析中,将隧道结构边界简化为一端简支一端滑动支撑,则 $kL = (2m-1)\pi/2$ 。

5.1 隧道半径的影响

表4中给出了考虑周围土层作用的不同半径隧道结构的自振频率,计算中所选取的参数除半径外,其他均参照表1。

现在首先就3种计算方法进行简要说明:①本文所推导的计算方法中,隧道结构的控制方程是基于中厚壳理论建立的,周围土层的控制方程则是基于弹性介质中的波动理论建立,并将土层与结构接触面上的

连续条件通过矩阵运算转移到隧道的中面上进行方程的求解; ②文献[4]所采用的计算方法中, 隧道结构方程的建立则是基于薄壳理论, 计算中将土与结构接触面上的连续条件等效为壳中面上的连续条件; ③利用有限元理论的计算方法中, 隧道结构采用 8 节点二次减缩积分厚壳单元(S8R), 土体采用 8 节点六面体二次减缩积分单元(C3D8R), 频率提取分析采用 Lanczos 方法。

表 4 不同半径下隧道结构的固有频率

Table 4 Natural frequencies of tunnel structures with different radii Hz

模态阶数 (<i>m, n</i>)	隧道半径/m			
	2.5	3.0	3.5	4
(1,2)	18.54	13.24	9.94	7.96
(2,2)	19.94	15.83	13.88	13.30
(3,2)	26.55	25.20	26.69	25.59
(1,3)	41.52	29.19	22.09	16.79
(2,3)	42.18	29.97	23.04	18.04
(3,3)	44.03	32.52	26.49	22.70

通过对表 2, 3 中基于 3 种不同理论方法的计算结果的分析, 可以得到以下结论: ①根据本文的理论推导计算所得的隧道结构各阶自振频率与基于有限元理论的精确数值解结果较为接近, 相对误差在 10%以内 (随着有限元单元划分的细化, 相对误差仍可减小), 且相较于薄壳理论的计算结果更接近精确解, 这表明了本文方法的正确性和可靠性。②基于中厚壳理论建立的隧道结构振动控制方程, 由于计入了横向剪切变形及转动惯量效应, 降低了结构的广义刚度, 增加了广义质量, 因而计算所得的隧道结构的固有频率比相应基于薄壳理论的计算结果要低。而且, 模态阶数越高, 二者的相差越大, 采用薄壳理论计算带来的误差也就越大。③考虑周围土层作用时计算所得的隧道结构自振频率大于不考虑其作用时的情况, 这说明周围土层的存在相当于增加了隧道结构的广义刚度。文献[10]中认为岩土介质对地下结构自振特性的影响主要包括附加质量和附加刚度的影响, 对于本文来说, 隧道周围土层的控制方程采用的是弹性介质中的波动理论, 而实际工程中隧道的埋深也相对较大, 因此可以认为土介质对隧道结构振动特性的影响主要表现为附加刚度的影响, 或者说周围土体产生的附加刚度的影响大于其附加质量的影响 (隧道结构控制方程基于不同理论时的计算结果均具有此特性也证明了所推导方程的合理性)。另外, 可以看出模态阶数较小时考虑与不考虑周围土层作用的隧道结构自振频率相差较大, 而随着模态阶数的增大, 二者之间的差值变小, 因而, 当低阶模态在分析中占主导地位时, 如果忽略土与结构的相互作用将产生较大的误差。

由表 4 可以看到: 各阶模态下, 考虑周围土层作

用时隧道结构的固有频率随着半径的增加而降低。可见, 在周围分布土层附加质量和附加刚度都不变的情况下, 隧道半径对隧道结构自振频率的影响主要表现为降低了结构的广义刚度, 而增加了其广义质量, 这种影响在模态阶数较高时更为明显。同时, 当隧道半径较大时, 半径的变化对频率的影响程度渐小, 特别是在低阶模态的情况。

5.2 隧道壁厚的影响

表 5 中列出了不同壁厚情况下隧道结构的固有频率, 计算中除隧道壁厚外, 其他计算参数均参照表 1 选取。

表 5 不同壁厚下隧道结构的固有频率

Table 5 Natural frequencies of tunnel structures with different wall-thicknesses Hz

模态阶数 (<i>m, n</i>)	隧道壁厚/m			
	0.2	0.3	0.4	0.5
(1,2)	13.24	12.30	11.94	11.73
(2,2)	15.83	15.10	14.76	14.58
(3,2)	25.20	24.72	24.50	24.37
(1,3)	29.19	28.78	28.56	28.43
(2,3)	29.97	29.58	29.37	29.24
(3,3)	32.52	32.17	31.98	31.86

由表 5 可以看到: 对于各阶模态来说, 土介质中隧道结构的固有频率随着壁厚的增加而降低。这与文献[2]中认为弹性介质中圆柱壳的固有频率随着其壁厚的增加而呈上升趋势的结论相反。这是因为本文的计算模型是基于中厚圆柱壳理论建立的, 计入了横向剪切变形及转动惯量效应, 随着圆柱壳壁厚的增加, 前述的两种影响也随之增大, 从而降低了隧道结构的广义刚度, 增加了其广义质量, 使隧道结构的固有频率降低, 且这种影响在低阶模态时较为明显。

5.3 隧道长度的影响

表 6 中列出了不同隧道长度情况下隧道结构的固有频率, 计算中除隧道长度外, 其他计算参数均参照表 1 选取。

表 6 不同长度隧道结构的固有频率

Table 6 Natural frequencies of tunnel structures with different lengths Hz

模态阶数 (<i>m, n</i>)	隧道长度/m			
	5 π	10 π	20 π	40 π
(1,2)	13.83	13.24	13.38	13.79
(2,2)	31.95	15.83	13.40	13.25
(3,2)	63.94	25.20	14.61	13.29
(1,3)	29.43	29.17	29.14	29.12
(2,3)	34.79	29.97	29.28	29.16
(3,3)	50.68	32.52	29.66	29.23

由表 6 可以看到: 考虑周围土层作用时隧道结构的固有频率随着隧道长度的增加而降低, 可以认为这是由于隧道长度的增加降低了隧道结构的广义刚度造成的; 另外, 当隧道长度有 5 π 增加到 10 π 时隧道结

构固有频率在较高阶模态时有显著下降,随着隧道长度增加到某一定值时,结构自振频率的下降趋势明显减缓,甚至有趋于恒定的现象。

5.4 隧道埋深的影响

表7中列出了不同隧道埋深情况下隧道结构的固有频率(这里用土层模量的变化来衡量隧道埋深因素的影响),计算中所选取的参数除土层模量外,其他均参照表1。

表7 不同埋深隧道结构的固有频率

模态阶数 (m, n)	隧道埋深(利用土的变形模量来衡量, MPa)			
	10	15	20	30
(1,2)	12.22	13.24	14.21	16.02
(2,2)	15.00	15.83	16.62	18.10
(3,2)	24.66	25.20	25.73	26.76
(1,3)	28.75	29.19	29.62	30.46
(2,3)	29.55	29.97	30.38	31.19
(3,3)	32.15	32.52	32.89	33.62

由表7中计算结果可以得到的结论:考虑周围地层作用时,隧道结构的固有频率随着隧道埋深的增加而增大,可以认为周围土层对于隧道结构的影响主要表现为附加刚度的影响。通常文献认为岩土介质对地下结构振动特性的影响主要是附加质量和附加刚度的影响,特别对于浅埋结构,主要表现为附加质量的影响。而对于本文来说,考虑到土层的控制方程基于波动理论建立,所考察的地铁隧道一般埋置较深,可以认为周围岩土介质作用主要表现为附加刚度的影响,或者说附加刚度的影响大于附加质量的影响。另外,隧道埋深即周围土层刚度的变化对于隧道结构低阶模态的影响大于高阶模态的情况。

6 结 论

本文利用中厚壳理论和波在土介质中的传播理论,通过波传播方法,建立了考虑土与结构相互作用的隧道结构振动控制方程,并对其振动特性进行了分析,得到以下几点结论。

(1)本文理论数值计算所得的隧道结构各阶自振频率与基于有限元理论的精确解析解结果较为接近,相对误差在10%以内。

(2)由于计入了横向剪切变形及转动惯量效应,降低了结构的广义刚度,增加了广义质量,因而计算所得的隧道结构的固有频率比相应基于薄壳理论的计算结果要低。

(3)土介质对地铁隧道结构振动特性的影响主要表现为附加刚度的影响。

(4)当低阶模态在分析中占主导地位时,如果忽略土与结构的相互作用将产生较大的误差。

(5)隧道结构的固有频率随着半径的增加而降低,随着壁厚的增加而降低,随着长度的增加而降低,随着隧道埋深的增加而增大。

参考文献:

- [1] ZHANG X M, LIU G R, LAM K Y. Coupled vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells using the wave propagation approach[J]. Applied Acoustics, 2001, 62(3): 229 - 243.
- [2] 刘敬喜. 黏弹性介质中充液圆柱壳的动态特性研究[D]. 华中科技大学, 2005. (LIU Jing-xi. Dynamic characteristic analysis of fluid-filled cylindrical shells in viscoelastic medium[D]. Huazhong University of Science&Technology, 2005. (in Chinese))
- [3] DATTA S K, SHAH A H, EI-AKILY N. Dynamic behavior of buried pipe in a seismic environment[J]. ASME Journal of Applied Mechanics. 1982, 49: 141 - 148.
- [4] FORREST J A, HUNT H E M. A three-dimensional tunnel model for calculation of train induced ground vibration[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 294: 678 - 705.
- [5] 张崇文, 陈 荣, 张社荣, 等. 沟埋式大型钢筋混凝土管与土相互作用动力性能的研究[J]. 岩土工程学报, 1991, 13(4): 24 - 32. (ZHANG Chong-wen, CHEN Rong, ZHANG She-rong, et al. Study on dynamic characteristics of the interaction between the soil and large reinforced concrete ditch conduit[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1991, 13(4): 24 - 32. (in Chinese))
- [6] 黄 义, 黄会荣, 何芳社, 等. 弹性壳的线性理论[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (Huang Yi, HUANG Hui-rong, HE Fang-she, et al. The linear theory of elastic shells[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese))
- [7] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989. (CAO Zhi-yuan. Vibration theory of plates and shells[M]. Beijing: China railway publishing house, 1989. (in Chinese))
- [8] 杨宝俊. 弹性波理论[M]. 长春: 东北师范大学出版社, 1990. (YANG Bao-jun, et al. The theory of elastic wave[M]. Changchun, Northeast normal university Press, 1990. (in Chinese))
- [9] GRAFF K F. Wave motion in elastic solids[M]. Oxford University Press, London, 1975.
- [10] 曹志远, 吴 钊. 计入岩土介质无限空间效应的地下结构自振特性计算公式[J]. 地下空间, 2003, 23(4): 375 - 380. (CAO Zhi-yuan, WU Zhao. Natural frequency formulas for underground structures with consideration of infinite space effect of rock medium[J]. Underground Space, 2003, 23(4): 375 - 380. (in Chinese))