

岩土体非线性分析的数值流形方法

周小义, 邓安福

(重庆大学土木工程学院, 重庆 400045)

摘要: 目前数值流形方法的模拟分析主要是采用线弹性模型, 而对于非线性模型分析研究很少。根据数值流形方法的特点和岩土体的本构模型, 给出了适用于非线性分析的数值流形方法的计算方法。该方法利用中点增量法进行求解, 以改变 Duncan-Chang 模型中弹性模量的方式来反映非线性, 其实质是用分段线性来取代非线性。最后通过算例表明, 数值流形方法在岩土体进行非线性分析中是有效的。

关键词: 数值流形方法; 非线性分析; Duncan-Chang 模型; 中点增量法

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2009)02-0298-05

作者简介: 周小义(1979-), 男, 河南南阳人, 博士, 主要从事岩土工程研究。E-mail: zhouxiaoyi2005@126.com。

Numerical manifold method of nonlinear analysis for rock and soil mass

ZHOU Xiao-yi, DENG An-fu

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: The linear elastic model is mostly adopted for analysis in the numerical manifold method, but the nonlinear model is scarcely studied. Based on the characteristics of the numerical manifold method and constitutive models of rock and soil mass, the formula of numerical manifold method for nonlinear analysis is presented. The elastic modulus of Duncan-Chang model is modified to describe the nonlinear relationship by use of the midpoint incremental method, in fact, the subsection linear relationship is substituted for the nonlinear relationship. Finally, the validity of nonlinear analysis for rock and soil mass is proved.

Key words: numerical manifold method; nonlinear analysis; Duncan-Chang model; midpoint incremental method

0 引言

数值流形方法是在非连续变形分析方法的基础上发展的, 应用现代数学一流形的覆盖技术, 将连续体的有限单元法、不连续变形分析方法和解析方法统一起来的计算方法^[1]。这一方法能统一地处理连续介质和不连续介质的力学问题, 在岩土工程中具有较好的发展前景^[2-9]。同时, 数值流形方法也是一个新型的数值计算方法, 其理论体系和分析手段需要逐步的完善和发展。

非线性是岩土体的一个重要力学特性, 其数学模型也是岩土工程数值方法分析中常用的本构模型。然而, 目前数值流形方法的问题模拟分析主要是采用线弹性分析, 对于非线性分析和弹塑性分析极少^[10-11], 因此, 本文对非线性分析的数值流形方法进行探讨。在前人研究的基础上, 给出了适用于非线性分析求解的数值流形方法的一种计算方法, 利用中点增量法以改变弹性常数的方式来反映非线性, 计算分析时把非线性问题近似为分段线弹性进行模拟, 以便较好的接

近实际工程情况, 并给出算例以验证本文算法在岩土体中进行非线性分析的可行性。

1 覆盖位移函数

在数值流形方法中, 覆盖位移函数是建立在物理覆盖上, 且对各个物理覆盖独立定义的。它的构造形式很多, 可以是常数、线性、高阶多项式或局部定义的级数, 目前一般采用各级的完全多项式。对二维计算, 可定义在任意物理覆盖 U_i 上覆盖位移函数通常表示为

$$\begin{Bmatrix} u_i(x, y) \\ v_i(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} s_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & s_{ij}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,2j-1} \\ d_{i,2j} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$(u_i(x, y), v_i(x, y), (x, y) \in U_i)$

式中, $d_{i,2j}$ 为物理覆盖自由度, 是待求的未知量。对应于 0, 1, 2 阶覆盖函数, m 分别为 1, 3, 6; s_{ij} 为覆盖位移函数的基本级数, 如一阶情况下通常表示为

基金项目: 交通部西部交通建设科技项目(2002-318-000-26)

收稿日期: 2008-01-10

$\{1, x, y\}$ 。

假定任一流形单元上有 q 个物理覆盖, 则其流形单元的覆盖位移函数表达式为

$$\begin{Bmatrix} u_e(x, y) \\ v_e(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} w_i(x, y) s_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & w_i(x, y) s_{ij}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,2j-1} \\ d_{i,2j} \end{Bmatrix} \\ = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m [T_{ej}(x, y)] \{D_{ej}\} = \sum_i [T_{ei}(x, y)] \{D_{ei}\}, \quad (2)$$

式中, $w_i(x, y)$ 为权函数,

$$\begin{cases} w_i(x) \geq 0 & (x \in U_i) \\ w_i(x) = 0 & (x \notin U_i) \end{cases}, \quad (3)$$

在 n 个覆盖重叠的区域内

$$\sum_{i=1}^n w_i(x) = 1. \quad (4)$$

式(2)中, $[T_{ei}(x, y)]$ 为流形单元的物理覆盖 U_{ei} 对应的位移矩阵, 表示为

$$[T_{ei}(x, y)] = [T_{ei1}(x, y), \dots, T_{eim}(x, y)] \quad (5)$$

$$[T_{ej}(x, y)] = \begin{bmatrix} w_i(x, y) s_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & w_i(x, y) s_{ij}(x, y) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

2 本构模型在数值流形方法中的应用

岩土体的本构模型主要包括有线弹性模型、非线性弹性模型和弹塑性模型等^[12-13]。

(1) 线性弹性模型是根据胡克定律假设材料的应力与应变成正比, 强度是无限的; 适用于安全系数较大, 不发生屈服的情况。其为目前数值流形方法分析计算多数采用的本构模型, 在文献[1~9]中均是如此。

(2) 弹塑性模型把岩土体介质的变形分成弹性和塑性变形两部分, 分别用胡克定律和塑性理论来计算。

如果分析体系共有 N_e 个流形单元, 对系统的能量泛函进行变分可得平衡方程为

$$K_{ep} \Delta D = \Delta R, \quad (7)$$

式中, K_{ep} 为弹塑性流形分析的刚度矩阵,

$$K_{ep} = \sum_{m=1}^{N_e} \left(\int_{\Omega_m} B_m^T D_{ep} B_m \right), \quad (8)$$

ΔD 为覆盖总自由度, ΔR 为外荷载增量矩阵, D_{ep} 为弹塑性矩阵。

根据塑性变形的假定, 在相关联的流动规则下其对应的弹塑性矩阵由应力状态确定。而在数值流形方法中当覆盖上采用高阶的覆盖函数时, 流形单元上的应力状态不为常量, 而是坐标的函数, 所以无法对某一个流形单元确定相应的 D_{ep} 的值, 使在建立平衡方程时不能得到严格的进行积分计算。

王书法等采用参变量变分原理建立了弹塑性分析

的数值流形方法, 该方法在弹塑性问题的分析中有很大的先进性。但在该方法中, 以流动参数作为参变量仍视为常量, 不参与变分, 其刚度矩阵始终是弹性刚度矩阵^[10]。

因强化矩阵、塑性势矩阵等都是根据应力状态确定的, 当流形单元为非常应力单元且单元的积分采用单纯形积分时, 此类相关矩阵仍将是无法确定的, 所以该方法同样不能应用于高阶的流形方法, 而只能应用于 0 阶覆盖函数的情况。

(3) 非线性弹性模型假定变形也是弹性的, 与线性弹性模型不同的是, 包含在矩阵中的弹性常数 (E, μ) 或 (K, G) 不再视为常量, 而是看做随应力状态而改变的变量。

在非线形计算模型中, 最有代表性的是 Duncan-Chang 模型, 它也是国内外应用很广泛的一种实用岩土模型。其概念浅显, 推导简洁, 模型参数易于通过土工试验测定且积累了较丰富的数值经验, 具有深厚的解决工程实际问题的背景^[12]。因此, 笔者选择该模型作为数值流形方法非线性分析的计算模型。这里简要说明一下 Duncan-Chang 模型的弹性模量。

切线变形模量的表达式为

$$E_t = \left[1 - \frac{R_f (1 - \sin \varphi) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \right]^2 K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n, \quad (9)$$

式中, R_f 为破坏比, c, φ 分别为黏聚力和摩擦角, K, n 分别为模量数和模量指数, p_a 为大气压力。

切线泊松比的表达式为

$$\mu_t = \frac{G - F \lg \frac{\sigma_3}{p_a}}{p_a} \left[1 - \frac{D(\sigma_1 - \sigma_3)}{K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \left[1 - \frac{R_f (1 - \sin \varphi) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \right]} \right]^2, \quad (10)$$

式中, F, G 和 D 是与切线泊松比相关无量纲参数。

3 非线性分析的数值流形方法

非线性问题的求解方法有迭代法和增量法两种。

朱以文等基于总体拉格朗日列式, 建立了大变形分析的增量流形方法, 来模拟具有节理、裂隙的岩石大变形问题。在此方法中, 实际上进行非线性求解的修正迭代法^[11]。由于本文中采用本构模型为 Duncan-Chang 模型, 进行非线性分析时适于增量法求解。

根据增量法的基本思想, 在利用其进行非线性数值流形方法分析时, 每级荷载增量计算中弹性模量作为定值, 以弹性分析计算; 而在不同级荷载增量计算

中,弹性模量是不同的,刚度矩阵发生变化,从而实现用数值流形方法来反映非线性的本构关系,同时也可以避免在数值流形方法弹塑性分析中当流形单元为非常应力单元的情况下相关矩阵无法确定的问题。

中点增量法是一种常用的修正增量法,该方法用某级荷载下的平均应力所对应的刚度矩阵进行计算。

假定初始平衡状态下,初始荷载、初始位移、初始应变和初始应力分别为 $\{R_0\}$, $\{\delta_0\}$, $\{\varepsilon_0\}$ 和 $\{\sigma_0\}$ 。将总荷载分成 M 个增量,表示为

$$\{R\} = \{R_0\} + \sum_{j=1}^M \{\Delta R_j\}, \quad (11)$$

因此,施加了第 i 级荷载增量以后,荷载为

$$\{R_i\} = \{R_0\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta R_j\}, \quad (12)$$

则第 i 级加载之后,位移、应变和应力为

$$\left. \begin{aligned} \{\delta_i\} &= \{\delta_0\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta \delta_j\}, \\ \{\varepsilon_i\} &= \{\varepsilon_0\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta \varepsilon_j\}, \\ \{\sigma_i\} &= \{\sigma_0\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta \sigma_j\}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

作为数值流形方法的非线性分析算法,在第 i 级荷载增量 $\{\Delta R_i\}$ 情况下,其求解步骤分以下6步。

(1) 施加荷载增量 $\{\Delta R_i\}/2$, 计算临时位移增量 $\left[\Delta \delta_{i-\frac{1}{2}}^*\right] \left[K_{i-1}\right] \left\{\Delta \delta_{i-\frac{1}{2}}^*\right\} = \{\Delta R_i\}/2$ 。得到相应的增量

中点处临时位移总量为 $\left\{\delta_{i-\frac{1}{2}}^*\right\} = \left\{\delta_{i-1}\right\} + \left\{\Delta \delta_{i-\frac{1}{2}}^*\right\}$ 。

(2) 根据临时位移总量 $\left[\delta_{i-\frac{1}{2}}^*\right]$ 及应力-应变关系求得中点刚度矩阵 $\left[K_{i-\frac{1}{2}}\right]$ 。

(3) 施加全荷载增量 $\{\Delta R_i\}$, 计算位移增量 $\left[K_{i-\frac{1}{2}}\right] \{\Delta \delta_i\} = \{\Delta R_i\}$ 。

(4) 求得应力增量 $\{\Delta \sigma_i\}$ 和应变增量 $\{\Delta \varepsilon_i\}$ 。

(5) 根据式(13), 求得相应的位移总量 $\{\delta_i\}$ 、应变总量 $\{\varepsilon_i\}$ 和应力总量 $\{\sigma_i\}$ 。

(6) 根据应力总量 $\{\sigma_i\}$ 求出主应力; 把得到的

主应力 σ_1, σ_3 回代到 Duncan-Chang 模型的弹性模量式(9)、(10)中, 进而得出新的切线变形模量 E_i 和切线泊松比 μ_i 。

对各级荷载重复上述步骤, 即可得到最后解答。对于第一级荷载计算时, 刚度矩阵用初始切线常数 E_i, μ_i 建立。

在数值流形方法中, 求解的未知场函数为 $\{\Delta d_i\}$ (即上述 $\{\Delta \delta_i\}$) 并非实际覆盖位移 $\{\Delta u_i\}$, 但它们之间具有如下关系:

$$\{\Delta u_i\} = [s_{ij}] \begin{Bmatrix} \Delta d_{i1} \\ \vdots \\ \Delta d_{im} \end{Bmatrix} = [1, x, y, \dots, x^{2n}, y^{2n}, x^n y^n] \begin{Bmatrix} \Delta d_{i1} \\ \vdots \\ \Delta d_{im} \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

在进行编制程序时, 必需调用上述表达式的函数才能正确的进行求解。如在采用1阶覆盖位移函数时, 调用的函数公式为

$$\Delta u_i = \Delta d_{i1} + x \Delta d_{i2} + y \Delta d_{i3}. \quad (15)$$

在采用2阶覆盖位移函数时调用的函数公式为

$$\Delta u_i = \Delta d_{i1} + x \Delta d_{i2} + y \Delta d_{i3} + x^2 \Delta d_{i4} + y^2 \Delta d_{i5} + xy \Delta d_{i6}. \quad (16)$$

当数值流形方法进行非线性分析时, 它是通过利用增量法分步加载来改变弹性矩阵中的弹性模量从而反映非线性, 其实质是把非线性问题转化为组合线弹性问题, 以分段直线来逼近问题曲线。因此, 本文中提出的非线性数值流形方法分析其刚度矩阵以及平衡方程的建立与线弹性分析时是相同的, 这里就不再作叙述, 详见文献[14]。

4 实例分析

该算例引用于文献[15], 计算模型如图1。试桩长10 m, 锚固深度3.0 m, 断面宽0.8 m, 高1.2 m。岩土体分为三层, 第一层为成都黏土, 厚度为3.3 m, 第二层为雅安砾石层, 厚度为3.7 m, 各材料参数见表1。第三层为泥质页岩, 泥质页岩 $E=6.8 \times 10^{11}$ Pa, $\mu=0.1$, 混凝土 $E=3.1 \times 10^{10}$ Pa, $\mu=0.17$ 试验采用分级加荷, 实际加荷11级, 1~11级平均荷载各对应为29, 54, 73, 105, 127, 154, 170, 192, 217, 249, 278 kN/m。

表1 材料参数

Table 1 The parameters of material

材料	重度 $\gamma/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	内摩擦角 $\varphi/(^{\circ})$	黏聚力 c $/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	破坏比 R_f	模量数 K	模量指数 n	泊松比有关参数		
							G	F	D
成都黏土	19.9	5.6	36	0.908	142	0.6	0.42	0	0
雅安砾石	22	40	15	0.78	1600	1.0	0.35	0	0

计算模型中流形单元划分如图 2 所示, 共 329 个物理覆盖, 92 个流形单元。根据上述提出的求解思想, 计算时采用全一阶覆盖位移函数, 利用中点增量法对算例进行非线性分析, 并对理论计算值与实测值进行分析比较。

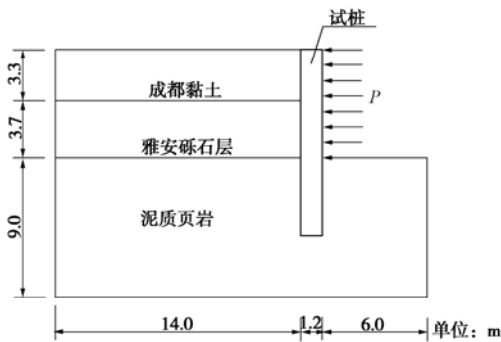


图 1 计算模型示意图

Fig. 1 Sketch map of computational model

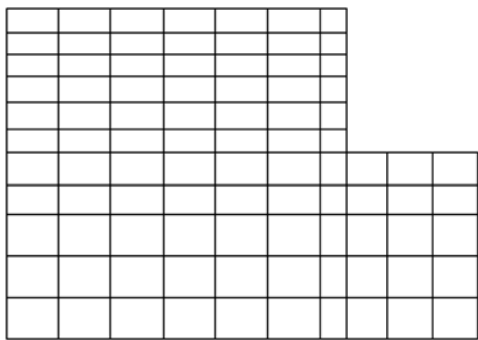


图 2 流形单元示意图

Fig. 2 Sketch map of manifold element

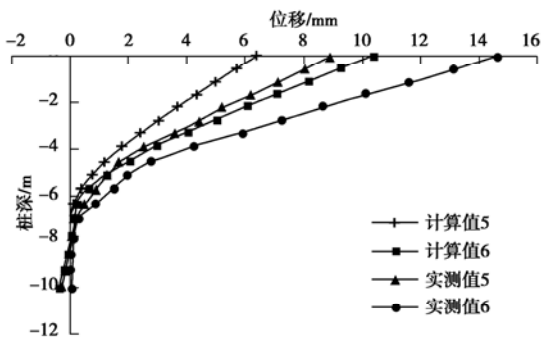


图 3 第 5、6 级荷载桩身位移计算值与实测值

Fig. 3 The calculated and test values of pile at the 5th and 6th load stages

在第 5、6 级荷载作用下, 桩身位移计算值与实测值如图 3 所示, 由图看出计算值与实测值沿桩身变化规律相同。

不同荷载作用下, 试桩桩顶位移的计算值与实测值如图 4 所示。

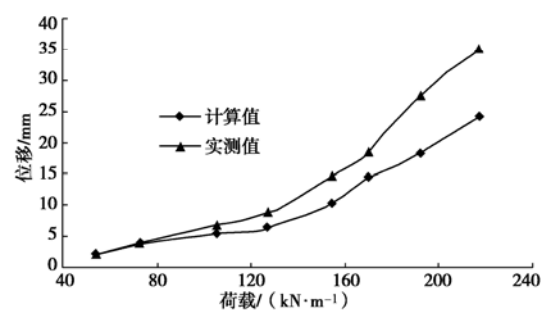


图 4 桩顶位移 - 荷载曲线

Fig. 4 The displacement-load curves of pile top

从上面得到的结果可以看出, 计算值与实际测得的结果较吻合, 说明利用中点增量法进行非线性数值流形方法分析是可行的。由于 Duncan-Chang 模型一般只适用荷载不太大的条件, 因此, 从图 3、4 中也可以看出随着荷载逐步增大计算误差也随之增大。

5 结 论

本文对数值流形方法中采用的几种本构模型进行了阐述, 并给出了适用于非线性分析的数值流形方法的计算方法。

(1) 文中采用 Duncan-Chang 非线性本构模型, 利用中点增量法以改变模型中弹性模型的方式来反映非线性, 为数值流形方法进行非线性分析做一种尝试。

(2) 本质上是用组合线性问题取代非线性问题, 用分段直线逼近曲线, 这样可避免在数值流形方法弹塑性非线性分析中出现当应力状态为坐标函数的情况下与塑性变形部分求解相关矩阵无法确定的问题。

(3) 由于在同一荷载步求解计算时, 弹性矩阵假定为常数矩阵, 因此, 可适用于任意阶数的数值流形方法求解。

参考文献:

[1] SHI G H. Manifold method of material analysis[C]// Transaction of the Ninth Army conference on applied mathematics and computing, Minneapolis, 1991: 51 - 76.

[2] LI S, CHENG Y, WU Y F. Numerical manifold method based on the method of weighted[J]. Computational Mechanics, 2005, 35(6): 470 - 480.

[3] CHENG Y M, ZHANG Y H, CHEN W S. Wilson non-conforming element in numerical manifold method[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2002, 18(12): 877 - 884.

[4] 王芝银, 李云鹏. 数值流形方法中的几点改进[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(6): 33 - 36. (WANG Zhi-yin, LI Yun-peng. Some improvements in the numerical manifold method[J].

- Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, **20**(6): 33 - 36. (in Chinese))
- [5] 王水林, 葛修润. 数值流形方法在模拟裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, **16**(5): 405 - 410. (WANG Shui-lin, GE Xiu-run. Application of manifold method in simulating crack propagation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1997, **16**(5): 405 - 410. (in Chinese))
- [6] 曹文贵, 速宝玉. 岩体锚固支护的数值流形方法模拟及其应用[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(5): 581 - 583. (CAO Wen-gui, SU Bao-yu. Simulation of numerical manifold method for supports by reinforced bolt and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(5): 581 - 583. (in Chinese))
- [7] 邓安福, 朱爱军, 曾祥勇. 高低阶覆盖函数混合的数值流形方法[J]. 土木工程学报, 2006, **39**(1): 75 - 78. (DENG An-fu, ZHU Ai-jun, ZENG Xiang-yong. The numerical manifold method using low-high cover functions[J]. China Civil Engineering Journal, 2006, **39**(1): 75 - 78. (in Chinese))
- [8] 朱爱军, 邓安福, 曾祥勇. 数值流形方法对岩土工程开挖卸荷问题的模拟[J]. 岩土力学, 2006, **27**(2): 179 - 183. (ZHU Ai-jun, DENG An-fu, ZENG Xiang-yong. The numerical manifold method for simulation of excavation in geotechnical engineering[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, **27**(2): 179 - 183. (in Chinese))
- [9] 姜清辉, 周创兵. 四面体有限单元覆盖的三维数值流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, **24**(24): 4455 - 4460. (JANG Qing-hui, ZHOU Chuang-bing. Three-dimensional numerical manifold method with tetrahedron finite elements covers[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, **24**(24): 4455 - 4460. (in Chinese))
- [10] 王书法, 朱维申, 李术才, 等. 岩体弹塑性分析的数值流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, **21**(6): 900 - 904. (WANG Shu-fa, ZHU Wei-shen, LI Shu-cai, et al. Numerical manifold method of elastoplastic analysis for rockmass[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, **21**(6): 900 - 904. (in Chinese))
- [11] 朱以文, 曾义林, 陈明祥. 岩石大变形分析的增量流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, **18**(1): 1 - 5. (ZHU Yi-wen, ZENG You-lin, CHEN Ming-xiang. Incremental manifold method in analysis of large deformation for rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, **18**(1): 1 - 5. (in Chinese))
- [12] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 北京: 水利出版社, 1980. (QIAN Jia-huan, YIN Zong-ze. Earthwork principle and calculation[M]. Beijing: Water Resources Press, 1980. (in Chinese))
- [13] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 北京: 水利电力出版社, 1979. (ZHU Bo-fang. Theory of finite element method and its applications[M]. Beijing: Water Resources and Electric Power Press, 1979. (in Chinese))
- [14] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民, 译. 北京: 清华大学出版社, 1997. (SHI Gen-hua. Numerical manifold method and discontinuous deformation analysis[M]. PEI Jue-min, tran. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese))
- [15] 李克才, 池淑兰. 抗滑桩空间非线性有限元分析及设计参数的研究[C]// 滑坡文集(12). 北京, 1997: 18 - 29. (LI Ke-cai, CHI Shu-lan. Three-dimensional nonlinear finite element analysis for antislides test pile[C]// Proceeding of Landslides (12). Beijing, 1997: 18 - 29. (in Chinese))