

粗粒土非线性剪胀模型研究

程展林¹, 姜景山^{1, 2, 3}, 丁红顺¹, 左永振¹

(1. 长江科学院水利部岩土力学与工程重点实验室, 湖北 武汉 430010; 2. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 3. 河海大学岩土工程科学研究所, 江苏 南京 210098)

摘要: 粗粒土具有明显的剪胀剪缩性, 为非虎克材料。对 8 种颗粒材料进行了 11 组三轴试验, 将体应变分为球应力和偏应力引起的体应变两部分, 并假定弹性变形泊松比为常数, 对实测体应变两部分大小进行了分离。假定三轴试验的轴向应变和剪应力引起的体应变服从 Rowe 剪胀方程, 分析表明, 对任一种颗粒材料而言, Rowe 剪胀方程参数 K_f 的归一性良好, 即不同应力状态下参数 K_f 均近似为一个常数。在此基础上, 基于邓肯-张模型和 Rowe 剪胀方程, 建立了体变模量 K_p 、剪胀模量 K_q 、剪切模量 G 三参量与应力状态的关系, 初步提出了一种新的非线性剪胀模型。该模型可视为邓肯-张模型的改进型模型。经验证, 该模型能比较准确地描述各种颗粒材料的体变过程, 是一种物理概念明确, 简单实用的非线性剪胀模型。

关键词: 应力应变关系; 剪胀性; 邓肯-张模型; Rowe 剪胀方程; 粗粒土; 土石坝

中图分类号: TU411

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2010)03-0460-08

作者简介: 程展林(1963-), 男, 湖北武穴人, 教授级高工, 主要从事土力学研究。E-mail: chengzli@mail.crsri.cn。

Nonlinear dilatancy model for coarse-grained soils

CHEN Zhan-lin¹, JIANG Jing-shan^{1, 2, 3}, DING Hong-shun¹, ZUO Yong-zhen¹

(1. Key Laboratory of Geotechnical Mechanics and Engineering of Ministry of Water Resources, Yangtze River Scientific Research Institute, Wuhan 430010, China; 2. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 3. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Coarse-grained soils exhibit evident dilatancy, and they do not obey the Hook's law. Eleven groups of triaxial tests on eight kinds of particle materials are conducted. In order to separate the observed volumetric strain, the volumetric strain is viewed as two parts induced respectively by spherical stress and deviatoric stress, and the elastic Poisson's ratio is assumed as constant. The axial strain and volumetric strain caused by the shear stress are assumed to obey the Rowe dilatancy law. The analysis shows that the parameter K_f is in good agreement with the normalization for any particle materials, which means the parameter K_f is approximately constant. The relationship between stress state and three parameters including volumetric strain modulus K_p , dilatancy modulus K_q , shear modulus G is established on the basis of the Duncan-Chang's model and Rowe dilatancy law. A new nonlinear dilatancy model is initially proposed, and it can be seen as an improved Duncan-Chang's model. The proposed model can well depict the processes of volumetric strains for different particle materials, and it is a simple and practical nonlinear dilatancy model with clear physical concept.

Key words: stress-strain relationship; dilatancy; Duncan-Chang's model; Rowe dilatancy law; coarse-grained soils; earth and rockfill dam

0 引言

粗粒土作为土石坝主要填料, 其本构模型选择及参数确定一直是土石坝工程特性数值分析中的难点问题。土力学工作者已充分的认识到, 由于土体材料性质复杂, 影响因素众多, 本构模型必须对土体材料的性质进行简化, 忽略其次要因素, 反映其主要特性。一种能突出土的主要特性, 力学概念简单, 参数物理意义明确且不同土体间参数具有可比性的本构模型是

有生命力的。简单的邓肯-张模型得到了工程界广泛应用就是例证。同时, 应该看到, 对于粗粒土三轴试验曲线, 邓肯-张模型模拟偏应力曲线是可行的, 但模拟体变曲线仍差强人意, 其原因在于非线性弹性邓肯-张模型不能反映粗粒土的剪胀性。能否建立一种模型, 既不失简单适用的特征, 又能同时反映土体的

非线性和剪胀性, 是本文作者长期追求的目标。

本文在大量粗粒土试验的基础上, 基于邓肯 - 张模型和 Rowe 剪胀方程, 假定土体的体应变为球应力引起的体应变和剪应力引起的体应变之和, 初步提出了一种新的“三参量”非线性剪胀模型。该模型可视为邓肯 - 张模型的改进型模型, 并期望得到工程的进一步验证。

1 粗粒土的应力应变特性

一般通过常规三轴试验方法研究粗粒土的强度和变形特性。当粗粒土级配、围压一定时, 应力应变曲线的形态取决于粗粒土的密度。密度较小时, 应力应变关系呈硬化型, 其相应的体变表现为体缩; 粗粒土密度愈大, 应力应变关系逐渐呈现出软化型, 其相应的体应变愈表现为体胀。当粗粒土级配、密度一定时, 应力应变曲线形态与围压有关。围压愈小, 愈容易呈软化型, 其体胀变形愈大。

大量的三轴试验资料表明, 土石坝工程中的粗粒土常常表现出较强的剪胀性, 而邓肯 - 张模型不能反映土体的剪胀性, 不管是 $E-n$ 还是 $E-B$ 模型都不能很好的模拟三轴试验的体变曲线。图 1 为由一组粗粒土三轴试验成果求得的 $E-n$, $E-B$ 模型参数计算得到的切线泊松比随三轴试验应力状态的变化曲线, 可以看出两个模型给出的泊松比值差别是非常大的^[1]。初看起来是由于两种模型对体变曲线的假定不同, 实质上是因为非线性弹性邓肯 - 张模型不能反映剪胀性的缘故。

如能对邓肯 - 张模型进行改进, 以便能反映土体的剪胀性, 将是非常有意义的。

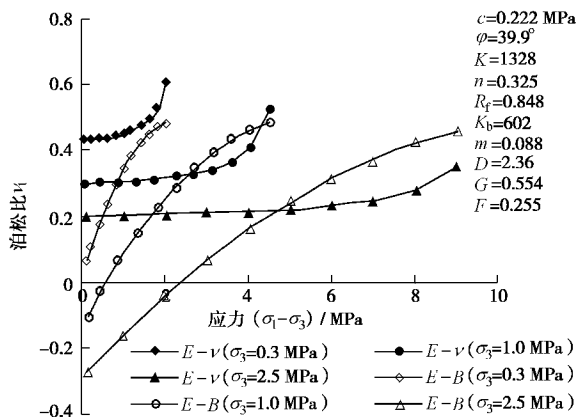


图 1 邓肯 $E-n$ 与 $E-B$ 模型泊松比的比较^[1]

Fig. 1 Comparison of n_t between $E-n$ and $E-B$ models^[1]

2 邓肯 - 张模型简介

邓肯 - 张模型是土力学工作者非常熟悉的本构模

型, 为了本文的完整性, 对该模型仍作简单介绍。

邓肯 - 张模型采用康德纳 (Kondner) 等人提出的双曲线来拟合三轴试验中偏应力 ($s_1 - s_3$) 和轴向应变 e_a 的关系^[2]

$$s_1 - s_3 = \frac{e_a}{a + be_a} \quad (1)$$

在此基础之上, 初始切线弹性模量采用简布 (Janbu) 提出的公式, 并采用莫尔 - 库仑破坏准则, 最终推得切线弹性模量的公式^[3]

$$E_t = K p_a \left(\frac{s_3}{p_a} \right)^n \left[1 - R_f \frac{(1 - \sin j)(s_1 - s_3)}{2c \cos j + 2s_3 \sin j} \right]^2 \quad (2)$$

式中包含 5 个参数 c, j, K, n, R_f 。

邓肯 - 张 $E-n$ 或 $E-B$ 模型中假定三轴压缩试验中 $e_1 - (-e_3)$ 关系或 $e_v - e_1$ 关系符合双曲线从而导出切线泊松比 (略)。

3 Rowe 剪胀方程简介

Rowe 系统地研究了颗粒材料的变形机理, 并提出了“最小能比原理”^[4]。其能比方程为

$$\text{能比 } \bar{E} = \frac{\text{外力对颗粒单元作功}}{\text{颗粒单元对外作功}}$$

Rowe 假定颗粒之间的相互作用可以用两个滑块的相互作用来反映, 并认为, 真实颗粒单元的滑动变形应使能比 \bar{E} 取极小值, 用 K_f 表示, 由此导出

$$K_f = (\bar{E})_{\min} = \tan^2(45^\circ + f_{cv}/2) \quad (3)$$

其中, f_{cv} 为滑动摩擦角。

在常规三轴压缩条件下, Rowe 剪胀方程可以写为

$$s_1/s_3 = 2K_f(-de_3^p/de_1^p) \quad (4)$$

式中, de_3^p, de_1^p 为不可恢复的塑性应变。

Rowe 剪胀方程曾得到了广泛的讨论, 主要是针对 Rowe 在建立方程过程中对变形机理所作的假定以及最小能比原理的物理意义。虽然 Rowe 剪胀方程假定单一滑移结构, 同时对颗粒滑移的认识也是完全虚构的, 但大量的粗粒土试验表明, Rowe 剪胀模型却能够比较合理地反映粗粒土颗粒材料的体变过程^[1]。

4 非线性剪胀模型

4.1 剪胀模型的应力应变关系

如果把土的应力和应变用不变量表示, 土的压硬性表示球应力 p 对偏应变 e_s 的影响, 而剪胀性则表示偏应力 q 对球应变 (体应变) e_v 的影响。若考虑这种交叉影响, 广义虎克定律不再适用, 必须改用下式代之^[5]

$$de_v = \frac{dp}{K_p} + \frac{dq}{K_q}, \quad (5)$$

$$de_s = \frac{dq}{G}, \quad (6)$$

式中, K_p , K_q , G 分别称为体变模量、剪胀模量、剪切模量。上式意味着忽略了球应力 p 对偏应变 e_s 的直接影响, 将这种压硬性体现在简布 (Janbu) 公式非线性关系上。以上表述实际上就是次弹性模型的一种^[5]。

4.2 体变模量 K_p 和剪切模量 G 的确定

(1) 由邓肯-张模型确定切线弹性模量 E_t (式2)。

(2) 假定泊松比 n 为常数。大小可根据各向等压固结试验 $e_v - \lg p$ 曲线关系式 $e_{vp} = e_{vp}^0 + I_p \lg(p/p_a)$ 求得弹性体变模型, $K_p = 2.303p/I_p$, 及三轴压缩试验得到的初始切线模量 $E_t = K_{pa}(s_3/p_a)^n$, 由下式联合确定

$$m = 0.5 - \frac{E_t}{6K_p}, \quad (7)$$

亦可由三轴压缩试验体变曲线拟合中试算确定。

(3) 由下式换算体变模量 K_p 和剪切模量 G

$$K_p = \frac{E_t}{3(1-2m)}, \quad (8)$$

$$G = \frac{E_t}{2(1+n)}. \quad (9)$$

4.3 剪胀模量 K_q 的确定

(1) 针对三轴试验体应变, 分离剪应力引起的体应变

$$de_v^q = de_v - dp/K_p. \quad (10)$$

(2) 假定三轴试验的轴向应变 de_1 (为了统一, 表示为 de_1^q) 和剪应力引起的体应变 de_v^q 服从 Rowe 剪胀方程 (下文验证)。变换式 (4) 有

$$\frac{s_1}{s_3} = -K_f \frac{de_v^q - de_1^q}{de_1^q} = -K_f \frac{de_v^q}{de_1^q} + K_f, \quad (11)$$

即

$$\frac{de_v^q}{de_1^q} = 1 - \frac{s_1/s_3}{K_f}, \quad (12)$$

而三轴试验的轴向应变为

$$de_1^q = \frac{dq}{E_t}, \quad (13)$$

则

$$de_v^q = \left(1 - \frac{s_1/s_3}{K_f}\right) \frac{dq}{E_t}. \quad (14)$$

(3) 剪胀模量可由式 (14) 导得如下

$$K_q = \frac{dq}{de_v^q} = \frac{K_f s_3}{K_f s_3 - s_1} \cdot E_t, \quad (15)$$

式中, K_f 为模型参数, 由试验确定。

从上式可以看出, 在三轴剪切过程中, 剪胀模量是不连续的。

当 $s_1 < K_f s_3$ 时, K_q 为正, 所以 $de_v^q > 0$, 表明开始剪切时, 剪应力引起的体应变是剪缩。

当 $s_1 = K_f s_3$ 时, K_q 为 ∞ , 此时, 剪应力既不引起剪缩也不引起剪胀。在这一应力点上, K_q 经历了两种变化趋势, 其一, 当 $s_1 \rightarrow (K_f s_3)^-$, $K_q \rightarrow +\infty$, 此时 $de_v^q \rightarrow 0^+$, 表明剪应力不引起剪缩。其二, $s_1 \rightarrow (K_f s_3)^+$, $K_q \rightarrow -\infty$, 此时 $de_v^q \rightarrow 0^-$, 表明剪应力不引起剪胀。

当 $s_1 > K_f s_3$ 时, K_q 为负, 所以 $de_v^q < 0$, 表明剪应力引起的体应变是剪胀。

从以上分析可知, K_q 经历了从一正数逐渐增大到 $+\infty$, 又从 $-\infty$ 逐渐增大到某一负数, $K_f s_3 = s_1$ 是 K_q 的间断点。在有限元计算中, 为了保证计算的正常进行, 可采用如下方法, 当 $|K_f s_3 - s_1| < 0.001$ 时, 取 $|K_f s_3 - s_1| = 0.001$ 计算 K_q , 或直接将剪胀模型的模量矩阵退化为弹性矩阵。

4.4 有限元计算分析

三参量 K - G 模型 (或剪胀模型) 比两参量非线性弹性模型从力学概念上看应该更加合理, 然而, 在数值分析中往往简单地将 $K_t = K_p K_q / (K_q + K_p \cdot dq/dp)$ 作为综合体变模量进行有限元分析。应该注意到, 综合体变模量 K_t 不仅与应力大小有关, 而且与应力增量比 dq/dp 大小有关, 在非线性叠代分析中, 应力增量比 dq/dp 变化是很大的, 这无疑增加了收敛难度。针对该问题提出了三参量 K - G 模型模量矩阵的计算方法^[1]。

将三参量模型的应力应变关系写成如下形式:

$$\{ds\} = [D]_{pq} \{de\}. \quad (16)$$

根据剪应力引起的体应变是球应变特性, 并假定各个方向上的剪胀性应变大小相等, 从而得模量矩阵:

$$[D]_{pq} = [D] - \frac{[D]\{C\}\{\partial q/\partial s\}^T [D]}{K_q + \{\partial q/\partial s\}^T [D]\{C\}}. \quad (17)$$

表达形式类似于弹塑性矩阵, 式中 $[D]$ 为弹性矩阵, 由 K_p (体变模量)、 G (剪切模量) 确定, $\{C\} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T / 3$, $\{\partial q/\partial s\}$ 为广义剪应力 q 对各应力分量的偏导数向量, K_q 为剪胀模量。由上式可以看出, 模量矩阵 $[D]_{pq}$ 仅与应力大小有关, 这无疑可以提高数值分析的精度。

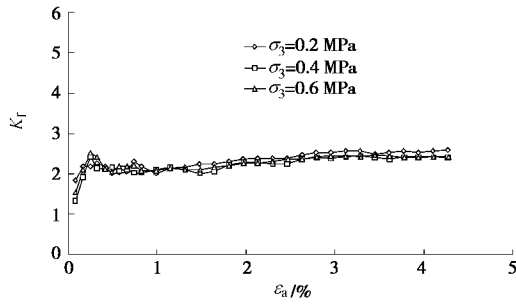
4.5 剪胀模型参数 K_f 试验成果

为了确定剪胀模型参数 K_f , 同时为了验证剪胀模

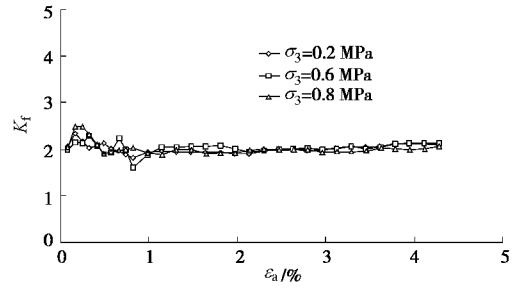
型的合理性, 对多种颗粒材料(单粒径玻璃球、双粒径的玻璃球混合体、单级配砾石、多种砂砾石料、多种堆石料、三峡风化砂)进行试验, 并对各种颗粒材料参数 K_f 进行分析。图 2 为 8 种典型颗粒材料按式 (11) 计算的 Rowe 剪胀模型参数 K_f 。从图 2 可以看出, 无论是形状规则的玻璃球, 还是实际粗粒土, 对一种材料而言, 参数 K_f 的归一性都非常好, 不同应力状态下参数 K_f 均近似为一个常数。在较小的应变下

($e_a < 1\%$) 略有波动, 更大的原因是小应变增量下 K_f 对试验误差过于敏感。因而可以推断, 一种材料的参数 K_f 为一常数, 不受应力状态改变而变化。

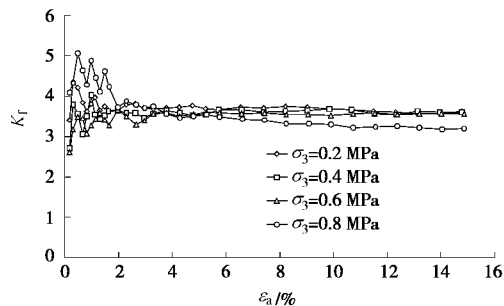
材料不同, 参数 K_f 不同。本文所及材料, 参数 K_f 在 2.00~3.79 之间变化。参数 K_f 愈小, 材料的剪胀性愈大。因此, 可以认为参数 K_f 是颗粒组特征的一种体现, 它决定了材料的应力应变性质。



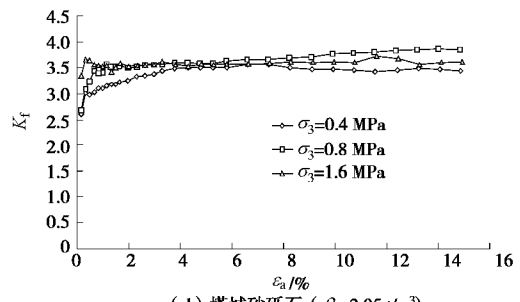
(a) 2 mm 单粒径玻璃球 ($\rho_d=1.55 \text{ t/m}^3$)



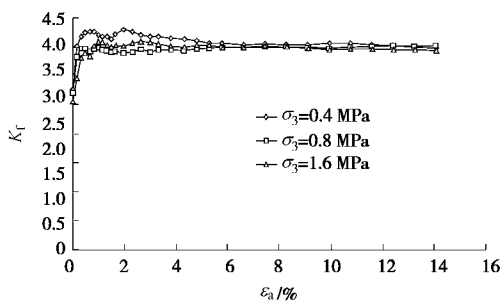
(b) 粒径 2 mm & 22 mm 玻璃球 ($\rho_d=1.79 \text{ t/m}^3$)



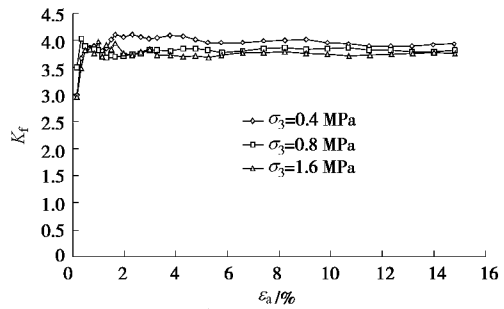
(c) 粒径 10-20 mm 单级配砾石 ($\rho_d=1.73 \text{ t/m}^3$)



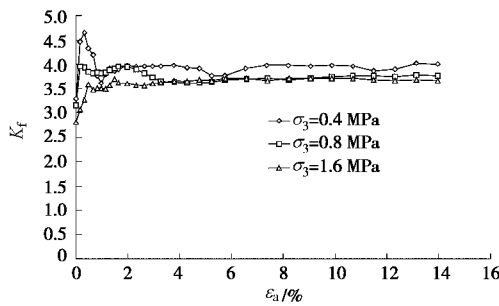
(d) 塔城砂砾石 ($\rho_d=2.05 \text{ t/m}^3$)



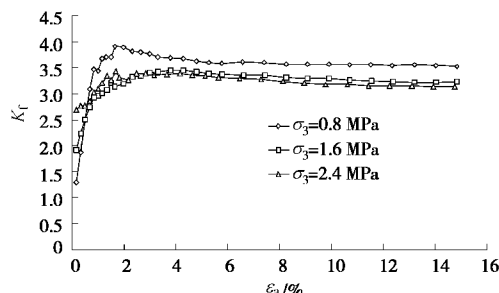
(e) 塔城砂砾石 ($\rho_d=2.10 \text{ t/m}^3$)



(f) 塔城砂砾石 ($\rho_d=2.17 \text{ t/m}^3$)



(g) 塔城砂砾石 ($\rho_d=2.27 \text{ t/m}^3$)



(h) 双江口砂砾石 ($\rho_d=2.10 \text{ t/m}^3$)

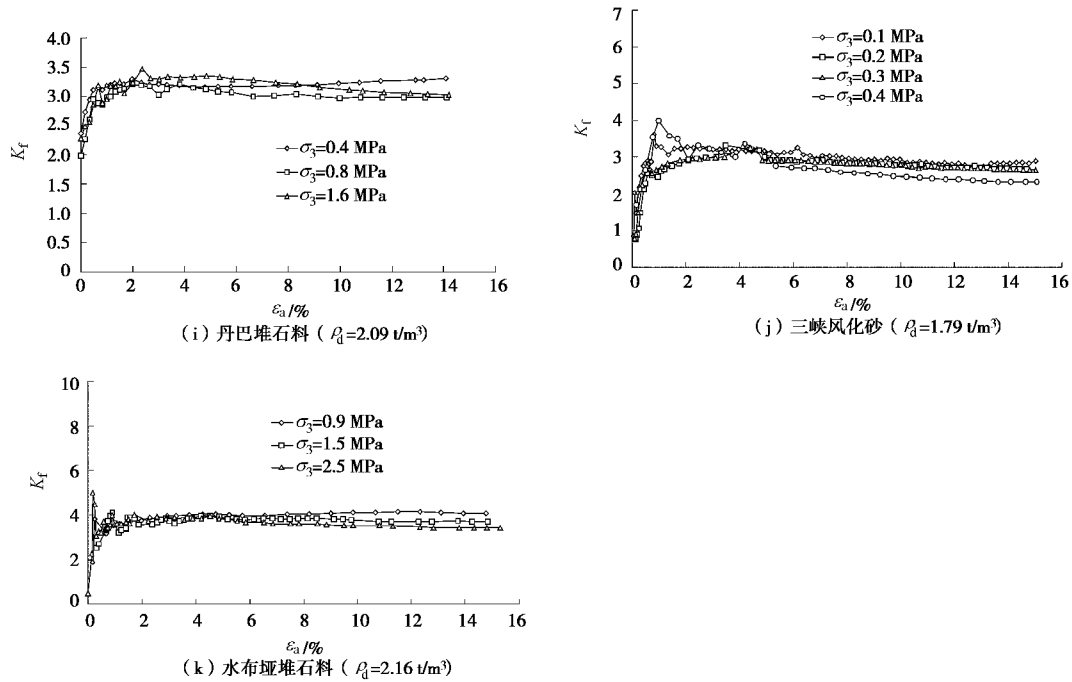
图2 几种典型颗粒材料的参数 K_f 的变化Fig. 2 Variation of K_f for several representative particle materials

表1 模型参数

Table 1 Model parameters

材料	密度 $\rho / (\text{t} \cdot \text{m}^{-3})$	模型参数						
		c/kPa	$j/(\text{°})$	K	n	R_f	n	K_f
2 mm 玻璃球	1.55	14	26.9	1624	1.005	0.98	0.48	2.25
2 mm&22 mm 玻璃球	1.79	12	23.4	3462	0.304	0.97	0.48	2.00
单级配砾石	1.73	133	34.5	1774	0.045	0.94	0.30	3.57
	2.05	126	37.5	1569	0.158	0.91	0.34	3.57
塔城砂砾石	2.10	159	36.7	2635	0.181	0.95	0.34	3.52
	2.17	274	35.9	3888	0.188	0.94	0.34	3.79
	2.27	306	37.0	6676	0.194	0.93	0.34	3.73
双江口砂砾石	2.10	192	36.1	2004	0.200	0.84	0.32	3.22
丹巴堆石料	2.09	123	37.0	759	0.315	0.86	0.32	3.17
三峡风化砂	1.79	41	36.6	289	0.281	0.76	0.25	2.75
水布垭堆石料	2.16	343	38.0	1400	0.291	0.84	0.32	3.70

5 模型参数

针对上述 8 种材料 11 组试验成果,采用本文提出的剪胀模型进行了拟合,图 3 给出了体变试验曲线和模型计算曲线,为了便于分析,同时给出了剪应力引起的体变试验曲线和模型计算曲线。可以看出,模型计算值和试验实测值是非常吻合的,说明将体应变分为球应力 p 和偏应力 q 引起的体应变两部分是合理的,而后者决定了不同围压下体应变差值及剪切过程体应变曲线形态。这比一般非线性弹性模型先假定体应变只与球应力 p 有关,再改变不同应力状态下泊松比 n (或体变模量 K_p) 大小来模拟不同应力状态下体应变,从力学概念来看要更加合理。

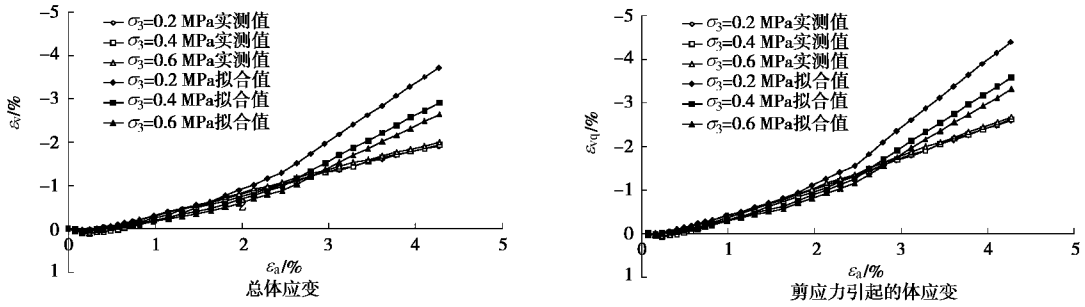
同时可以看出,对于颗粒材料,偏应力 q 引起的体应变是十分显著的,不管是其绝对值还是不同应力

状态下差值。本文的剪胀模型仅采用一个参数 K_f 达到准确模拟不同应力状态下体应变,应归功于 Rowe 剪胀方程能准确反映颗粒材料变形机理。

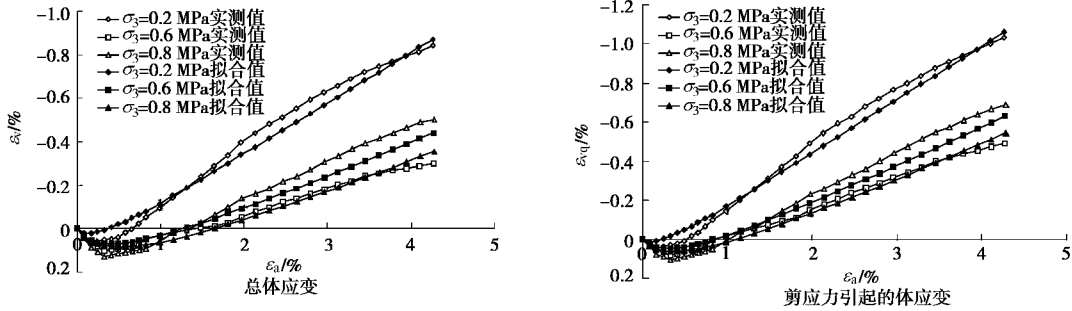
三轴试验条件下,一般粗粒土是先剪缩后剪胀应具备普遍性,只有单粒径形状规则的玻璃球不具剪缩过程。Rowe 剪胀方程都能准确反映这一特征。

剪胀模型体变由两个参数 μ 和 K_f 分别通过虎克定律和 Rowe 剪胀方程模拟球应力 p 和偏应力 q 引起的体应变。剪胀模型建立了体变模量 K_p 、剪胀模量 K_q 、剪切模量 G (或 E_t , n , K_q) 三参量与应力状态关系,共 7 个模型参数。至于卸荷准则及卸荷模量取值暂参考邓肯-张模型。由上述 8 种材料 11 组试验整理的模型参数如表 1 所示。

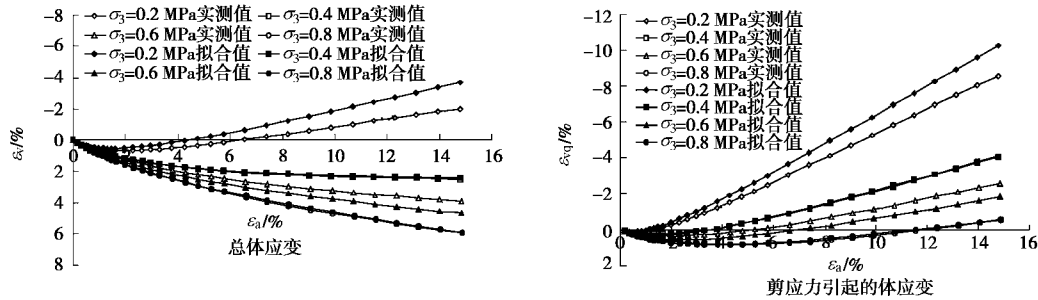
建议的剪胀模型共 7 个模型参数物理意义明确。 c 和 j 为材料强度指标, K 和 n 为简布 (Janbu) 公式参



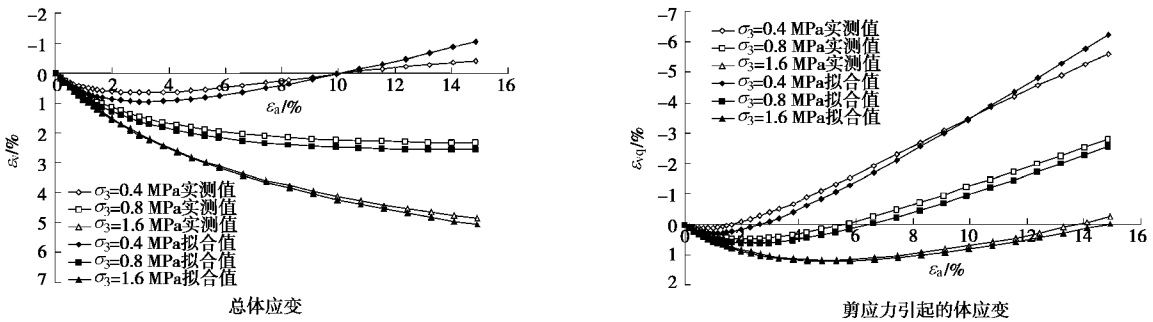
(a) 2 mm单粒径玻璃球 ($\rho_d=1.55 \text{ t/m}^3$, $\nu=0.48$)



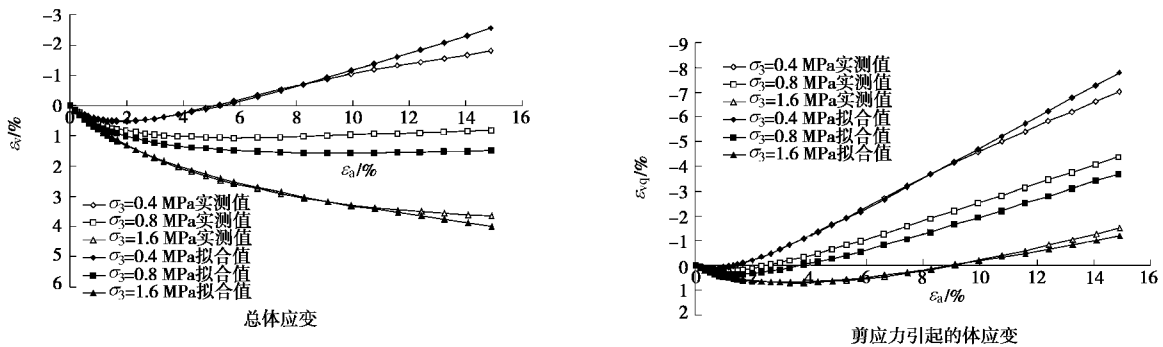
(b) 粒径2 mm&22 mm玻璃球 ($\rho_d=1.79 \text{ t/m}^3$, $\nu=0.48$)



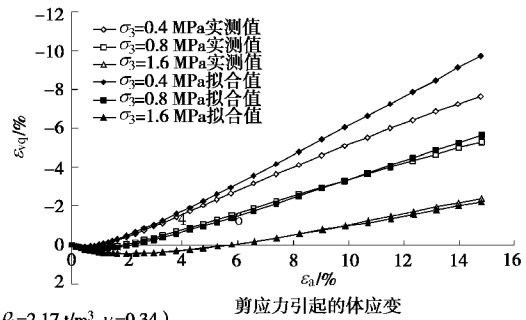
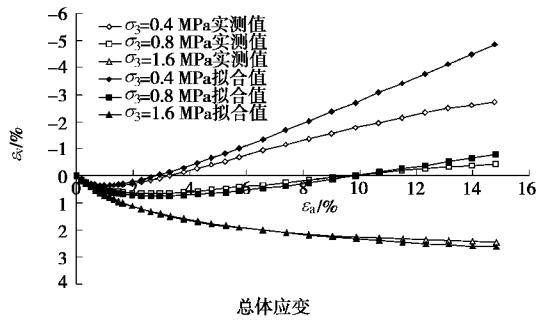
(c) 粒径10~20 mm单级配砾石 ($\rho_d=1.73 \text{ t/m}^3$, $\nu=0.3$)



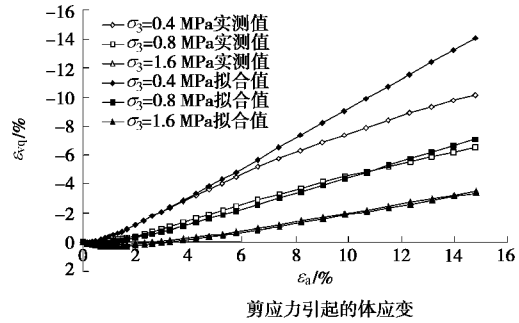
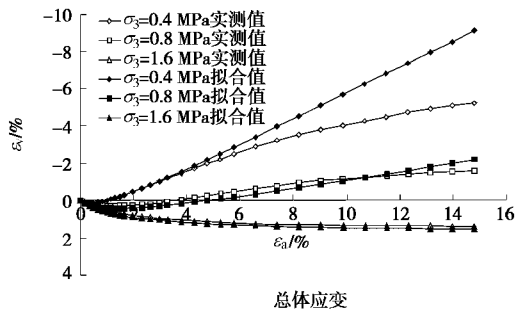
(d) 塔城砂砾石 ($\rho_d=2.05 \text{ t/m}^3$, $\nu=0.34$)



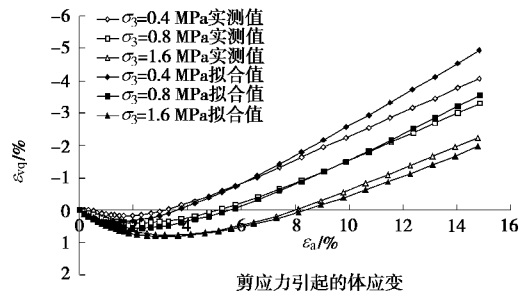
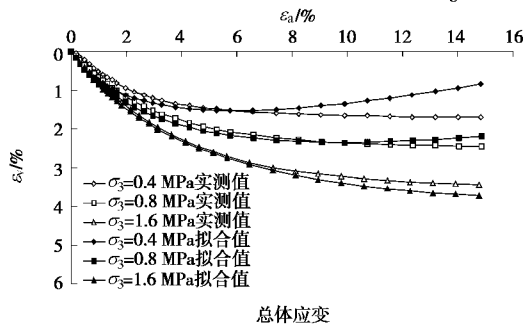
(e) 塔城砂砾石 ($\rho_d=2.10 \text{ t/m}^3$, $\nu=0.34$)



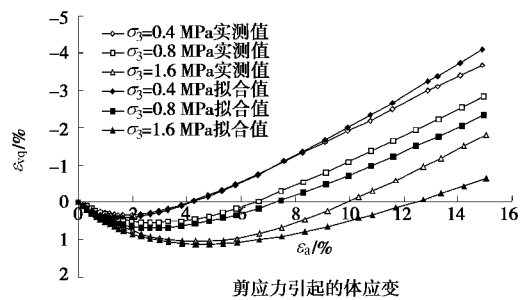
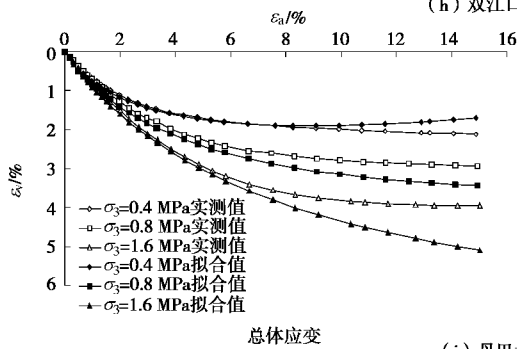
(f) 塔城砂砾石 ($\rho_s=2.17 \text{ t/m}^3$, $\nu=0.34$)



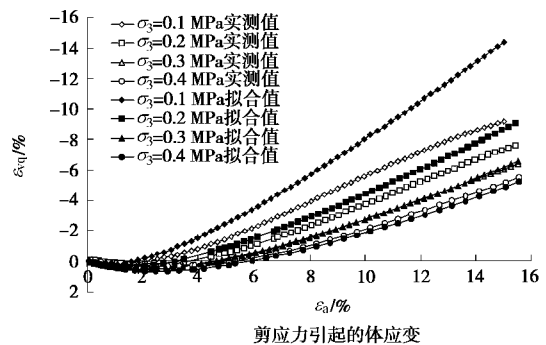
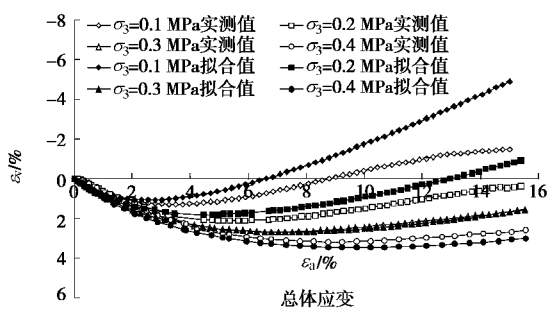
(g) 塔城砂砾石 ($\rho_d=2.27 \text{ t/m}^3$, $\nu=0.34$)



(h) 双江口砂砾石 ($\rho_d=2.10 \text{ t/m}^3$, $\nu=0.32$)



(i) 丹巴堆石料 ($\rho_d=2.09 \text{ t/m}^3$, $\nu=0.32$)



(j) 三峡风化砂 ($\rho_d=1.79 \text{ t/m}^3$, $\nu=0.25$)

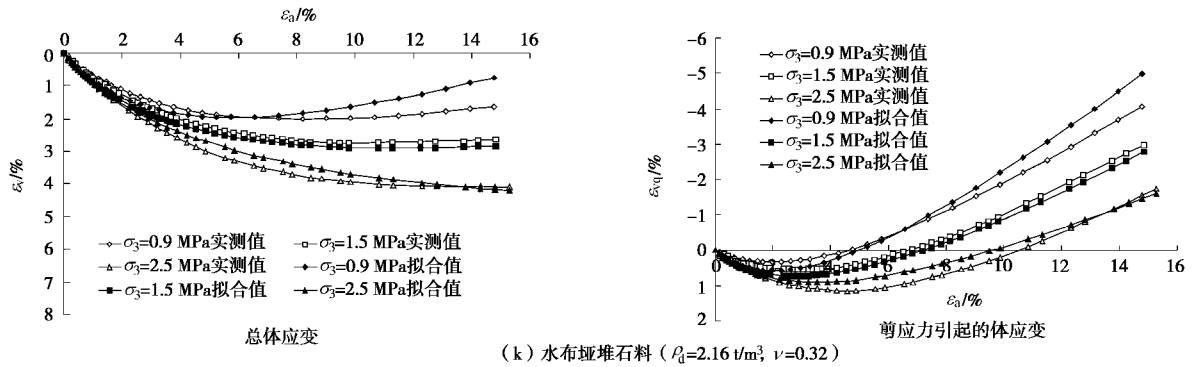


图3 各种颗粒材料的体变拟合效果

Fig. 3 Fitting results of several particle materials

数, R_f 为破坏比, n 为泊松比, K_f 为材料最小能比。这些参数与粗粒料的物理性, 如级配、密度、岩性、颗粒形态、颗粒排列等因素相关, 不同粗粒料参数具可比性, 便于经验积累。

6 结 论

土的本构关系模型建立是现代土力学的标志, 一代又一代土力学工作者投入了大量心力, 提出的土的本构关系模型数以百计, 土的本构模型研究是土力学长久的重要课题。本文基于邓肯-张模型和 Rowe 剪胀方程, 假定土体的体应变为球应力引起的体应变和剪应力引起的体应变之和, 初步提出了一种新的三参量非线性剪胀模型, 是追求建立实用性模型所取得的一点成果, 也许是沧海一粟。该模型理论上是否存在缺陷, 用于工程数值分析效果如何还有待今后进一步验证。但有两点是有意义的。

(1) 用实测资料验证了用 Rowe 剪胀方程描述颗粒材料变形是有价值的。

(2) 用三轴试验的轴向应变和剪应力引起的体应变来表述 Rowe 剪胀方程是可行的。

参考文献:

- [1] 程展林, 丁红顺, 吴良平. 粗粒土试验研究[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(8): 1151 - 1158. (CHENG Zhan-lin, DING Hong-shun, WU Liang-ping. Experimental study on mechanical behaviour of granular material[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(8): 1151 - 1158. (in Chinese))
- [2] KONDER T L. Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation, American Society of Civil Engineering, 1963, 89(1): 115 - 143.
- [3] DUNCAN J M, CHANG C Y. Nonlinear Analysis of stress and strain in soils[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, American Society of Civil Engineering, 1970, 96(5): 1629 - 1653.
- [4] ROWE P W. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of panicles in contact[C]// Proceedings of Royal Society(Series A), London, 1962(269): 500 - 527.
- [5] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000. (SHENG Zhu-jiang. Theoretical soil mechanics[M]. Beijing: China Water Power Press, 2000. (in Chinese))

勘 误

本刊 2010 年第 1 期中英文目次“讨论”栏目中的作者标注有误, “张黎明, 王在泉, 王志强”应为“张黎明, 王在泉”; “ZHANG Li-ming, WANG Zai-quan, WANG Zhi-qiang” 应为 “ZHANG Li-ming, WANG Zai-quan”, 特此更正, 并向作者和读者深表歉意。

(《岩土工程学报》编辑部)