



# 软土路基全过程沉降预测的 Logistic 模型应用研究

朱志铎<sup>1</sup>, 周礼红<sup>2</sup>

(1. 东南大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210096; 2. 华东电力设计院, 上海 200331)

**摘要:** 通过大量观测数据分析, 研究了高速公路软土地基沉降曲线发展规律, 沉降历时曲线一般经过发生、发展、稳定后达一定极限, 其表现形式符合成长曲线的基本形式。建立软土路基全过程沉降预测的 Logistic 模型, 确定了模型中各参数含义, 分析了各参数对地基沉降不同阶段的影响、应用范围及其在实践中的指导意义。给出模型的求解方式, 讨论了模型预测效果, 工程实例预测结果表明所建立模型具有科学性和适用性。

**关键词:** 软土; 路基; 沉降预测; Logistic 模型

中图分类号: TU434

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2009)06-0965-05

**作者简介:** 朱志铎(1963-), 男, 副教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程的教学与科研工作。E-mail: zhuzhiduo63@sohu.com。

## Application of Logistic model in settlement prediction during complete process of embankment construction<sup>2</sup>

ZHU Zhi-duo, ZHOU Li-hong

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China; 2. East China Electric Power Design Institute, Shanghai 200331, China)

**Abstract:** A large number of settlement observation data are analyzed and the laws of the development of settlement-time curve measured are studied. The settlement-time curve show the occurrence, development, stability, and then the limit of a certain form and that the form accords with the basic form of the growth curve. The entire process of settlement prediction model is established and the meaning of the parameters is analyzed. The influence of various parameters at different settlement stages and the application scope and its guiding significance in practice are analyzed. The evaluation of the model is ideal and the predicted results of several project examples show that the present model is scientific and applicable.

**Key words:** soft soil; embankment; settlement prediction; Logistic model

## 0 引言

在高速公路的不同施工阶段中, 为了保证路基的稳定, 需要对路基的沉降进行预测, 以指导工程施工。目前, 沉降预测的方法主要分为三类: ①基于太沙基固结理论的分析方法; ②结合土的本构模型, 采用 Biot 固结理论进行数值分析的方法<sup>[1]</sup>; ③根据实测沉降数据推算沉降与时间的发展关系, 以预测未来的沉降量。因固结理论、本构模型与工程实际存在一定的差距, 使得理论计算的不同时间阶段的沉降与实测结果难以一致, 且地基沉降多属于三维问题, 实际情况往往比较复杂, 所以利用实测沉降观测资料推算后期沉降(包括最终沉降)有着重要意义。

根据实测资料预测地基沉降常用的方法是假定地基沉降服从某种数学模型, 利用实测数据样本动态的确定模型中的待定参数, 从而预测未来的沉降量和最

终沉降量。这类数学模型主要有两种, 一是预测全过程的数学模型, 有成长曲线模型<sup>[2]</sup>、Weibull 模型等; 二是预测工后沉降的数学模型, 以对数模型、双曲线模型为代表。成长曲线一般有逻辑斯蒂(Logistic curve)曲线方程和龚帕斯(Gompertz curve)曲线方程。本文采用逻辑斯蒂全过程的沉降预测模型预测沉降量, 并通过工程实例验证该模型的科学性和合理性。

## 1 成长曲线及 Logistic 模型

### 1.1 沉降曲线特征

图 1 是典型的高速公路软土地基实测沉降曲线, 从图 1 可以看出, 沉降变形基本经历了发生—发展—稳定—极限的过程, 呈现反 S 型曲线特征。沉降曲线

具有以下共性：①沉降有界性，当时间趋于无穷时，沉降量趋于定值；②单调递增性，随着时间的推延，沉降增加；③存在反弯点，曲线呈现反 S 型。

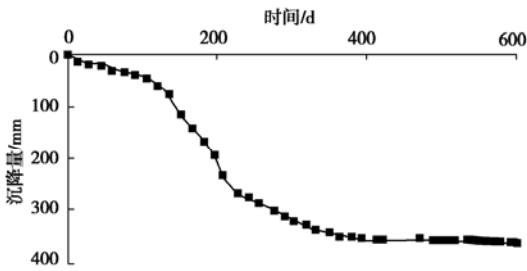


图 1 高速公路软土地基典型的沉降历时曲线

Fig. 1 Typical settlement-time curve of embankment on free way

宰金珉<sup>[3-4]</sup>等认为，成长曲线反映的事物发生、发展、成熟然后到达一定极限的过程和路基荷载逐步施加与对应的沉降逐步发生的过程十分相似。对于这一结论的证明，目前的研究可以归纳为两个方面：一是从一维固结理论出发，证明在线性加载或近似线性加载情况下，沉降 - 时间曲线呈反 S 型<sup>[5]</sup>；二是从本构关系出发，利用应力 - 应变关系，证明在线性加载或近似线性加载情况下，沉降 - 时间曲线呈反 S 型<sup>[6]</sup>。在沉降初期，沉降曲线呈现典型的反 S 形，有典型的成长过程。成长曲线模型所反映的沉降过程与地基沉降随路基填筑过程中分阶段施加荷载而逐渐发生的过程是一致的，它同时也具有地基初期沉降曲线的一些典型特征，如单调性、有界性等。

1.2 模型的建立

根据沉降曲线的基本特征，在前人研究分析的基础上，建立沉降曲线的成长模型（以下简称 L-模型），

$$S_t = \frac{A_1 - A_2}{1 + (t/t_0)^p} + A_2 \quad (1)$$

式中， $S_t$  为  $t$  时刻对应的沉降量预测值， $A_1, A_2, p, t_0$  为待定参数，各参数含义在下文分析中分别说明。

该模型在图形上呈现反 S 形，并具有良好的适用性。图 2 给出了  $A_1=10, A_2=260, p=3, t_0=25$  和  $A_1=10, A_2=260, p=3, t_0=100$  时的预测模型曲线。

(1) 当  $t=0$  时， $S=A_1 \neq 0$ ，即图形不经过原点。对饱和土，在荷载作用下立即发生瞬时沉降，变形是在体积不变情况下由剪应变而产生；对非饱和土，荷载施加后，空隙中的气体可压缩，土骨架可变形，开始时荷载由骨架、水和气三者来承担，随着水和气的排出，骨架进一步压缩，水和气的应力逐渐转移到骨架，这表现在沉降过程曲线上呈现出一个瞬时的沉降。

(2) 当  $t \rightarrow \infty$  时， $S=A_2$ ， $A_2$  为反映最终沉降量的参数，决定于软土特性和加荷量等条件。

(3) 当  $t=t_0$  时， $S=(A_1 + A_2)/2$ ，可认为地基加

载到某一阶段时，地基固结度与软土特性和施加的荷载大小等相关。

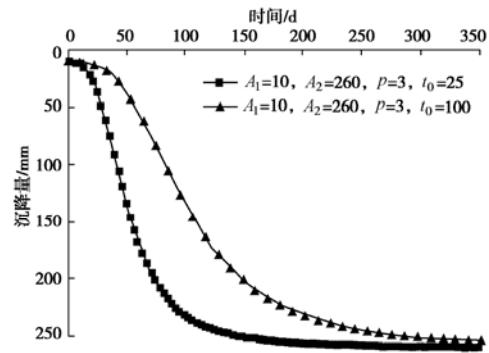


图 2 L-模型沉降曲线

Fig. 2 Settlement-time curve of L-model

(4) 将式 (1) 对时间  $t$  求导，得

$$\dot{S} = - \frac{(A_1 - A_2) p \left(\frac{t}{t_0}\right)^{p-1}}{t_0 \left(1 + \left(\frac{t}{t_0}\right)^p\right)^2} \quad (2)$$

由图 3 可以看出， $\dot{S} > 0$ ，表明沉降随时间始终是增加的，沉降速率呈现初期增加较快，最后趋于 0 的特征。 $\dot{S}$  曲线性状特征与实际观测结果相符，也反映了成长曲线自身的特点。

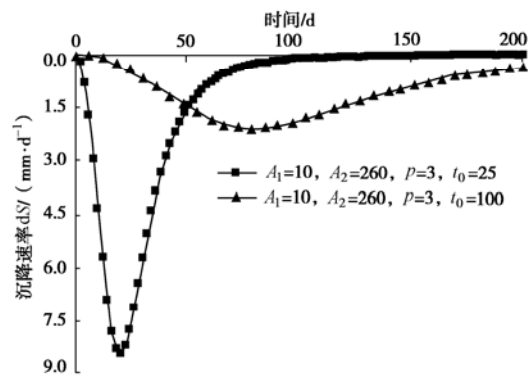


图 3 沉降速率随时间变化的曲线

Fig. 3 Variation of settlement speed with time

当  $t_0=25$  d， $dS_{MAX}=8.4$  mm/d； $t_0=100$  d， $dS_{MAX}=2.1$  mm/d。由图 3 中二曲线形状的比较表明，在软基条件、施工条件、地基处理条件相当的情况下， $t_0$  越大，路基填筑加载期内最大日沉降速率越小。

(5) 将式 (1) 对时间  $t$  求二阶导，得

$$\ddot{S} = (A_1 - A_2) \left[ \frac{(-1+p)p \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2+p}}{\left(1 + \left(\frac{t}{t_0}\right)^p\right)^2 t_0^2} + \frac{2p^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2+2p}}{\left(1 + \left(\frac{t}{t_0}\right)^p\right)^3 t_0^2} \right] \quad (3)$$

S 二阶导反映了沉降速率的增长情况, 由图 4 可以看出:

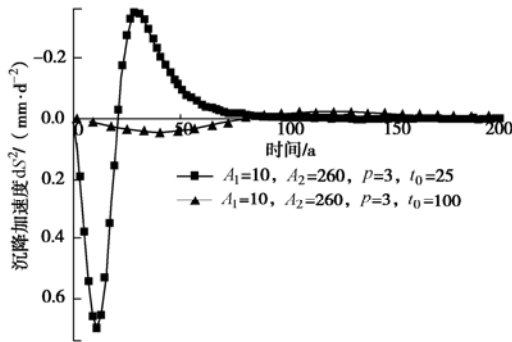


图 4 沉降加速度随时间变化的曲线

Fig. 4 Variation of settlement acceleration with time

- a) 当  $t = [(p-1)/2p]^{\frac{1}{p}} t_0$  时,  $\ddot{S} = 0$ , 与  $\dot{S}$  曲线性状对应, 此时  $\dot{S}$  达到最大值, 沉降曲线上出现为反弯点;
- b) 当  $t < [(p-1)/2p]^{\frac{1}{p}} t_0$  时,  $\ddot{S} > 0$ , 即在区间  $(0, [(p-1)/2p]^{\frac{1}{p}} t_0)$ ,  $\dot{S}$  递增, 且在  $\ddot{S} > 0$  段落, 初期  $\dot{S}$  增加较快, 达到峰值后逐渐减小;
- c) 当  $t > [(p-1)/2p]^{\frac{1}{p}} t_0$  时,  $\ddot{S} < 0$ , 即在区间  $([(p-1)/2p]^{\frac{1}{p}} t_0, \infty)$ ,  $\dot{S}$  递减, 在  $\ddot{S} < 0$  段落, 可以看出  $\dot{S}$  迅速降低, 最终趋于零。

(6) 根据上面的分析, 沉降速率不仅受填筑期时间  $t_0$  取值影响, 同时还受  $p$  值取值的影响。

从图 5 和 6 可以看出:

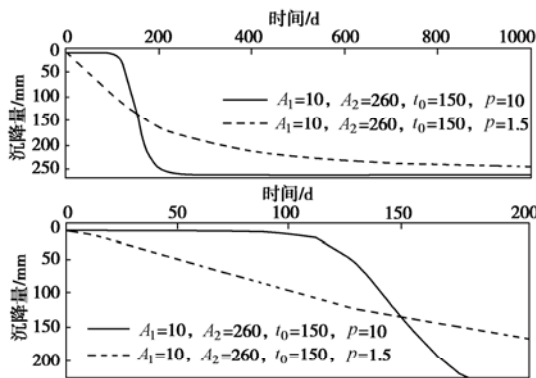


图 5 p 值对 L-模型沉降曲线的影响

Fig. 5 Influence of p on settlement-time curve

(1)  $p$  值对沉降曲线本身的影响主要是软基固结速率问题。通过两个  $p$  值比较, 当  $p=10$  时, 初期沉降速率较小, 当大量荷载传递到软土层时, 沉降速率急剧增加, 达峰值后又迅速降低; 当  $p=1.5$  时, 初期沉降速率即开始急剧增加, 迅速达到峰值, 然后沉降速率缓慢下降, 随时间的延长最终沉降曲线收敛。

(2)  $p$  值的大小影响沉降曲线收敛速度, 不影响最终沉降量<sup>[5-6]</sup>。

当荷载分级施加时, 对 L-模型做同双曲线法预测类似的处理, 得

$$S_t = \sum_{k=1}^n \frac{A_{1k} - A_{2k}}{1 + (t_k/t_{0k})^p} + A_2 \quad (4)$$

式中,  $n$  为加载的总级数,  $k$  为第  $k$  级加载,  $t_k$  为沉降预测时刻到第  $k$  级荷载施加的时间间隔,  $t_{0k}$  为  $k$  级加载时间,  $A_{1k}$  为  $k$  级加载引起地基土的瞬时沉降,  $A_{2k}$  为  $k$  级加载引起地基土的总沉降,  $A_2$  定义同前。

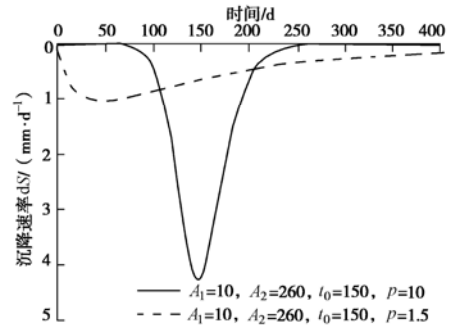


图 6 p 值对 L-模型沉降速率曲线的影响

Fig. 6 Influence of p on settlement speed-time curve

在利用上式进行预测时, 需作如下假定: ①路基填筑分阶段施工, 路基沉降计算深度不变; ②分级加载的各级沉降量可以叠加; ③荷载增量和最终沉降关系惟一。

### 1.3 模型求解

L-模型是非线性模型, 难以直接求解。Origin 软件提供了强大的线性回归和曲线拟合功能, 且用户可自定义拟合函数。本文所提出模型可以在 Origin 软件提供的曲线拟合功能下得以实现, 并给出模型参数。

下面给出一组数据 (表 1) 说明模型求解步骤。

(1) 将已有数据导入 Origin 软件, 生成 worksheep 型数据表格。Origin 软件是 Windows 平台下用于数据分析、项目绘图的软件, 拟合原理是选择对应的曲线

表 1 数据资料

Table 1 Data information

次序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$t/d$	0	29	64	92	123	154	200	244	278	313	338	367	397	427	457	488	519	550
$S/mm$	0	14	18	29	46	88	148	199	213	221	233	236	237	242	243	244	244	244

方程或自定义方程,指定函数变量和参数,进行拟合。

(2) 根据表格数据绘制  $t$ - $S$  散点图,见图 7。

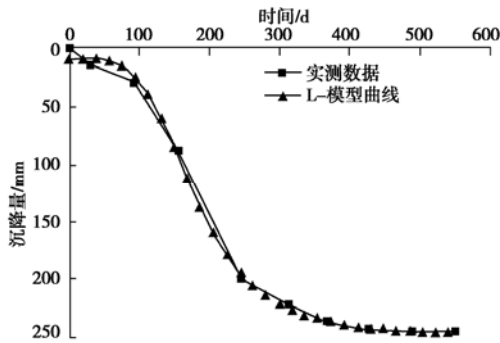


图 7 实测数据和预测曲线

Fig. 7 Measured data and prediction curves

(3) 在散点图中,采用 Analysis 命令下的 Non-line Curve Fit 中的 Advanced fitting tool 工具,在出现的窗口中,选择编辑本文采用的函数模型。

(4) 在新出现的 fitting 窗口中,输入各参数的初始值(亦可可不输,采用多次拟合),最后得到各参数具体值、各参数拟合误差范围、曲线拟合度、方差。根据上面的数据,得到参数值  $A_1 = 8.8$ ,  $A_2 = 247.5$ ,  $p = 4.1$ ,  $t_0 = 179.7$ 。

(5) 根据所得参数代入模型,可得到任意时刻的沉降量。预测模型为

$$S_t = \frac{8.8 - 247.5}{1 + \left(\frac{t}{179.9}\right)^{4.1}} + 247.5 \quad (5)$$

(6) 将已知参数模型对  $t$  求导,求最值,可以得到路堤加载期间最大日沉降速率,用来控制路堤稳定,这一步的求解也可以在 Mathematics 软件输入命令流,得到  $dS_{\max} = 1.4 \text{ mm/d}$ 。

(7) 采用 L-模型预测时,通过调整  $t_0$  值,可以用来调整施工加载时间。

### 1.4 模型效果分析

表 1 给定的数据资料中,实际观测次数共 18 次,现取第 1-8 次,1-13 次,1-18 次三类预测,即在 244 d, 397 d, 550 d 内的观测数据下分别采用 L-模型预测,比较预测效果,结果见图 8 所示。

从统计结果(表 2)可以看出,如果只从实测数据进行预测,8 点预测和实测沉降差别较大,13 点预测和 18 点预测和实际结果接近。这说明当实际观测数据较少,不足以满足模型特征时,预测精度不高,取 13 点或 18 点时,预测精度能较好的满足要求,由此可看出,要取得良好的预测效果必须要有足够的实测数据作为基础。

13 点和 18 点预测的加载时间和实际情况接近,

所以在施工条件确定的情况下,如果已经确定了填筑期的最终时间,可根据前面的观测数据,给定参数  $t_0$  的值,如此可以提高预测精度。反之,亦可根据预测结果,调整填筑速度。

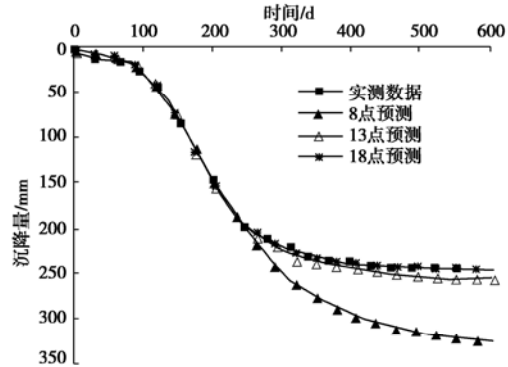


图 8 预测效果分析图

Fig. 8 The analysis of prediction effect

表 2 沉降预测效果分析

Table 2 Analysis of predicted results

类别	模型拟合参数				实际填筑期/d	沉降量误差/%
	$A_1$	$A_2$	$t_0$	$p$		
8 点	8.32	336.94	220.37	3.25		38.09
13 点	10.69	250.40	182.70	4.20	180	1.41
18 点	10.69	247.40	182.70	4.20		1.39

## 2 工程应用评价

对采用堆载预压和水泥土搅拌桩处理软土地基的不同阶段分别进行对数曲线法、双曲线法和 L-模型沉降预测,结果如图 9 和 10。

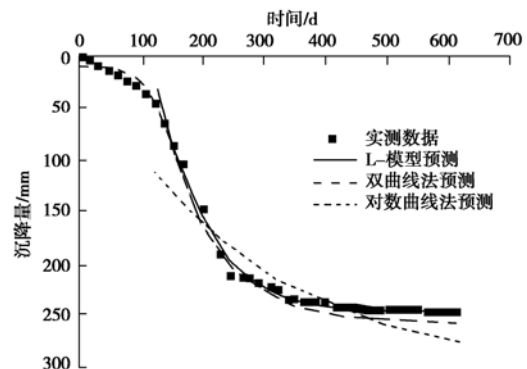


图 9 堆载预压段落沉降预测

Fig. 9 Predicted settlement of embankment with pre-loading

图 9 和 10 中的沉降预测曲线表明,堆载预压法下沉降稳定相对于水泥土搅拌桩处理下地基的沉降稳定慢,因此 L-模型预测优势明显,而对数曲线和双曲线预测法的优势在于沉降曲线稳定后预测,对堆载阶段中的施工指导作用不够明显。L-模型沉降预测不仅能够预测后阶段的发展趋势,而且能够实现全过程的沉

降预测, 可以比较好地指导工程施工。

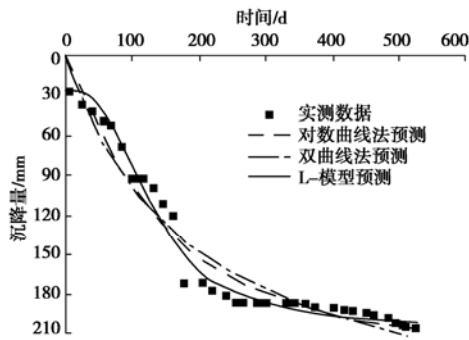


图 10 水泥土搅拌桩段落沉降预测

Fig. 10 Predicted settlement of embankment with cement mixing column

在路基填筑分阶段施工中, 当前后两级荷载相差较大, 沉降有一定的突变, 沉降曲线有明显的台阶现象时, 可以使用 L-模型进行预测。图 11 为天然地基堆载预压段落实测沉降, 在施工过程中因工程需要分级加载, 一级加载高度至 1.3 m, 二级加载高度至 2.2 m, 实测点的数据呈现台阶状。采用常用的预测方法拟合此类曲线形状, 拟合度较差, 精度不高, 采用 L-模型进行预测时, 可以在 Origin 软件中方便实现。

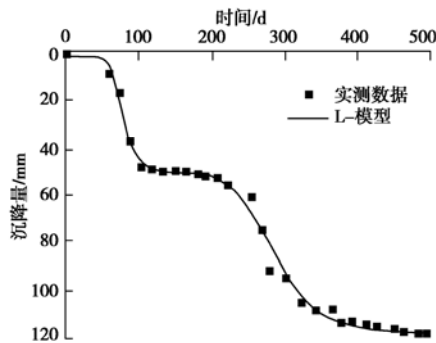


图 11 堆载预压段落分阶段施工沉降预测

Fig. 11 Predicted settlement of embankment with stage construction

### 3 结 论

(1) 沉降历时曲线一般经过发生、发展、稳定, 而后达一定极限, 表现形式符合成长曲线的基本形式。

(2) 从软土路基沉降曲线的基本特征出发, 建立沉降预测的 L-模型, 分析了模型中各参数含义及工程意义, 给出模型的求解方式。

(3) 对预测结果分析, L-模型预测对沉降有较好的预测精度, 实测沉降曲线和预测曲线不但在形式上

比较吻合, 而且在沉降的起始端和结束端都相对接近。与对数曲线、双曲线法相比较, L-模型能够实现沉降全过程及分阶段加载的沉降预测。

(4) 不同地基处理方式的沉降与时间关系曲线表现形式不尽相同, L-模型能够拟合具体的实际情况。

(5) 若要得到一定精度的沉降预测值, 需给出一定数量的实测数据, 用于拟合的实测数据越多, 预测结果越精确。

#### 参考文献:

- [1] KARIM M R. Analysis of Biot's consolidation using element free galerkin method[D]. Singapore: National University of Singapore. 2000: 1 - 98.
- [2] GOMPertz B. On the function expressive of the law of human mortality and on a new method of determining the value of life contingencies[M]// Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 1825: 513 - 585.
- [3] 宰金珉, 梅国雄. 成长曲线在地基沉降预测中的应用[J]. 南京建筑工程学院学报, 2000, 53(2): 9 - 12. (ZAI Jin-min, MEI Guo-xiong. Poission curve application to forecast the setting of foundation[J]. Journal of Nanjing Architectural and Civil Engineering Institute, 2000, 53(2): 9 - 12. (in Chinese))
- [4] 赵明华, 刘 熠, 曹文贵. 软土地基沉降变权重组合 S 型曲线预测方法研究[J]. 岩土力学, 2005, 26(9): 1443 - 1447. (ZHAO Min-hua, LIU Yi, CAO Wen-gui. et al. Study on variable-weight combination forecasting method of S-type curves for soft clay embankment settlement[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(9): 1443 - 1447. (in Chinese))
- [5] 刘子彤, 梅国雄, 宰金珉, 等. 沉降 - 时间曲线呈“S”形的证明—从一维固结理论角度[J]. 南京工业大学学报, 2003, 25(5): 1 - 3. (LIU Zi-tong, MEI Guo-xiong, ZAI Jin-min. Proof of s-t curve appearing “S” shape based on one-dimensional consolidation[J]. Journal of Nanjing University of Technology, 2003, 25(5): 1 - 3. (in Chinese))
- [6] 梅国雄, 宰金珉, 等. 沉降 - 时间曲线形态证明及其应用 [J]. 南京工业大学学报, 2003, 25(4): 6 - 8. (MEI Guo-xiong, ZAI Jin-min, et al. Proof of s-t curve appearing “S” shape and its application[J]. Journal of Nanjing University of Technology, 2003, 25(4): 6 - 8. (in Chinese))