边坡稳定性分析条分法最小解研究

方玉树
（后勤工程学院，重庆 400041）

摘 要：关于同一个圆弧形滑面边坡稳定系数计算中瑞典法的解是否一定是所有条分法的最小解或在什么条件下一定是最小解的问题，目前还没有答案。通过对简化毕肖普法、斯宾塞法、简化简布法、美国陆军工程师团法、传递系数法与瑞典法稳定系数大小关系的一一论证获得了关于条分法最小解的一些规律性认识。

关键词：边坡；稳定性分析；条分法；最小解；瑞典法
中图分类号：TU411 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－4548(2008)03－0331－05

作者简介：方玉树（1958－ ），男，江西婺源人，教授，国家注册土木工程师（岩土），从事地质灾害防治方面的研究和勘察设计工作。E-mail: fysbxy@yahoo.com.cn。

The lowest solution of slice method for slope stability analysis

FANG Yu-shu
(Logistical Engineering University, Chongqing 400041, China)

Abstract: It has not yet been answered whether the solution of Swedish Method is the the lowest solution or under what condition it is the the lowest solution when the safety factor of the slope with the same circular slip surface is calculated. Some laws of the the lowest solution in the slice method was concluded on the basis of analysis of the relationship of the safety factors among Swedish Method, Simplified Bishop Method, Spencer Method, Simplified Janbu Method, Method of U. S. Army Corps of Engineers and Transmitting Coefficient Method.

Key words: slope; stability analysis; slice method; the lowest solution; Swedish Method

0 引 言

很多算例显示，用不同的条分法计算同一个滑面为圆弧形的边坡稳定系数时，以瑞典法（Swedish Method）的解为最小。有限个算例中存在的这一现象是否是一种普遍规律或在什么条件下是一种普遍规律？目前还没有答案。本文分别借助满足整体力矩平衡方程或满足土条垂直方向和水平方向力平衡方程的条分法稳定系数公式的通用格式对简化毕肖普法（Simplified Bishop Method）、斯宾塞法（Spencer Method）、简化简布法（Simplified Janbu Method）、美国陆军工程师团法、传递系数法与瑞典法在同一个圆弧形滑面情况下的稳定系数大小关系进行了一一论证，在此基础上总结出关于条分法最小解的一些规律性认识；最后还对在土坡无水压力、无地震力和外加荷载、各土条条间力方向相同的条件下瑞典法稳定系数最小的现有证明之无效做了说明。

1 条分法稳定系数公式的两类通用格式及其分析

1.1 满足整体力矩平衡方程的条分法稳定系数公式的通用格式及其分析

条分法涉及的静力平衡方程包括整体力矩平衡方程和各土条垂直方向和水平方向力平衡方程。

在瑞典法、简化毕肖普法和斯宾塞法中，整体力矩平衡方程均得到满足[1-3]。对圆弧形滑面，整体力矩平衡方程为

$$\sum_{i=1}^{n}\left[c_i' l_i+(N_i-U_i)\tan\varphi_i'\right]R/F_s-\sum_{i=1}^{n}KW_iY_{ci}-\sum_{i=1}^{n}W_iR\sin\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}Q_i(Y_{qi}\sin\theta_i-R\sin\alpha_i\cos\theta_i)=0 \quad 。\tag{1}$$

式中 c_i' 为第 i 土条底面有效黏聚力；φ_i' 为第 i 土条底面有效内摩擦角；U_i 为第 i 土条底面总水压力；R 为圆弧形滑动面半径；Y_{ci} 为第 i 土条重心到圆心的铅垂距离；Y_{qi} 为第 i 土条外加荷载作用点到圆心的铅垂距离；Q_i 为第 i 土条外加荷载；θ_i 为第 i 土条外加荷载方向与铅垂线夹角，外加荷载方向指向坡内时取正值，指向坡外时取负值；K 为水平地震系数；l_i 为第 i 土条

收稿日期：2007－06－06

底面长度；F_s 为边坡稳定系数；N_i 为第 i 土条底面法向反力；W_i 为第 i 土条重力；α_i 为第 i 土条底面倾角，底面倾向与滑动方向相同时取正值，底面倾向与滑动方向相反时取负值；i 为土条编号，$i=1,2,\cdots$，n，从位置最高的土条起编；n 为土条数量。

据此可写出下列稳定系数公式的通用格式：

$$F_s=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[c_i'l_i+(N_i-U_i)\tan\varphi_i'\right]R}{\sum_{i=1}^{n}\left[KW_iY_{ci}+W_iR\sin\alpha_i-Q_i(Y_{qi}\sin\theta_i-R\sin\alpha_i\cos\theta_i)\right]}\text{。} \tag{2}$$

当边坡均质时，式（2）可写成

$$F_s=\frac{\left[c'\sum_{i=1}^{n}l_i+\tan\varphi'\sum_{i=1}^{n}(N_i-U_i)\right]R}{\sum_{i=1}^{n}KW_iY_{ci}+\sum_{i=1}^{n}W_iR\sin\alpha_i-\sum_{i=1}^{n}Q_i(Y_{qi}\sin\theta_i-R\sin\alpha_i\cos\theta_i)}\text{。} \tag{3}$$

式中　c' 为滑面有效黏聚力；φ' 为滑面有效内摩擦角。

当边坡无地震力和外加水平荷载作用时，式（2）可写成

$$F_s=\frac{\sum_{i=1}^{n}c_i'l_i+\sum_{i=1}^{n}(N_i-U_i)\tan\varphi_i'}{\sum_{i=1}^{n}(W_i+Q_{vi})\sin\alpha_i}\text{，} \tag{4}$$

式中，Q_{vi} 为第 i 土条外加垂直荷载。

当边坡均质且无地震力和外加水平荷载作用时，式（2）可写成

$$F_s=\frac{c'\sum_{i=1}^{n}l_i+\tan\varphi'\sum_{i=1}^{n}(N_i-U_i)}{\sum_{i=1}^{n}(W_i+Q_{vi})\sin\alpha_i}\text{。} \tag{5}$$

从上述通用格式可以看出，满足整体力矩平衡方程的条分法稳定系数与瑞典法的差异完全取决于条底摩擦力总和 $\sum_{i=1}^{n}N_i\tan\varphi_i'$ 的差异，若某一条分法相对于瑞典法而言条底摩擦力总增量 $\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i\tan\varphi_i'>0$（$\Delta N_i$ 为第 i 土条条底法向力增量），则该法稳定系数大于瑞典法；当边坡均质时，若某一条分法相对于瑞典法而言条底法向力总增量 $\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i>0$，则该法稳定系数大于瑞典法。后面关于瑞典法与简化毕肖普法和斯宾塞法稳定系数大小关系的分析将以此为基础。

1.2　满足土条垂直方向和水平方向力平衡方程的条分法稳定系数公式的通用格式及其分析

在简化简布法、美国陆军工程师团法和传递系数法中，各土条垂直方向和水平方向力平衡方程均得到满足[1-3]。对圆弧形滑面，土条垂直方向和水平方向力平衡方程为

$$N_i\cos\alpha_i+S_i\sin\alpha_i+\Delta F_i-W_i-Q_i\cos\theta_i=0\text{，} \tag{6}$$

$$S_i\cos\alpha_i-N_i\sin\alpha_i+\Delta E_i-KW_i+Q_i\sin\theta_i=0\text{，} \tag{7}$$

$$S_i=\left[c_i'l_i+(N_i-U_i)\tan\varphi_i'\right]/F_s\text{。} \tag{8}$$

式中　ΔF_i 为第 i 土条两侧垂直条间力合力；ΔE_i 为第 i 土条两侧水平条间力合力；S_i 为第 i 土条底面剪力反力。

将式（6）乘以 $\sin\alpha_i$，式（7）乘以 $\cos\alpha_i$，然后相加并对 i 从 1 到 n 的 n 个方程进行累加得

$$\sum_{i=1}^{n}S_i-\sum_{i=1}^{n}KW_i\cos\alpha_i-\sum_{i=1}^{n}W_i\sin\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}Q_i(\cos\alpha_i\sin\theta_i-\sin\alpha_i\cos\theta_i)=0\text{。} \tag{9}$$

将式（8）代入式（9）并加以整理得下列稳定系数公式的通用格式：

$$F_s=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[c_i'l_i+(N_i-U_i)\tan\varphi_i'\right]}{\sum_{i=1}^{n}KW_i\cos\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}W_i\sin\alpha_i-\sum_{i=1}^{n}Q_i(\cos\alpha_i\sin\theta_i-\sin\alpha_i\cos\theta_i)}\text{。} \tag{10}$$

由于水平地震力和外加水平荷载的作用点并不位于（通常高于）相应土条底面中点，这些水平方向力的力臂即式（2）中的 Y_{ci} 或 Y_{qi} 不等于（通常小于）$R\cos\alpha_i$，故式（2）与式（10）的格式是不同的。

当边坡无地震力和外加水平荷载作用时，式（10）可写成：

$$F_s=\frac{\sum_{i=1}^{n}c_i'l_i+\sum_{i=1}^{n}(N_i-U_i)\tan\varphi_i'}{\sum_{i=1}^{n}(W_i+Q_{vi})\sin\alpha_i}\text{。} \tag{11}$$

比较式（4）和式（11）可知，此时式（2）与式（10）格式相同。

当边坡均质且无地震力和外加水平荷载作用时，式（10）可写成

$$F_s=\frac{c'\sum_{i=1}^{n}l_i+\tan\varphi'\sum_{i=1}^{n}(N_i-U_i)}{\sum_{i=1}^{n}(W_i+Q_{vi})\sin\alpha_i}\text{。} \tag{12}$$

比较式（5）和式（12）可知，此时式（2）与式

（10）格式相同。

从上述通用格式可以看出，在无地震力和外加水平荷载作用的条件下，满足土条垂直方向和水平方向力平衡方程的条分法稳定系数与瑞典法的差异完全取决于条底摩擦力总和$\sum_{i=1}^{n} N_i \tan\varphi_i'$的差异，若某一条分法相对于瑞典法而言条底摩擦力总增量$\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i \tan\varphi_i' > 0$，则该法稳定系数大于瑞典法；当边坡均质时，若某一条分法相对于瑞典法而言条底法向力总增量$\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i > 0$，则该法稳定系数大于瑞典法。后面关于瑞典法与简化简布法、美国陆军工程师团法和传递系数法稳定系数大小关系的分析将以此为基础。

2　均质条件下瑞典法和满足整体力矩平衡方程条分法稳定系数大小关系

2.1　均质条件下瑞典法和简化毕肖普法稳定系数大小关系

简化毕肖普法假定条间力方向水平。相对于瑞典法而言，简化毕肖普法第i土条条底法向力增量ΔN_i完全由第i土条两侧水平条间力合力ΔE_i引起，故有

$$\Delta N_i = \Delta E_i \sin\alpha_i \quad。 \tag{13}$$

据此，相对于瑞典法而言，简化毕肖普法法向力总增量为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i &= \sum_{i=1}^{n}\Delta E_i \sin\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Delta E_i \sin\alpha_i + \sum_{i=m+1}^{n}\Delta E_i \sin\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Delta E_i \sin\alpha_i - \sum_{i=m+1}^{m+k}\left|\Delta E_i\right|\sin\alpha_i + \sum_{i=m+k+1}^{n}\left|\Delta E_i\right|\sin\left|\alpha_i\right| 。\end{aligned} \tag{14}$$

式中　m为$\Delta E_i > 0$的土条数；k为$\Delta E_i < 0$时$\alpha_i \geq 0$的土条数。因

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta E_i = \sum_{i=1}^{m}\Delta E_i - \sum_{i=m+1}^{m+k}\left|\Delta E_i\right| - \sum_{i=m+k+1}^{n}\left|\Delta E_i\right| = 0, \tag{15}$$

且$\sum_{i=m+k+1}^{n}\left|\Delta E_i\right| \geq 0$，故有$\sum_{i=1}^{m}\Delta E_i \geq \sum_{i=m+1}^{m+k}\left|\Delta E_i\right|$。考虑到$\sin\alpha_i > \sin\alpha_{i+1}$，所以又有$\sum_{i=1}^{m}\Delta E_i \sin\alpha_i > \sum_{i=1}^{m}\Delta E_i \sin\alpha_m > \sum_{i=m+1}^{m+k}\left|\Delta E_i\right|\sin\alpha_{m+1} > \sum_{i=m+1}^{m+k}\left|\Delta E_i\right|\sin\alpha_i$，另知$\sum_{i=m+k+1}^{n}\left|\Delta E_i\right|\sin\left|\alpha_i\right| \geq 0$，因此由式（14）知$\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i > 0$。

由此得出结论：在均质条件下计算同一个滑面为圆弧形的边坡稳定系数时，瑞典法的结果小于简化毕肖普法的结果。

2.2　均质条件下瑞典法和斯宾塞法稳定系数大小关系

斯宾塞法假定各土条条间力方向相同。相对于瑞典法而言，斯宾塞法第i土条条底法向力增量ΔN_i完全由第i土条条间力合力ΔP_i引起，故有

$$\Delta N_i = \Delta P_i \sin(\alpha_i - \beta) \quad , \tag{16}$$

式中，β为土条两侧条间力合力倾角。

据此，相对于瑞典法而言，斯宾塞法法向力总增量为

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i = \sum_{i=1}^{n}\Delta P_i \sin(\alpha_i - \beta) \quad 。 \tag{17}$$

现区分$\Delta P_i < 0$时部分土条$\alpha_i - \beta > 0$和$\Delta P_i > 0$时部分土条$\alpha_i - \beta < 0$两种情况进行分析。

对于$\Delta P_i < 0$时部分土条$\alpha_i - \beta > 0$的情况，式（17）可写成

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i = \sum_{i=1}^{m}\Delta P_i \sin(\alpha_i - \beta) - \sum_{i=m+1}^{m+k}\left|\Delta P_i\right|\sin(\alpha_i - \beta) + \sum_{i=m+k+1}^{n}\left|\Delta P_i\right|\sin\left(\left|\alpha_i - \beta\right|\right) \quad 。 \tag{18}$$

式中　m为$\Delta P_i > 0$的土条数；k为$\Delta P_i < 0$时$\alpha_i - \beta > 0$的土条数。

因

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta P_i = \sum_{i=1}^{m}\Delta P_i - \sum_{i=m+1}^{m+k}\left|\Delta P_i\right| - \sum_{i=m+k+1}^{n}\left|\Delta P_i\right| = 0 \quad , \tag{19}$$

且$\sum_{i=m+k+1}^{n}\left|\Delta P_i\right| \geq 0$，故有$\sum_{i=1}^{m}\Delta P_i \geq \sum_{i=m+1}^{m+k}\left|\Delta P_i\right|$。考虑到$\sin(\alpha_i - \beta) > \sin(\alpha_{i+1} - \beta)$，所以又有$\sum_{i=1}^{m}\Delta P_i \sin(\alpha_i - \beta) > \sum_{i=1}^{m}\Delta P_i \sin(\alpha_m - \beta) > \sum_{i=m+1}^{m+k}\left|\Delta P_i\right|\sin(\alpha_{m+1} - \beta) > \sum_{i=m+1}^{m+k}\left|\Delta P_i\right|\sin(\alpha_i - \beta)$。另知$\sum_{i=m+k+1}^{n}\left|\Delta P_i\right|\sin\left|\alpha_i - \beta\right| \geq 0$，因此由式（18）知$\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i > 0$。

对于$\Delta P_i > 0$时部分土条$\alpha_i - \beta < 0$的情况，式（17）可写成

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i = \sum_{i=1}^{m}\Delta P_i \sin(\alpha_i - \beta) - \sum_{i=m+1}^{m+k}\Delta P_i \sin\left|\alpha_i - \beta\right| + \sum_{i=m+k+1}^{n}\left|\Delta P_i\right|\sin\left|\alpha_i - \beta\right| \quad 。 \tag{20}$$

式中　m为$\Delta P_i > 0$时$\alpha_i - \beta > 0$的土条数；k为$\Delta P_i > 0$时$\alpha_i - \beta < 0$的土条数。

因

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta P_i = \sum_{i=1}^{m}\Delta P_i + \sum_{i=m+1}^{m+k}\Delta P_i - \sum_{i=m+k+1}^{n}\left|\Delta P_i\right| = 0, \tag{21}$$

且 $\sum_{i=1}^{m}\Delta P_i \geq 0$，故有 $\sum_{i=m+k+1}^{n}|\Delta P_i| \geq \sum_{i=m+1}^{m+k}\Delta P_i$。考虑到 $\alpha_i-\beta<0$ 时 $\sin|\alpha_{i+1}-\beta|>\sin|\alpha_i-\beta|$，所以又有 $\sum_{i=m+k+1}^{n}|\Delta P_i|\sin|\alpha_i-\beta|>\sum_{i=m+k+1}^{n}|\Delta P_i|\sin|\alpha_{m+k+1}-\beta|>\sum_{i=m+1}^{m+k}\Delta P_i\sin|\alpha_{m+k}-\beta|>\sum_{i=m+1}^{m+k}\Delta P_i\sin|\alpha_i-\beta|$，另知 $\sum_{i=1}^{m}\Delta P_i\sin(\alpha_i-\beta)\geq 0$，因此由式（20）知 $\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i>0$。

根据上述可以得出结论：在边坡均质的条件下计算同一个滑面为圆弧形的边坡稳定系数时，瑞典法的结果小于斯宾塞法的结果。

3 无地震力和外加水平荷载条件下瑞典法和满足土条垂直方向和水平方向力平衡方程的条分法稳定系数大小关系

3.1 无地震力和外加水平荷载且边坡均质条件下瑞典法和简化简布法稳定系数大小关系

简化简布法情况比较特殊，该法在假定条间力方向水平，按土条垂直方向和水平方向力平衡方程求得稳定系数初值以后，还要乘以一个与黏聚力、内摩擦角、重力密度和坡高有关的修正系数。经修正的稳定系数不再是力平衡方程的解，因而该方法从总体上讲是一种带有经验性的方法。由于这个修正系数有时小于 1，不能排除简化简布法的稳定系数小于瑞典法的可能，事实上，已经有这样的算例[1]。因此，本文只对瑞典法稳定系数与简化简布法未修正的稳定系数大小关系进行论证。

经过与第 2.1 节完全相同的分析过程可以得出结论：在边坡均质且无地震力和外加水平荷载的条件下计算同一个滑面为圆弧形的边坡稳定系数时，瑞典法的结果小于简化简布法未经修正的结果。

3.2 无地震力和外加水平荷载且边坡均质条件下瑞典法和美国陆军工程师团法稳定系数大小关系

美国陆军工程师团法假定各土条条间力方向相同（等于边坡平均坡角）。经过与第 2.2 节完全相同的分析过程可以得出结论：在边坡均质且无地震力和外加水平荷载的条件下计算同一个滑面为圆弧形的边坡稳定系数时，瑞典法的结果小于美国陆军工程师团法的结果。

3.3 无地震力和外加水平荷载条件下瑞典法和传递系数法稳定系数大小关系

传递系数法假定土条条间力方向与上一土条的底面平行。第 i 土条下侧条间力 P_i 因与第 i 土条底面平行而对第 i 土条条底法向力没有贡献，故相对于瑞典法而言传递系数法第 i 土条条底法向力增量 ΔN_i 完全由第 i 土条上侧条间力 P_{i-1} 引起，因此有

$$\Delta N_i = P_{i-1}\sin(\alpha_{i-1}-\alpha_i) \quad 。 \tag{22}$$

考虑到 $\alpha_{i-1}>\alpha_i$ 即 $\sin(\alpha_{i-1}-\alpha_i)>0$，$P_0=0$，$P_{i-1}>0$（$i>1$），故有 $\Delta N_1=0$，$\Delta N_i>0$（$i>1$）即有 $\Delta N_1\tan\varphi_1'=0$，$\Delta N_i\tan\varphi_i'>0$（$i>1$），从而有 $\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i\tan\varphi_i'>0$。

由此得出结论：在无地震力和外加水平荷载的条件下计算同一个滑面为圆弧形的边坡稳定系数时，瑞典法的结果小于传递系数法的结果。

4 关于条分法最小解的认识

上述关于简化毕肖普法、斯宾塞法、简化简布法、美国陆军工程师团法、传递系数法与瑞典法稳定系数大小关系的分析中附加了不同的条件。对简化毕肖普法和斯宾塞法要求均质，这是因为这两种方法存在相对于瑞典法而言条底法向力增量（从而条底摩擦力增量）为负值的土条，强度指标不等时不能保证条底摩擦力总增量为正值从而不能保证其结果大于瑞典法。对简化简布法、美国陆军工程师团法和传递系数法要求无地震力和外加水平荷载，这是因为这三种方法通常扩大了地震力和外加水平荷载的作用，有地震力和外加水平荷载时不能保证其结果大于瑞典法。

归纳瑞典法与简化毕肖普法、斯宾塞法、简化简布法、美国陆军工程师团法、传递系数法稳定系数的上述大小关系，有以下结论：在边坡均质且无地震力和外加水平荷载的条件下用瑞典法、简化毕肖普法、斯宾塞法、简化简布法、美国陆军工程师团法和传递系数法计算同一个滑面为圆弧形的边坡稳定系数时，瑞典法的结果最小（对简化简布法而言，稳定系数系指稳定系数初值或修正系数不小于 1 的修正值）。

曾有人试图在土坡无水压力、无地震力和外加荷载、各土条条间力方向相同的条件下证明瑞典法的稳定系数最小[4]，但没有成功。

这一证明的思路是，如能证明瑞典法的任一土条条底法向力均最小，那么瑞典法的稳定系数必然最小。证明过程如下：

（1）建立含有土条条间力合力倾角的条底法向力统一公式：

$$N_i = \frac{W_i\cos\beta + c_i l_i\sin(\beta-\alpha_i)/F_s}{\cos(\beta-\alpha_i)-\tan\varphi_i\sin(\beta-\alpha_i)/F_s} \quad 。 \tag{23}$$

式中 c_i 为第 i 土条底面黏聚力；φ_i 为第 i 土条底面内摩擦角。

（2）求 N_i 对 β 的偏导数：

$$\frac{\partial N_i}{\partial\beta} = \frac{-W_i\sin\alpha_i + c_i l_i/F_s + W_i\tan\varphi_i\cos\alpha_i/F_s}{\left[\cos(\beta-\alpha_i)-\tan\varphi_i\sin(\beta-\alpha_i)/F_s\right]^2} 。 \tag{24}$$

（3）令其为 0，得

$$F_s=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(c_i l_i+W_i\cos\alpha_i\tan\varphi_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}W_i\sin\alpha_i}\quad。\qquad(25)$$

因上式正是瑞典法的稳定系数公式，故证明者认为在上述条件下瑞典法的解是最小解这一命题已经获得证明。

上述证明是无效的，理由是：

（1）式（23）不适用于瑞典法。因为瑞典法假设条间力为 0，故土条两侧条间力合力方向是不确定的。将瑞典法对条间力的假定改为假定土条两侧条间力合力倾角等于其底面倾角，虽然能使式（23）适用于瑞典法，但会造成任意一个土条界面上作为作用力与反作用力的一对条间力不符合方向相反的条件从而违反了力学第三定律，而一旦失去了力学第三定律，瑞典法建立在静力平衡方程基础上的稳定系数计算公式就不能导出。因此，瑞典法的条底法向力公式不能表达成式(23)。

（2）式（24）是错误的。因为由式（23）知 N_i 与 F_s 有关，而 F_s 又与 β 有关，故求 N_i 对 β 的偏导数不仅应求 N_i 对式（23）中显现的 β 的偏导数，还应求 N_i 对式（23）中 F_s 所隐含的 β 的偏导数（当然这一偏导数是求不出来的）。

（3）式（25）只是得出了 F_s 与 β 无关或者说不存在使 N_i 为极小值的 β 的结论，并没有说明 β 等于 α_i 时 N_i 为极小值。这一错误结论是在求 N_i 对 β 的偏导数时未求 N_i 对式（23）中 F_s 所隐含 β 的偏导数这一错误做法的必然结果，这是因为：求 N_i 对 β 的偏导数时不求 N_i 对式（23）中 F_s 所隐含的 β 的偏导数意味着认为 F_s 与 β 无关。在将 F_s 表达成 N_i 的函数（参见式（2）和式（10））时，函数中 N_i 以外的各项均与 β 无关，故认为 F_s 与 β 无关也即意味着认为 N_i 与 β 无关，这样也就不存在使 N_i 为极小值的 β。

（4）瑞典法中并非每个土条条底法向力均为最小（虽然有不少人认为瑞典法中每个土条条底法向力均为最小，这一观点甚至被视为基本公识[5]，但这不是事实）。如：简化毕肖普法中底面倾角大于 0 而两侧水平条间力合力 ΔE_i 小于 0 的那些土条，其条底法向力就小于瑞典法中相应土条条底法向力，这是因为：由式（13）知，当 $\alpha_i>0$ 且 $\Delta E_i<0$ 时，有 $\Delta N_i<0$。

5　结　　论

(1)在边坡均质的条件下计算同一个滑面为圆弧形的边坡稳定系数时，瑞典法的结果小于简化毕肖普法和斯宾塞法的结果。

(2)在无指向坡外的外加水平荷载的条件下计算同一个滑面为圆弧形的边坡稳定系数时，瑞典法的结果小于传递系数法的结果。

(3)在边坡均质且无指向坡外的外加水平荷载的条件下计算同一个滑面为圆弧形的边坡稳定系数时，瑞典法的结果小于美国陆军工程师团法和简化简布法的结果（对简化简布法而言，稳定系数系指稳定系数初值或修正系数不小于 1 的修正值）。

(4)在边坡均质且无指向坡外的外加水平荷载的条件下用瑞典法、简化毕肖普法、斯宾塞法、美国陆军工程师团法、传递系数法和简化简布法计算同一个滑面为圆弧形的边坡稳定系数时，瑞典法的结果最小（对简化简布法而言，稳定系数系指稳定系数初值或修正系数不小于 1 的修正值）。

（5）在土坡无水压力、无外加荷载、各土条条间力方向相同的条件下瑞典法稳定系数最小的现有证明是无效的。

需要注意的是，本文中的圆弧形滑面是指人们通常理解的下凹的圆弧形滑面而非上凸的圆弧形滑面。

参考文献：

[1] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 第二版. 北京: 中国水利水电出版社, 1996. (QIAN Jia-huan, YIN Zong-ze. Geotechnical principles and calculation[M]. 2nd ed. Beijing: China Water Power Press, 1996. (in Chinese))

[2] 杨明成. 边坡稳定性分析的条分法及临界滑动面的确定[D]. 重庆: 后勤工程学院, 2003. (YANG Ming-cheng. Methods of slices and determination of critical slip surface for slope stability analysis[D]. Chongqing: Logistical Engineering University, 2003. (in Chinese))

[3] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (LI Guang-xin. Higher soil mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))

[4] 林　丽, 郑颖人. 条分法的统一公式及其分析[C]//岩土力学与工程进展. 重庆: 重庆出版社, 2003. (LIN Li, ZHENG Ying-ren. Uniform formula and its analysis of methods of slices[C]// Development of Geotechnical mechanics and Engineering. Chongqing: Chongqing Press, 2003. (in Chinese))

[5] 周宏磊, 张在明. 关于边坡稳定性分析中几个问题的讨论[J]. 工程勘察, 2006(12): 1 – 7. (ZHOU Hong-lei, ZHANG Zai-ming. Discussion of several problems for slope stability analysis[J]. Journal of Geotechnical Investigation & Surveying, 2006(12): 1 – 7. (in Chinese))