

# 冻土横观各向同性非线性本构模型的实验研究

王正中<sup>1, 2</sup>, 袁 驹<sup>3</sup>, 陈 涛<sup>1\*</sup>

(1. 西北农林科技大学水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100; 2. 冻土工程国家重点实验室, 甘肃 兰州 730000; 3. 清华大学土木系, 北京 100084)

**摘 要:** 通过对冻土形成过程及组构特点的分析, 指出冻土属正交各向异性材料; 并对 $-5^{\circ}\text{C}\sim-9^{\circ}\text{C}$ 之间冻土试件 3 个主方向应力-应变关系曲线、切线模量  $E$  以及各向泊松比  $\mu$  进行了全面实验测定, 应用复合材料力学理论, 分析证实了冻土可以足够精确地认为是非线性横观各向同性材料, 为建立新的冻土本构模型及强度准则, 并为冻土与建筑物相互作用的数值分析提供了理论依据。

**关键词:** 冻土; 切线模量; 泊松比; 横观各向同性; 本构模型

**中图分类号:** TU411 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2007)08-1215-04

**作者简介:** 王正中(1963-), 男, 陕西彬县人, 教授, 博士生导师, 从事水工结构工程学科教学及科研工作。

E-mail:ctao1995@163.com。

## Study on the constitutive model of transversely isotropic frozen soil

WANG Zheng-zhong<sup>1, 2</sup>, YUAN Si<sup>3</sup>, CHEN Tao<sup>1</sup>

(1. College of Water Conservancy and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling 712100, China; 2. State key laboratory of Frozen Soil Engineering, Lanzhou 730000, China; 3. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Based on the forming process and the characteristics of frozen soil, it was pointed out that frozen soil could be named as orthotropic material. With the application of mechanics of composite materials and the tests on stress and strain, elastic modulus, Poisson's ratio in three principal planes under different temperatures, frozen soil could be regarded as the nonlinear transversely isotropic material. It could provide the basis for new constitutive model of frozen soil and numerical analysis on interaction between frozen soil and buildings.

**Key words:** frozen soil; elastic modulus; Poisson's ratio; isotropy in transverse; constitutive model

## 0 引 言

寒区工程建设既依赖冻土又避免不了受冻土的危害, 开展冻土的物理力学性能研究是寒区工程建设的基础。为了准确科学地分析寒区工程中冻土与建筑物的相互作用, 以便进行工程结构性能分析及科学设计, 掌握结构全过程变形、承载力及破坏形态, 就必须研究清楚冻土的本构模型和破坏准则, 特别是冻土的各项物理力学指标及材性参数。弄清冻土的材料属性, 既能准确地测定冻土物理力学参数, 又利于建立既简单又准确的力学本构模型。为此, 本文在对冻土形成过程及组构特点分析的基础上, 根据试验结果及复合材料力学有关理论, 分析了冻土的力学特性, 推断冻土属非线性横观各向同性材料。

## 1 冻土组构特点及正交各向异性模型

众所周知, 冻土的微观组成与其宏观力学特性有着密切的关系。微观研究表明<sup>[1]</sup>: 土冻结过程中, 垂

直于温度梯度方向形成一层层冰晶体层面和冻结锋面, 随着冻结温度的变化, 冻结锋面也随之平行推进, 从而表现出了冻结锋面内和温度梯度方向(两者正交)力学特性的显著差异。同时一方面由于冻土的组构复杂、不仅有土壤颗粒及未冻水, 而且还有冰晶体及气体, 特别是还有冻结过程中形成的细微裂缝; 而另一方面由于冻土的力学性能与温度梯度、冻结速率、应力状态、水份补给、土壤理化性质都有着密切的关系。从宏观上表现出了各主方向力学性能的明显差异以及力学性能的非线性; 因此, 以往沿用各向同性线弹性材料本构模型来分析冻土与建筑物相互作用的处理是欠合理的, 其合理的本构模型应为正交各向异性模型<sup>[1-2]</sup>, 即沿温度梯度方向是一个主方向, 在垂直于该方向的平面(即冻结锋面内)内任意两个正交方向是另

基金项目: 国家“863”计划(2002AA62Z3191); 国家冻土工程重点实验室基金资助项目(9901)

收稿日期: 2006-09-25

\*通讯作者

两个主方向。根据冻土形成过程及其微观结构特点，可以初步推断，在冻结锋面内任意方向具有对称性和面内各向同性，在垂直于冻结锋面方向则有显著差别，因此为描述方便暂取坐标系如图 1 所示，则根据复合材料力学理论横观各向同性材料的本构关系如下：设  $x, y, z$  轴都是弹性主方向，而且  $xy$  面为各向同性面， $z$  轴（温度梯度方向）为垂直于  $xy$  面（冻结锋面）的主方向，则横观各向同性材料的应力应变关系为

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}, \quad (1)$$

式中，应变列阵、应力列阵和柔度矩阵分别为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & & & \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & & & \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & 0 & S_{44} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix},$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{zx} \ \tau_{xy}\}^T, \text{ 其中, } S_{11} = \frac{1}{E_x},$$

$$S_{12} = -\frac{\mu_{xy}}{E_x}, \quad S_{13} = -\frac{\mu_{xz}}{E_z} = -\frac{\mu_{zx}}{E_x}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_z},$$

$$S_{44} = \frac{1}{E_x} + \frac{1 + \mu_{xz}}{E_z} = \frac{1}{E_z} + \frac{1 + \mu_{zx}}{E_x}.$$

横观各向同性材料是正交各向异性材料的特例，因此，应满足对称性，即

$$\frac{\mu_{xz}}{E_z} = \frac{\mu_{zx}}{E_x}. \quad (2)$$

应用式 (2) 可以验证材料是否属于正交各向异性材料。其中各符号的含义同弹性力学的意义。为以后分析方便特别对以上冻土的物理力学参数意义作一注释， $E_x, E_z$  为冻土  $x, z$  两弹性主方向上的切线模量， $\mu_{ij}$  为冻土在  $j$  向单向正应力作用下，在  $i$  方向应变与  $j$  方向应变比值的负值，即泊松比。

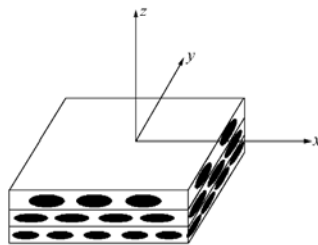


图 1 冻土结构坐标示意图

Fig. 1 Coordinate system of frozen soil

根据复合材料力学理论知，要判断以上所述正交各向异性冻土是否属于横观各向同性材料，必须验证经过某一轴线（即这里的  $z$  轴），在垂直于该轴线的平

面内，各点的材料性能在各个方向上都相同，该平面就是各向同性面（即这里的冻结锋面）。具体必须验证以下力学参数的关系是否成立：

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_y, \\ \mu_{zx} &= \mu_{zy}, \\ \mu_{xz} &= \mu_{yz}, \\ \mu_{xy} &= \mu_{yx}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

## 2 试验条件

试验采用兰州粉质黏土，塑限含水率  $w_p=16.9\%$ ，液限含水率  $w_L=25.3\%$ ，塑性指数  $I_p=8.4$ ，试件采用长方体试件，含水率  $w=22.8\%$ ，干密度  $\gamma_d=1.58 \text{ g/cm}^3$ ，为保证测定横观各向同性材料的物理力学特性参数，试件严格保证长轴方向分别与冻结锋面垂直或平行的取向，以确保准确地测定  $E_x, E_y, E_z$  及  $\mu_{xy}, \mu_{yx}, \mu_{zx}, \mu_{xz}, \mu_{yz}, \mu_{zy}$ 。

冻土试块是在棱长为 200 mm 的正立方体有机玻璃模中按干容重控制分层击实成型的，试块脱模后四周用塑膜隔水层封装，再裹厚 5 cm 的泡沫塑料隔热层，保证在试块顶部和底部制冷时的单向冻结。试块顶部和底部用边长为 200 mm 的制冷板制冷，其温度由自控式冷浴控制，顶板设定温度分别为  $-18^\circ\text{C}$ 、 $-14^\circ\text{C}$ 、 $-10^\circ\text{C}$ ，底板设定温度为  $0^\circ\text{C}$ ，这样的温度设定是为了保证试块中心平均温度达到  $-9^\circ\text{C}$ 、 $-7^\circ\text{C}$ 、 $-5^\circ\text{C}$ 。试块在大型冻融箱中和无水分补给的封闭系统中冻结 48 h，待试块内温度场达到稳定后，迅速隔热移到低温室（ $-15^\circ\text{C}$  以下）一次平行切割加工 4 个高 100 mm，长宽 70.7 mm 的长方体试件，对试件侧面磨光涂抹防潮绝缘的三氯甲烷，待干硬后用 502 快干胶贴应变片，待应变片黏结密实固化后，将试件送入低温实验室进行试验。

加载装置采用国产 CSS-1020 型机械式电子万能机，可实现恒位移控制，试件的应力与应变均由 DT-500 型数采仪配合微机进行随时自动采集处理。为提高精度采用 BQ120-10AA 型箔式应变片直接测量冻土试件的应变，其分辨率为 1 个微应变。

切线模量  $E$  及泊松比  $\mu$  值按直接加载法测定。因无法测定全过程应力 - 应变曲线，所以控制应变取为弹性极限应变，针对兰州粉质黏土及本次试验的温度及湿度状况，本次试验中暂取  $\varepsilon_0=1.2 \times 10^{-2}$ ；试验中每组试件平行制作 3 个试件；试件温度分别按  $-5^\circ\text{C}$ 、 $-7^\circ\text{C}$ 、 $-9^\circ\text{C}$  控制，加载时应变速率取为  $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = 16.67 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ，实测出各种组合时各个方向的  $\sigma - \varepsilon$

关系曲线后, 按正交各向异性的  $E, \mu$  定义, 计算出冻土的各种物理力学参数。

### 3 试验结果

#### 3.1 试验结果及初步分析

为避免图表重复, 这里没有列出试验数据表, 仅将各项测试结果点绘于图 2~4。初步分析结果表明: 同一负温及冻结条件下, 同一应力条件下, 各向弹性应变  $\varepsilon$ 、各向切线模量  $E$ 、各向泊松比  $\mu$  之间存在显著相关关系, 为了分析冻土的物理力学属性, 特别是为了判断冻土是否属于横观各同性材料, 对不同应力水平时, 各种力学参数进行比较分析。具体结果如下:

$$\left| \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\varepsilon_y} \right| \leq 4.1\%, \quad \left| \frac{E_x - E_y}{E_y} \right| \leq 4.4\%, \quad \left| \frac{E_z \mu_{zx} - E_x \mu_{xz}}{E_z \mu_{zx}} \right| \leq 7.9\%,$$

$$\left| \frac{\mu_{zx} - \mu_{zy}}{\mu_{zx}} \right| \leq 6.9\%, \quad \left| \frac{\mu_{xz} - \mu_{yz}}{\mu_{xz}} \right| \leq 7.3\%, \quad \left| \frac{\mu_{xy} - \mu_{yx}}{\mu_{xy}} \right| \leq 3.8\%。$$

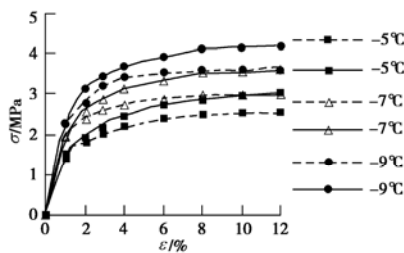


图 2  $\sigma - \varepsilon$  关系曲线

Fig. 2 Relationship between  $\sigma$  and  $\varepsilon$

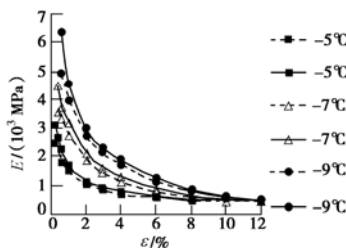


图 3  $\varepsilon - E$  关系曲线

Fig. 3 Relationship between  $\varepsilon$  and  $E$

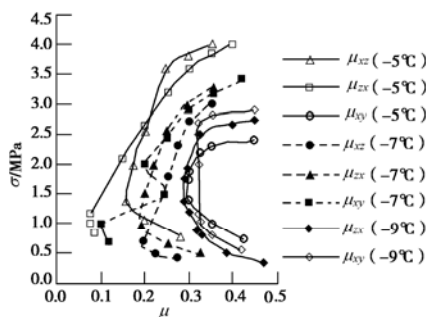


图 4  $\sigma - \mu$  关系曲线

Fig. 4 Relationship between  $\sigma$  and  $\mu$

所以, 可以认为各向力学参数之间近似满足式

(2)、(3) 的要求, 根据复合材料力学理论, 可以认为兰州粉质黏土在冻结温度为  $-5 \sim -9^\circ\text{C}$ , 含水率适当时的冻土属横观各向同性材料, 因此, 就可以按横观各向同性材料建立冻土的本构模型及破坏准则, 为冻土工程及寒区结构工程的数值分析提供理论模型。

#### 3.2 冻土各向力学参数试验结果的回归分析及拟合曲线

在对每组 3 个平行试验结果取平均值的基础上, 按不同冻结温度绘出不同应力水平  $\sigma$  与各向  $\varepsilon, E, \mu$  之间的关系曲线, 应用最小二乘法进行分析, 回归曲线绘于图 2~4。图 2, 3 中实线为同性面内方向数据, 虚线为温度梯度方向数据。

#### 3.3 $E - \varepsilon - \sigma - \mu$ 关系曲线分析

(1) 由图 2  $\sigma - \varepsilon$  关系曲线可以看出: ①在同一应力水平下, 温度梯度方向即  $z$  向的应变总大于等温面 (各向同性面) 内的应变, 即冻土在等温面 (各向同性面) 的刚度大于温度梯度方向的刚度; ②在同一应力水平下, 负温绝对值越小, 应变越大, 即同一应力水平下冻结温度越大, 冻土的刚度越大; ③在应力水平较低时, 各方向的应变基本相同, 各条曲线基本重合, 而且此应力水平以下的变形接近于线弹性性质。若取该应力对应的应变为线弹性极限应变, 则其值约为极限应变的  $1/10 \sim 1/6$ ; ④由应力 - 应变曲线变化规律可以看出, 对于不同方向、不同冻结温度的极限应变约为  $\varepsilon_0 = 1.2 \times 10^{-2}$ , 但极限应力强度随冻结温度增大而提高, 在等温面内的极限强度大于温度梯度方向的极限强度。

(2) 结合图 3  $\varepsilon - E$  关系曲线可以看出: ①在同一应力水平下, 等温面内的切线模量  $E_x$  大于温度梯度方向的切线模量  $E_z$ ; ②整个  $\varepsilon - E$  图可以划分为 3 个区, 第 I 区当应变接近极限应变时, 不同应力水平、不同方向、不同冻结温度的切线模量比较接近, 达到最小值, 但均小于  $10^3 \text{ MPa}$ 。第 II 区, 当  $E > 10^3 \text{ MPa}$ ,  $\sigma > 0.5 \text{ MPa}$  时在同一应力水平下, 随着冻结温度的增大, 切线模量增大, 特别是在低应力水平时, 增长率更大。第 III 区, 当应力水平低到一定程度 (本次试验中该应力  $\sigma = 0.5 \text{ MPa}$ ), 各方向、各种冻结温度时的切线模量基本相同, 达到最大值,  $E_0$  约为  $1 \times 10^4 \text{ MPa}$ 。

(3) 由图 4  $\sigma - \mu$  关系曲线可见: ①泊松比  $\mu$  随应力  $\sigma$  变化可分为 3 个区, 第 I 区即  $\sigma < 1.2 \text{ MPa}$  以下, 泊松比  $\mu$  变化规律性不强, 但都是随应力增加而迅速减小, 这一区间应该是冻土试件的压密过程。第 II 区, 当  $1.2 < \sigma < (T+5)/4$ , 泊松比  $\mu$  随应力  $\sigma$  增大而增大, 随着冻结温度值增大而减小。第 III 区, 当  $\sigma \geq$

(T+5)/4 时, 随着应力水平  $\sigma$  的增大, 泊松比  $\mu$  随应力  $\sigma$  快速增大; ②在同一应力水平下, 冻结温度越大, 泊松比越小; ③在同一应力水平下, 各方向泊松比  $\mu$  的变化规律性较差, 但基本符合  $\mu_{xz} < \mu_{zx} < \mu_{xy}$  的规律。

(4) 冻土单轴非线性本构模型探讨, 为了更深入了解冻土的非线性本构关系, 将不同方向单轴压缩试验结果, 进行无量纲化处理, 以实测单向应力  $\sigma$  与相应方向的冻结极限强度  $\sigma_0$  之比值  $y$  为纵坐标, 以实测相应单向应变  $\varepsilon$  与相应方向的冻结极限应变  $\varepsilon_0$  之比值  $x$  为横坐标, 绘出无量纲单轴应力应变关系曲线, 即  $y-x$  关系, 如图 5 所示。

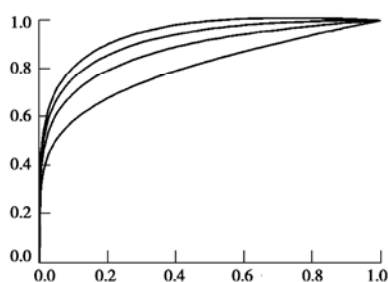


图 5 无量纲应力应变曲线

Fig. 5 Dimensionless relationship between stress-strain

应说明的是, 对试验结果进行回归分析得该种试样极限强度:  $\sigma_0 = 0.25T + C$  (MPa), 其中  $C = \begin{cases} C_1 = 1.34 \text{ MPa} & (\text{温度梯度方向}) \\ C_2 = 1.90 \text{ MPa} & (\text{冻结锋面内}) \end{cases}$ 。各种极限应变近似取  $\varepsilon_0 = 1.2 \times 10^{-2}$ 。

根据以上分析及处理并参考文献<sup>[3-4]</sup>得到冻土无量纲单轴非线性本构模型为

$$y = (xa^{1-x})^b \quad (4)$$

## 4 结 论

(1) 实验证明, 对兰州粉质黄土在适当的冻结温

度及水分状况下, 属于横观各向同性材料, 也使实验测定参数由 9 个减少到 5 个, 使冻土力学参数测定中极为简便。

(2) 给出了空间应力状态下横观各向同性冻土的统一本构模型, 该模型比正交各向异性模型应用起来更为简便。

(3) 给出了作为横观各向同性材料冻土的各种材料力学参数的近似变化规律。

以上各项成果为冻土与建筑物相互作用的数值分析提供了有参考价值的统一本构模型。

## 参考文献:

- [1] 王正中, 张长庆, 沙际德. 正交各向异性冻土与建筑物相互作用的非线性有限元分析[J]. 土木工程学报, 1999(3): 45 - 49. (WANG Zheng-zhong, SHA Ji-de, JIANG Yun-jing. Nonlinear finite element analysis of interaction of orthotropic frozen ground and construction[J]. China Civil Engineering Journal, 1999(3): 45 - 49. (in Chinese))
- [2] 张长庆, 于志秋, 彭万巍, 等. 应变片用于冻土变形测试初探[J]. 冰川冻土, 1996(17): 148 - 151. (ZHANG Chang-qing, PENG Wan-wei, et al. Primary study of measuring deformation of frozen soil with strain gauge[J]. Journal of Glaciology and Geocryology, 1996(17): 147 - 150. (in Chinese))
- [3] 过镇海, 郭玉涛, 徐 焱, 等. 混凝土非线性弹性正交异性本构模型[J]. 清华大学学报, 1997(6): 78 - 81. (GUO Zhen-hai, GUO Yu-tao, XU Yan, et al. Nonlinear elastic orthotropic constitutive model for concrete[J]. Journal of Tsinghua University, 1997, 37(6): 78 - 81. (in Chinese))
- [4] ZHU Yuan-lin, CARBEE D L. Creep and strength behaviour of frozen silt in uniaxial compression[J]. U S A CRREL Report, 1987: 1 - 8.