

SH波作用下饱和地基表面刚性圆形基础扭转振动分析

蔡袁强^{1,2}, 王鹏¹, 曹志刚¹

(1. 软弱土与环境工程教育部重点实验室, 浙江 杭州 310058; 2. 温州大学建筑工程学院, 浙江 温州 325035)

摘要: 利用半解析的方法研究了饱和地基表面刚性圆形基础在倾斜入射 SH 波作用下的扭转振动问题。假设基础以下为 Biot 波动方程描述的饱和半空间, 通过 Hankel 变换把 Biot 波动方程转化为常微分方程进行求解。将土体中的波场划分为自由波场、刚体散射波场及辐射散射波场三部分。根据土体中波场的划分, 结合基础与饱和半空间接触面的混合边值条件, 建立两组描述刚性圆形基础扭转振动的对偶积分方程并用 Nobel 变换方法将其化为第二类 Fredholm 积分方程。通过求解 Fredholm 积分方程并结合基础刚体动力平衡方程, 求得了基础在 SH 波作用下的扭转振动表达式。最终通过数值算例分析了波动频率、入射角度, 基础扭转惯性矩以及饱和土体参数等对基础扭转振动的影响。

关键词: Biot 波动方程; 饱和半空间; SH 波; 扭转振动

中图分类号: TU435 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2011)05-0679-06

作者简介: 蔡袁强(1965-), 男, 教授, 主要从事土动力学研究工作。E-mail: caiyq@zju.edu.cn。

Torsional vibration of a rigid circular foundation resting on poroelastic half-space subjected to obliquely incident SH waves

CAI Yuan-qiang^{1,2}, WANG Peng¹, CAO Zhi-gang¹

(1. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Hangzhou 310058, China; 2. College of Architecture and Civil Engineering, Wenzhou University, Wenzhou 325035, China)

Abstract: A semi-analytical approach is used to study the torsional vibration of a rigid circular foundation resting on poroelastic half-space subjected to obliquely incident SH waves. The Biot's dynamic poroelastic theory is employed to characterize the saturated half-space. The governing equations for the saturated half-space and foundation are solved by using the Hankel transform. The total wave field in the saturated half-space is classified into free-field waves, rigid-body scattering waves and radiation scattering waves. According to the classification of the total wave field and the mixed boundary-value condition between the saturated half-space and foundation, the torsional vibration of the foundation is formulated into two sets of dual integral equations. Then, the integral equations are reduced to Fredholm integral equations of the second kind to solve. Considering the dynamic equilibrium equation of the foundation, the torsional vibration expression of the foundation is obtained. Numerical results are presented to demonstrate the effects of wave frequency, incident angle of the waves, the torsional inertia moment of the foundation and permeability of the saturated half-space on the torsional vibration.

Key words: Biot's theory; poroelastic half-space; incident SH wave; torsional vibration

0 引言

地基与基础的动力相互作用问题一直是基础工程和地震工程的重要研究方向, 它对动力机器荷载或地震荷载作用下基础的设计有着重要的指导意义。地基与基础的动力相互作用包括两方面内容: 第一是基础在外力作用下的振动问题, 第二是基础在入射波作用下的响应问题。随着土动力学的发展, 许多学者对基础在外力作用下的振动问题进行了深入的研究并取得了丰富的成果^[1-5]。

对于基础在入射波作用下的动力响应, Kobori 等^[6-7]利用格林函数, 通过构造对偶积分方程, 研究了弹

性半空间表面刚性圆形基础在平面波和瑞利波下的水平、摇摆及扭转振动。Luco 等^[8-9]研究了基础在弹性波下的动态响应与在外力作用下的简谐振动之间的关系, 并以此求解了刚性圆形基础在平面波和 SH 波下的竖向、水平、摇摆及扭转振动。梁建文等^[10]利用 Fourier-Bessel 级数展开的方法, 在频域内给出了圆弧沉积河谷场地在平面 P 波入射下动力响应的解析解。以上研究仅限于单相介质, 而对于饱和土而言,

基金项目: 国家杰出青年科学基金 (51025827); 国家自然科学基金 (50778136); 浙江省杰出青年团队项目 (R1080819); 中国博士后科学基金 (20090450182)

收稿日期: 2009-12-25

Todorovska 等^[11]研究了饱和半空间中埋置圆弧形基础在入射波下的动力响应问题, Lu 等^[12]利用波函数展开法, 研究了入射波作用下饱和全空间中隧洞的动力响应。周香莲等^[13]运用复变函数法分析了饱和土中圆形衬砌对弹性波的散射问题。目前为止, 饱和土中入射波作用下土与结构相互作用问题的研究大多局限于二维模型, 而对于饱和地基表面圆形基础在入射波作用下的动力响应问题还未见报道。

在前人研究的基础上, 本文基于 Biot 波动方程, 采用 Hankel 变换方法, 结合土体中波场的划分, 按照混合边值条件建立了 SH 波作用下饱和地基上刚性基础扭转振动时的两组对偶积分方程并将其化为 Fredholm 积分方程求解, 通过数值计算得到了扭转振动振幅的表达式, 研究分析了入射波频率, 入射角度, 基础扭转惯性矩以及饱和土体参数等对基础扭转振动的影响。

1 基本控制方程

1.1 计算模型

建立模型如图 1 所示, 半径为 r_0 的刚性圆形基础位于饱和地基表面, 其底部受倾斜入射的稳态 SH 波作用。

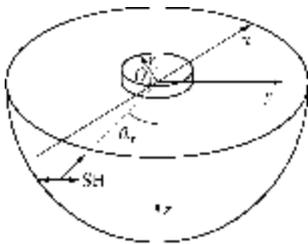


图 1 饱和半空间表面刚性圆形基础

Fig. 1 Rigid circular foundation resting on poroelastic half-space

1.2 饱和土体的控制方程

饱和地基表面刚性圆形基础的扭转问题属于轴对称问题, 假设在入射波作用下所有运动都是简谐运动, 则土骨架切向位移和流体相对于土骨架切向位移分别为 $u_q e^{i\omega t}$, $w_q e^{i\omega t}$ (ω 为振动圆频率) 且与 θ 无关, 且其余位移分量皆为零。根据 Biot 多孔介质理论^[14-15], 不计土颗粒的压缩性, 在圆柱坐标下饱和土体扭转振动的基本运动方程为

$$m \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_q = - (r_f w^2 w_q + r w^2 u_q), \quad (1)$$

$$-\frac{i b w}{n} w_q = - (r_1 w^2 u_q + r_f w^2 w_q), \quad (2)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$; m 为土骨架的 Lamé 常数; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $r = r_1 + r_2$; $r_1 = n r_f$; $r_2 = (1-n) r_s$;

n 为土骨架的空隙率; r_f , r_s 分别为水和土颗粒的质量密度; b 为反映土体黏性耦合的系数 (在此及以下省略时间因子 $e^{i\omega t}$)。

土骨架的应力应变关系为

$$t_{zq} = m \frac{\partial u_q}{\partial z}, \quad (3)$$

$$t_{r_q} = m \left(\frac{\partial u_q}{\partial r} - \frac{u_q}{r} \right). \quad (4)$$

1.3 饱和土体中的波场

基础的动力响应由入射 SH 波引起, 设其传播方向在 (x, z) 平面内, 偏振方向沿 y 轴, 如图 1 所示。则土骨架中 SH 波在直角坐标系下可表示为

$$u^{\text{in}}(x, y, z) = u_{g0} e^{-i k_s (x \sin q_{\text{in}} - z \cos q_{\text{in}})}, \quad (5)$$

式中 u_{g0} 为 SH 波振幅; q_{in} 为 SH 波倾斜入射时入射角。

SH 波在柱坐标系 (r, q, z) 下表示为

$$u^{\text{in}}(r, q, z) = u_{g0} e^{i k_{sz} z} e^{-i k_{sx} r \cos q}, \quad (6)$$

式中 $k_{sz} = k_s \cos q_{\text{in}}$; $k_{sx} = k_s \sin q_{\text{in}}$ 。

SH 波在饱和半空间表面发生反射, 反射波在柱坐标系 (r, q, z) 下表示为

$$u^{\text{re}}(r, q, z) = u_{g0} e^{i k_{sz} z} e^{-i k_{sx} r \cos q}. \quad (7)$$

u^{in} 及 u^{re} 为饱和半空间中的自由波场。由于饱和半空间表面刚性基础的存在, SH 波会发生散射现象, 这时可将刚性基础看作一个次生波源。根据弹性波的散射理论^[16], 此时土体中的散射波场可划分为两部分, 一部分为入射波在传播过程中遇到固定的刚性基础时产生的散射波场 u^{S} , 一部分为刚性基础在转动过程中产生的辐射波场 u^{R} 。

由以上分析可知, 饱和土体中总波场可表示为

$$u(r, q, z) = u^{\text{in}} + u^{\text{re}} + u^{\text{S}} + u^{\text{R}}. \quad (8)$$

2 结合边界条件求解方程

2.1 求解基础底面扭矩

为便于分析, 引入无量纲参数和变量:

$$a_0 = \sqrt{r/mr_0} w, \quad b^* = r_0 b / \sqrt{r m}, \quad r_f^* = r_f / r, \\ r_1^* = r_1 / r, \quad \bar{r} = r / r_0, \quad \bar{z} = z / r_0, \quad \bar{u}_q = u_q / r_0, \quad \bar{w}_q = w_q / r_0, \\ \bar{t}_{zq} = t_{zq} / m, \quad \bar{t}_{r_q} = t_{r_q} / m, \quad \bar{u} = u / r_0, \quad \bar{u}^{\text{in}} = u^{\text{in}} / r_0, \\ \bar{u}^{\text{re}} = u^{\text{re}} / r_0, \quad \bar{u}^{\text{R}} = u^{\text{R}} / r_0, \quad \bar{u}^{\text{S}} = u^{\text{S}} / r_0, \quad \bar{u}_{g0} = u_{g0} / r_0.$$

对式 (1) ~ (8) 进行无量纲化得

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\bar{r}^2} \right) \bar{u}_q = - (r_f^* a_0^2 \bar{w}_q + a_0^2 \bar{u}_q), \quad (9)$$

$$\frac{i b^* a_0}{n} \bar{w}_q = r_1^* a_0^2 \bar{u}_q + r_f^* a_0^2 \bar{w}_q, \quad (10)$$

$$\bar{t}_{zq} = \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial \bar{z}}, \quad (11)$$

$$\bar{r}_{rq} = \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}_q}{\bar{r}}, \quad (12)$$

$$\bar{u}(r, q, z) = \bar{u}^{in} + \bar{u}^{re} + \bar{u}^S + \bar{u}^R. \quad (13)$$

记 $\mathcal{H}_\nu(e) = \int_0^\infty r f(r) J_\nu(er) dr$ 为函数 $f(r)$ 的 ν 阶 Hankel 变换, 其逆变换为 $\mathcal{H}_\nu(r) = \int_0^\infty e f(e) J_\nu(er) de$, 其中 $J_\nu(er)$ 为第一类 ν 阶 Bessel 函数。

对式 (9) ~ (11) 进行一阶 Hankel 变换

$$-e^2 \bar{u}_q'' + \frac{d^2 \bar{u}_q}{dz^2} = -(r_1^* a_0^2 \bar{w}_q + a_0^2 \bar{u}_q''), \quad (14)$$

$$\frac{ib^* a_0}{n} \bar{w}_q = r_1^* a_0^2 \bar{w}_q + r_1^* a_0^2 \bar{w}_q', \quad (15)$$

$$\bar{w}_{zq} = \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial \bar{z}}. \quad (16)$$

解上述方程, 并考虑饱和土体中波的衰减, 得

$$\bar{u}_q'' = A e^{-h\bar{z}}, \quad (17)$$

$$\bar{w}_{zq} = -h A e^{-h\bar{z}}. \quad (18)$$

式中 A 为与 e 有关的待定系数; $h^2 = e^2 - k_s^2$, 且 $\text{Re}(h) > 0$; $k_s^2 = \frac{r_1^* r_2^* a_0^3 - ib^* a_0^2}{r_1^* a_0 - ib^*}$, k_s 为 SH 波的无量纲复波数。

由于刚性基础的存在, 造成散射波场的产生, 其位移场在各个方向上的分量并不为零, 在此只分析基础的扭转振动。饱和地基中刚性基础的扭转振动属于混合边值问题, 即在基底处给定位移, 在基底外给定应力。假设半空间与基础完全黏着接触, 即接触面上无相对位移, 则饱和地基表面 $z=0$ 处的混合边值条件为

$$\bar{u}_q = \bar{r} f \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1, \quad (19)$$

$$\bar{r}_{zq} = 0 \quad \bar{r} > 1. \quad (20)$$

将式 (13) 代入式 (19)、(20) 可得

$$\bar{u}_q^R = \bar{r} f \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1, \bar{z} = 0, \quad (21)$$

$$\bar{r}_{zq}^R = 0 \quad \bar{r} > 1, \bar{z} = 0, \quad (22)$$

$$\bar{u}_q^S = -\bar{u}_q^{in+re} \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1, \bar{z} = 0, \quad (23)$$

$$\bar{r}_{zq}^S = 0 \quad \bar{r} > 1, \bar{z} = 0. \quad (24)$$

式中 \bar{u}_q^{in+re} 为饱和半空间表面自由波场下土体的扭转位移; \bar{u}_q^R , \bar{u}_q^S 分别为饱和半空间表面辐射波场、散射波场下土体的扭转位移。

根据文献[17], 饱和半空间表面自由波场下土体的扭转位移可表示为

$$\bar{u}_q^{in+re}(\bar{r}, q, 0) = 2\bar{u}_{g0} i k_{sx} \cos q e^{-i k_{sx} \bar{r} \cos q}. \quad (25)$$

由于在此只研究基础的扭转振动, 其大小与 q 无关, 所以可用 q 方向的位移均值替代自由波场下土体的扭转位移

$$\bar{u}_q^{in+re} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}_q^{in+re}(\bar{r}, q, 0) dq, \quad (26)$$

即

$$\bar{u}_q^{in+re} = 2\bar{u}_{g0} k_{sx} J_1(k_{sx} \bar{r}). \quad (27)$$

将式 (17)、(18)、(27) 分别代入式 (21) ~ (24), 可得到如下两组描述刚性基础扭转振动混合边值问题的对偶积分方程:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty e A_R J_1(e\bar{r}) de &= \bar{r} f & 0 \leq \bar{r} \leq 1, \\ \int_0^\infty e A_R h J_1(e\bar{r}) de &= 0 & \bar{r} > 1, \end{aligned} \right\}, \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty e A_S J_1(e\bar{r}) de &= -2\bar{u}_{g0} k_{sx} J_1(k_{sx} \bar{r}) & 0 \leq \bar{r} \leq 1, \\ \int_0^\infty e A_S h J_1(e\bar{r}) de &= 0 & \bar{r} > 1. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

上述对偶积分方程为 Tranter 型对偶积分方程, 运用 Noble 提出的方法^[18], 将式 (28)、(29) 转化为第二类 Fredholm 积分方程。令

$$e A_R h = \frac{4}{\pi} e f \int_0^1 q_R(t) \sin(et) dt, \quad (30)$$

将式 (30) 代入式 (28), 可得到如下第二类 Fredholm 积分方程:

$$q_R(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 q_R(t) M(t, x) dx = t. \quad (31)$$

$$\text{式中 } M(t, x) = \int_0^\infty \left(\frac{e}{h} - 1 \right) \sin(et) \sin(ex) de.$$

令

$$e A_S h = -\frac{4}{\pi} \bar{u}_{g0} k_{sx} e \int_0^1 q_S(t) \sin(et) dt, \quad (32)$$

将式 (32) 代入式 (29), 可得到如下第二类 Fredholm 积分方程

$$q_S(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 q_S(t) M(t, x) dx = \sin(k_{sx} t). \quad (33)$$

设作用在圆形刚性基础底面上的扭矩为 T , 无量纲化后为 $\bar{T} = T / m r_0^3$, 由基础动力平衡条件得

$$\bar{T} = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \bar{r}_{zq}(r, q, 0) \bar{r}^2 d\bar{r} dq = -2\pi \int_0^1 \bar{r}_{zq}(r, 0) \bar{r}^2 d\bar{r} dq. \quad (34)$$

将式 (18)、(30)、(32) 代入式 (34), 并考虑一阶 Hankel 逆变换

$$\bar{T} = 16f \int_0^1 t q_R(t) dt - 16\bar{u}_{g0} k_{sx} \int_0^1 t q_S(t) dt. \quad (35)$$

定义

$$K_{TT} = 16 \int_0^1 t q_R(t) dt, \quad (36)$$

$$f^* = \frac{16\bar{u}_{g0} k_{sx} \int_0^1 t q_S(t) dt}{K_{TT}}, \quad (37)$$

式 (35) 可化为如下形式:

$$\bar{T} = K_{TT} (f - f^*). \quad (38)$$

式中 K_{TT} 为基础的扭转刚度系数; f^* 为输入位移, 表示无外力作用时, 刚性基础在入射波作用下的扭转位移 ($\bar{T} = 0$)。式 (38) 表示了刚性基础在简谐荷载与

波动荷载作用下基底扭矩与位移的对应关系。

2.2 基础的扭转动力平衡方程

圆形刚性基础扭转的动力平衡方程为

$$I_0 \ddot{\phi} = Q - T \quad (39)$$

式中 I_0 为基础的质量惯性矩，无量纲化 $I_0^* = I_0 / r r_0^5$ ； Q 为基础所受外扭矩（本文中 $Q=0$ ）； T 为基础底面扭矩。

将式（35）代入式（39）后得

$$I_0^* \ddot{\phi} + c_t \dot{\phi} + k_t \phi = 16 \bar{u}_{g0} k_{sx} \int_0^1 t q_S(t) dt \quad (40)$$

式中 $k_t = \text{Re}(K_{TT})$ ； $c_t = -\text{Im}(K_{TT})$ 。

根据振动分析方法^[19]，可得到 SH 波作用下基础扭转振动的角位移幅值

$$A_T = \frac{|16 \bar{u}_{g0} k_{sx} \int_0^1 t q_S(t) dt|}{\sqrt{(k_t - \bar{I}_0 a_0^2)^2 + (c_t a_0)^2}} \quad (40)$$

无量纲角位移幅值 $A_{T0} = A_T r_0 / u_{g0}$ 。

3 算例分析

为验证本文结果的正确性，计算时令饱和土体参数 $r^* = b^* = 10^{-5}$ ，将饱和地基退化到单相地基。计算入射角 $q_{in} = 45^\circ$ 时，刚性圆形基础扭转振动的输入位移 f^* 随无量纲激振频率 a_0 的变化曲线，并把所得结果与 Luco^[20]的结果进行对比。文中采用的各项参数与文献[20]中保持一致，由图 2 可以看出，二者吻合很好。

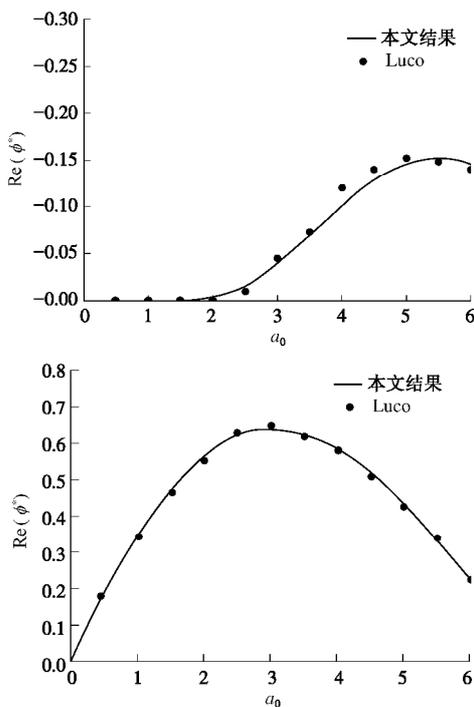


图 2 本文计算结果和文献[19]的结果对比

Fig. 2 Comparison between present solutions and those of Ref.

[19]

本文中饱和地基的无量纲土体参数为： $\rho^* = 0.45$ ， $n = 0.35$ 。

图 3 给出了 $q_{in} = 45^\circ$ ， $b^* = 0.01, 1, 100$ 及单向介质情况下基础的输入位移 f^* 随无量纲频率 a_0 的变化曲线。可以看出， f^* 的虚部和实部绝对值随 a_0 先增大后减小，且在振动频率较小时 f^* 小于单相介质的情况，而当振动频率较大时 f^* 大于单相介质的情况。 b^* 为反映土体黏性耦合的系数，随着 b^* 增大，土体的渗透性逐渐降低。由图 3 中可以看出，随着 b^* 增大，饱和半空间中的扭转振动情况与单相介质逐渐接近，当 $b^* \geq 100$ 时，两者已非常接近，渗透系数的影响可以忽略。

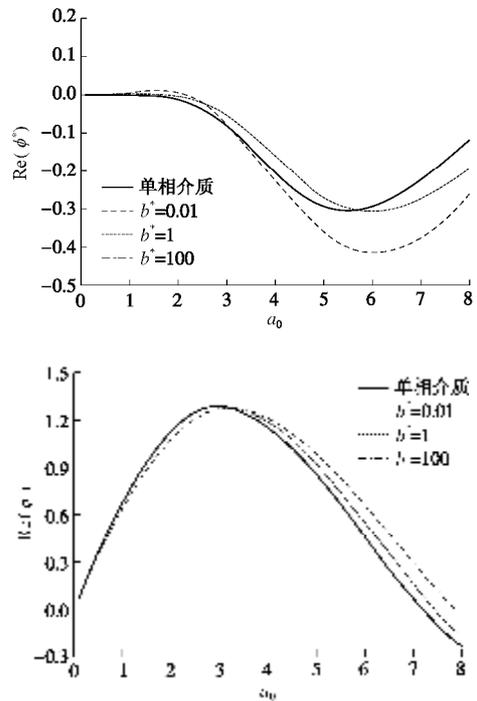


图 3 b^* 变化时基础的输入位移与频率关系

Fig. 3 f^* varying with a_0 with different values of b^*

图 4 给出了 $q_{in} = 30^\circ$ ， $b^* = 10$ ， $I_0^* = 1, 5, 10, 15$ 时 A_{T0} 随 a_0 的变化曲线。从图 4 中可以看出，在其它参数一定的条件下，不同的 I_0^* 值对应的 A_{T0} 曲线随 a_0 的变化规律相似。对于给定的 I_0^* ， A_{T0} 随 a_0 的增加先增大后减小，在共振频率处达到峰值，即发生共振。当激振频率远小于或大于共振频率时， a_0 对 A_{T0} 的影响极小。随着 I_0^* 增大，其对应的角位移曲线共振振幅明显增大，共振现象更加明显，同时共振频率减小。

图 5 给出了 $b^* = 10$ ， $I_0^* = 1$ 不同入射角时 A_{T0} 随 a_0 的变化曲线。由图 5 中可以看出， $q_{in} = 0^\circ$ 时即 SH 波垂直入射时 $A_{T0} = 0$ ，随入射角的增大 A_{T0} 逐渐增大，当 $q_{in} = 90^\circ$ 即 SH 波水平入射时 A_{T0} 达到最大。此时共振振幅最大，共振现象最明显。但随入射角的变化，

基础共振频率保持不变。由图 5 可以推知, 基础的扭转振动由平面内入射波引起, 与平面外运动无关。

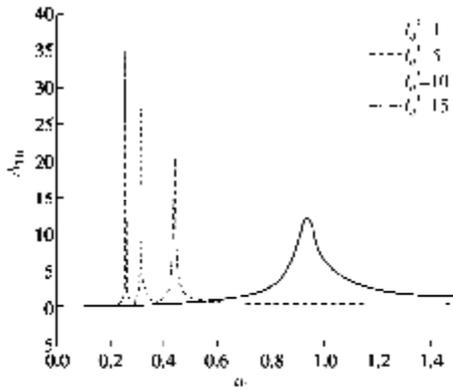


图 4 I_0^* 变化时基础的角位移幅值曲线

Fig. 4 A_{T0} varying with a_0 with different values of I_0^*

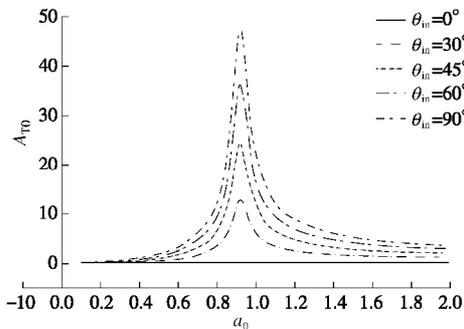


图 5 q_{in} 变化时基础的角位移幅值曲线

Fig. 5 A_{T0} varying with a_0 with different values of q_{in}

图 6, 7 分析了 $n=0.35$, $q_{in}=30^\circ$, $b^*=1$ 时, 基础的共振频率、共振振幅与质量惯性矩之间的关系。随着基础的质量惯性矩不断增大, 发生共振时的频率逐渐减小, 尤其当质量惯性矩较小时共振频率迅速减小, 而后减小趋势趋于平缓, 这与前面的分析结果保持一致。同时共振振幅逐渐增大, 随质量惯性矩增加呈近似的线性增加。

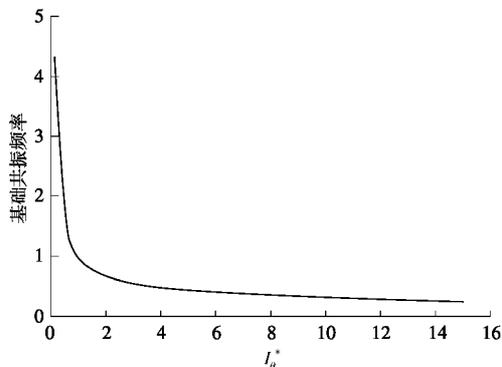


图 6 基础共振频率 - 质量惯性矩曲线

Fig. 6 Resonant frequency varying with I_0^*

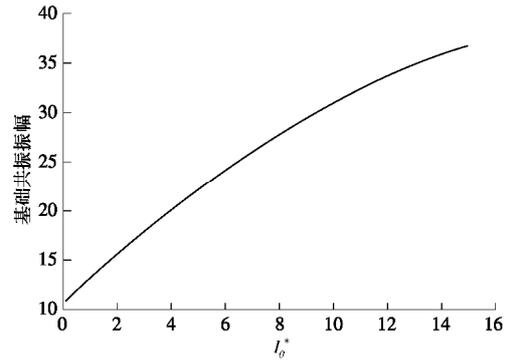


图 7 基础共振振幅 - 质量惯性矩曲线

Fig. 7 Resonant amplitude varying with I_0^*

4 结 语

研究了 SH 波作用下饱和地基上刚性圆形基础的扭转振动特性。引入 Biot 波动方程描述饱和地基, 并将土体中的总波场划分为自由波场、刚体散射波场及辐射散射波场, 结合混合边值条件建立对偶积分方程并求解, 得到基础扭转振动角位移幅值的表达式。分析结果表明:

(1) 饱和土地基中, 扭转振动曲线形状与弹性介质情况相似。土体渗透性对基础的扭转振动特性有一定影响, 其振动特性受孔隙水的影响, 在渗透性较好的情况下影响较大, 随渗透性的减小, 饱和土地基中的扭转振动逐渐接近于弹性介质的情况。

(2) 随基础扭转惯性矩的增加, 基础的振幅增加, 共振现象更加明显, 同时共振频率减小。当基础刚度较小时, 共振频率减小迅速, 而后减小趋势逐渐平缓。

(3) SH 波入射角度对基础的扭转振动有较大影响。当 SH 波垂直入射时, 基础不发生扭转振动, 随 SH 波趋于水平入射的状况, 基础的振幅增加, 共振现象更为明显, 但共振频率保持不变。

参考文献:

[1] 陈龙珠, 陈胜立. 饱和地基上刚性基础的竖向振动分析[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(4): 392 - 397. (CHEN Long-zhu, CHEN Sheng-li. Vertical vibration of a rigid circular footing on saturated soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, 21(4): 392 - 397. (in Chinese))

[2] 蔡袁强, 胡秀青. 饱和地基中埋置刚性圆柱基础的等效竖向动力刚度[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(2): 361 - 367. (CAI Yuan-qiang, Hu Xiu-qing. Equivalent vertical dynamic stiffness for embedded rigid cylindrical foundation in saturated soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(2): 361 - 367. (in Chinese))

[3] WANG G C, CHEN L Z. Torsional oscillation of a rigid disc

- resting on an infinite saturated elastic layer[J]. *Mechanics Research Communications*, 2005, **32**: 454 - 462.
- [4] 吴大志, 蔡袁强, 徐长节, 等. 横观各向同性饱和地基上刚性圆板的扭转振动[J]. *应用数学与力学*, 2006, **27**: 1349 - 1356. (WU Da-zhi, CAI Yuan-qiang, XU Chang-jie, et al. Torsional vibrations of a rigid circular plate on transversely isotropic saturated soil[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**: 1349 - 1356. (in Chinese))
- [5] 吴大志, 蔡袁强, 徐长节, 等. 下卧基岩横观各向同性饱和地基上刚性圆板的扭转振动[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2006, **40**: 281 - 284. (WU Da-zhi, CAI Yuan-qiang, XU Chang-jie, et al. Torsional vibrations of rigid disk plate on transversely isotropic saturated soil overlaying bedrock[J]. *Journal of Zhejiang University(Engineering Science)*, 2006, **40**: 281 - 284. (in Chinese))
- [6] KOBORI T, MINAI R, SHINOZAKI Y. Vibration of a rigid circular disc on an elastic half-space subjected to plane waves[J]. *Theoretical and Applied Mechanics*, 1973, **21**: 109 - 119.
- [7] KOBORI T, MINAI R, SHINOZAKI Y. Vibration of a rigid circular disc on an elastic half-space subjected to plane waves(Part 2)[J]. *Theoretical and Applied Mechanics*, 1976, **24**: 153 - 167.
- [8] LUCO JE. On the relation between radiation and scattering problems for foundations embedded in an half-space[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1986, **5**(2): 97 - 101.
- [9] LUCO JE, MITA A. Response of a circular foundation on a uniform half-space to elastic waves[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1987, **15**: 105 - 118.
- [10] 梁建文, 严林隽. 圆弧形沉积河谷场地在平面 P 波入射下的响应[J]. *岩土力学*, 2001, **22**(2): 138 - 143. (LIANG Jian-wen, Yan Lin-yong Response of circular-arc alluvial valleys under incident plane P waves[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2001, **22**(2): 138 - 143. (in Chinese))
- [11] TODOROVSKA MI, RJOUB YA. Plain strain soil-structure interaction model for a building supported by a circular foundation embedded in a poroelastic half-space[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2006, **26**: 694 - 707.
- [12] LU Jian-fei, JENG Dong-sheng, LEE Tsung-lin. Dynamic response of a piecewise circular tunnel embedded in a poroelastic medium[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2007, **27**: 875 - 891.
- [13] 周香莲, 周光明, 王建华. 饱和土中圆形衬砌结构对弹性波的散射[J]. *岩石力学与工程学报*, 2005, **24**: 1572 - 1576. (ZHOU Xiang-lian, ZHOU Guang-ming, WANG Jian-hua. Scattering of elastic wave by circular cavity with lining in saturated soil[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, **24**: 1572 - 1576. (in Chinese))
- [14] BIOT MA. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956a, **28**(2): 168 - 178.
- [15] BIOT MA. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. High frequency range[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, **28**(2): 179 - 191.
- [16] PAO Y H, CHAO C M. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations[M]. 1973.
- [17] HUANG W, WANG YJ, Rokhin SI. Obliquely scattering of an elastic wave from a multilayered cylinder in a solid. Transfer matrix approach[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, **99**(5): 2742 - 2754.
- [18] NOBEL B. The solution of Bessel-function dual integral equations by a multiplying-factor method[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1963, **59**: 351 - 362.
- [19] RICHART FE, WOODS RD. Vibrations of soils and foundations[M]. Prentice-hall, Englewood Cliffs, 1970.
- [20] LUCO JE. Torsional response of structures to obliquely incident seismic SH waves[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1976, **4**: 207 - 219.