

单元集成法在地基承载力分析中的应用

尹宏磊, 徐千军, 李仲奎

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

摘要: 基于塑性力学上限定理的地基承载力分析, 在数值上可以通过单元集成法来实现。它采用类似于有限元网格划分的方式离散地基, 并设定一个机动许可的滑动机构, 在此滑动模式下, 可以求得每个单元贡献的外力功率和内能耗散率。把所有单元的能量变化率相加, 就是地基滑裂体的总能量变化率。然后, 根据上限定理可以求得与滑动机构相对应的极限外载荷, 并通过非线性数学规划法找到其最小值。采用对数螺旋滑裂面的单滑块机制, 对几个典型的地基极限承载力问题进行了分析, 其结果说明了该方法的有效性。

关键词: 地基承载力; 极限分析; 上限法; 单元集成法

中图分类号: X705; TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2007)02-0285-04

作者简介: 尹宏磊(1980-), 男, 河南人, 博士研究生, 主要从事边坡稳定方面的研究。E-mail: yinh103@mails.tsinghua.edu.cn。

Application of element integration method in bearing capacity analysis of foundation

YIN Hong-lei, XU Qian-jun, LI Zhong-kui

(State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Bearing capacity analysis based on the upper bound theorem of plasticity could be numerically performed by element integration method. Small triangle elements were used to discretize the foundation soil. A kinematically admissible velocity field was supposed independent of the element meshing. Work done by the body forces, surface loads, as well as internal energy dissipations within an element were conveniently obtained under such a failure mechanism. The total energy could be calculated from the energy integration among all the elements. The limit external load could therefore be solved from the upper bound limit theorem, and its minimum value could be obtained from the optimization method. For single block mechanism, such as log-spiral slip surface, the validity of the proposed method was verified with two typical examples.

Key words: bearing capacity of foundation; limit analysis; upper bound method; element integration method

0 引言

在进行建筑物设计时, 要求作用于建筑物基础底部的压力不能超过地基的极限承载力。长期以来, 地基承载力的分析一直受到关注, Rankine、Terzaghi、Prandtl、Hill 等许多学者都在这个领域里作出过重要贡献^[1]。但是传统的地基承载力分析是建立在滑移线理论上的, 对计入土体自重、荷载偏心、倾斜、土质分层等复杂情况, 不能获得闭合解, 需大量引入经验修正系数, 因此许多学者又致力于发展有效的数值方法来解决这个问题^[2]。在这些数值方法中, 既包括有限元、离散元、边界元、FLAC 这样的数值仿真方法, 也包括直接求解极限载荷的方法。其中, 基于塑性力学上限定理的极限分析方法具有一定的代表性^[3]。这种方法具有坚实的理论基础, 利用经典塑性力学的上限定理从上限方向逼近真实解。在许多简单的问题中,

其计算结果都与工程中广泛采用的极限平衡法得到的结果相同^[4]。上限分析的关键是构造机动许可的速度场(或滑动机构), 并计算该速度场所对应的外力功率和内能耗散率。如果设定外力功率和内能耗散率相等, 则可以解出该速度场所对应的极限载荷。极限载荷的最小值可以通过对速度场的优化得到。

目前在极限分析中主要采用单元网格划分和条柱划分这两种方式来离散计算区域。这两种离散方式各有优缺点。关于单元法的有代表性的工作有 Sloan、Lyamin 和 Kim 等利用有限元结合数学规划的方法求解二维和三维地基的极限承载力问题^[5-7], 以及殷建华等人借助于刚体有限元和非线性数学规划来评价二维和三维边坡的稳定性问题^[8]。这类方法能够利用有限单元法对边界适应性强的优点, 并且不需要预先假定

滑动模式。但这种方法以单元运动速度作为未知量,对优化问题来说,其计算量是很大的。另一方面,刚体有限元法实际上假定了单元交界面为破坏面。这在一定程度上决定了其计算结果与网格剖分方式的相关性。

条柱划分是极限平衡分析中常用的离散形式^[9]。在它的启发下,Donald和陈祖煜应用塑性力学上限定理,从变形协调条件出发,通过斜条分建立运动许可速度场,根据外力功率和内能耗散率相平衡的原理确定安全系数。通过优化条分形式来优化速度场,从而得到最小的安全系数^[10]。这种方法不仅在边坡稳定分析中得到了广泛的应用,在地基承载力计算中也取得了很好的效果^[3]。

条分法的优点是计算量小,计算时需要输入的数据较少。需要预先假定破坏机构也是它的一个特点(但不一定就是缺点),并且为了处理上的方便,通常假定滑裂面在通过不同地层时是不转折的。尽管这与塑性极限理论的要求^[4]并不符合。条分法的一个缺点是不容易达到较高的通用性。与极限平衡法中常用的竖直线分不同,上限条分法在对速度场进行优化时,不仅涉及滑裂面位置的改变,还包括斜条分角度的改变,这给程序开发带来了一定的麻烦。在千差万别的实际工程问题面前,即使是很有名的条分计算程序也很难具有像有限元分析软件那样的通用性。过去在计算机软硬件水平都很差的情况下,条分法计算量小、前处理简单的优点曾经显得十分重要。但在目前个人计算机的容量和速度都大大提高,并且很多有限元分析软件都具有强大的网格自动划分能力的情况下,更加应该强调的是如何增加极限分析程序的通用性,使用户能够像使用有限元分析软件那样去使用它。

本文采用的单元集成法也是采用单元网格划分这种离散形式,但仍需要预先假定破坏机构,后面的计算过程更类似于条分法。它只用到了有限元法的单元划分和单元编号规则,而没有用到其它的东西。因此,与有限元法或刚性元法是完全不同的方法。

和刚体有限元上限分析方法以及应用有限单元法进行上限分析的方法相比,单元集成法方法具有更为简单有效的优点。和条分法相比,单元集成法的计算时间稍长(但一次计算的时间差别不明显),且需要用户输入地基的单元剖分信息,而换来的是积分计算的精细、程序开发的简化以及通用性的提高。在计算机软硬件水平高度发展、有限元分析技术广泛普及的今天,许多工程师都熟悉有限元的网格划分和数据格式,并且手头都有功能强大的有限元前处理软件(如ANSYS),可以非常容易地准备一个有限元网格。在这种情况下,需要进行单元网格划分可能不再是一种

数值方法的缺点了。目前,这种方法在边坡稳定分析中已经显示出较强的适用性^[11],本文将采用这种方法进行地基承载力的分析。

1 单元集成法的理论基础

由于构成地基的土体服从Mohr-Coulomb破坏准则,当外力增大到某一定值时,就会进入极限状态。在极限状态下,如果地基内各点的运动速度满足相容条件和速度边界条件,则称之为机动许可的速度场,记为 V^* 。又记 T^* 为对应于 V^* 的极限外载荷, W 为地基受到的体积力, D^p 为系统沿速度间断面的内能耗散率。塑性力学上限定理指出:在所有与机动许可速度场对应的载荷中,极限载荷最小。即真实的极限外载荷小于由下式解出的 T^* ,

$$D^p = WV^* + T^*V^* \quad (1)$$

根据这一定理,如果令对应于某一机动许可速度场的外力功率和内能耗散率相等,则求得的载荷大于实际的极限载荷。通过对速度场的优化,则可以得到接近于真实极限载荷的值。因此,极限分析上限解就是在许多可能的机动许可速度场 V^* 中,寻找一个使 T^* 最小的临界速度场(破坏机构)。

利用塑性力学上限定理进行地基承载力分析时,需要首先构造机动许可速度场 V^* ,在滑裂体上按式

(1)计算外力功率和内能耗散率,并全部相加。在条分法和刚体有限元上限分析法中,是通过条柱和单元的划分来构造速度场的;同时,条柱和单元还是进行能量积分的区域。而在本文所采用的单元集成法中,速度场的构造与单元的划分是分开处理的。这与流形元法中积分区域与插值区域可以不一致的思想是类似的。

地基通常有Prandtl机构和Hill机构两种失效模式,它们是平面滑裂面和对数螺旋滑裂面的不同组合方式。如果采用单一滑块机构,对数螺旋面是一种最优的选择。当摩擦角为0时,对数螺旋面可以退化为圆弧面。本文我们只讨论对单一数螺旋滑裂面这种滑动模式,暂时不考虑多滑块机构。

当地基失稳时,滑裂体沿滑裂面滑动。在确定的滑动模式和滑裂面参数下,滑裂体内每一点的运动速度是确定的;同时滑裂面的位置以及滑裂面上每一点的速度也是确定的。由于所划分的单元与滑裂体相比面积很小,以单元形心处的速度乘以该单元的重量并在重力方向上投影,就是重力对该单元所作的功率;把分布的外荷载等效成为其作用点处的各个单元上的集中力后,这部分功率也可以类似地求得;另一方面,每个通过滑裂面的单元会与滑裂面交出一条“微线段”,这条微线段处的速度与该微线段长度以及凝聚力

的乘积在该微线段方向上的投影, 就是该微线段上的内能耗散率。对所有单元完成上述计算后, 把每个单元上的外力功率和内能耗散率全部相加, 就得到了整个滑裂体的外力功率和内能耗散率。令外力功率和内能耗散率相等, 则可根据上限定理求得极限载荷的上限。

为了求得最小的极限载荷, 需要对速度场 (即滑动机构) 进行优化。在本文提出的单元集成法中, 划分的单元只用于能量积分, 与滑动机构的构造无关。这给单元划分带来了很大的灵活性。而滑裂面位置调整以后, 并不需要改变单元网格, 只要求滑裂面以内的单元根据其形心位置与滑裂面位置相对关系的变化而把速度方向作出相应变化即可。按照这个思想, 在进行程序开发时只需要完成对一个形状简单的单元 (三角形或四边形单元) 的操作, 再对单元编号循环, 就可以完成对整个滑裂体的计算了。与条分法上限分析程序相比, 其开发难度大大降低, 而通用性则大大增加了。

2 对滑裂面的描述

对螺旋滑裂面的单滑块滑动机构, 滑裂面可由 X_o , Y_o 和 θ_o 这 3 个参数确定, 其中 (X_o, Y_o) 表示旋转中心, θ_o 表示初始旋转角。对于螺旋滑裂面, 在以旋转中心为原点的极坐标系中, 滑裂面上任意一点的旋转半径为

$$R = R_o \exp[(\theta - \theta_o) \tan \varphi] \quad (2)$$

式中, φ 为该点处材料的内摩擦角, θ 为该点处的旋转角, R_o 为初始旋转半径。当 X_o , Y_o 和 θ_o 确定后, R_o 是确定的。在直角坐标系下, 滑裂面的方程为

$$\left. \begin{aligned} X &= X_o - R \cos \theta \\ Y &= Y_o - R \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

滑裂面方程确定后, 可以根据它与一个单元的相对位置判断该单元是否处于滑裂体内, 从而决定是否需要计算该单元的外力功率; 另一方面, 还可以判断它与一个单元是否有交点。若有交点则可以给出交点坐标, 并计算该单元对内能耗散率的贡献。

从式 (2) 可以看出, 当螺旋滑裂面通过内摩擦角不同的两个地层时, 其旋转半径会发生突变, 因而滑裂面在此处会发生偏转。Michalowski 曾对此问题进行过专门讨论^[12]。在单元集成法中, 由于单元很小, 而且每个单元都可以赋予特定的土性参数, 因此设定 X_o , Y_o 和 θ_o 以后, 滑裂面在穿过不同地层时的偏转可由对数螺旋线方程自动体现, 而且也不会给程序计算带来任何麻烦。

3 算例

根据以上讨论的方法, 笔者编制了能够进行地基承载力分析的程序 ULCEI。如果定义岩土介质强度参数的储备为其稳定安全系数, 并设定外力功率和内能耗散率相等, 则可以通过求解一个标量方程得到安全系数。因此为了便于程序开发, 在 ULCEI 中, 求解的不是极限承载力, 而是在给定外荷载下滑裂体的安全系数。如果安全系数为 1.0, 则相应的外荷载就是极限承载力。为了对该方法及程序的有效性进行验证, 以下考察 2 个有理论解的经典算例。

3.1 均质水平地基的极限承载力分析

考察图 1 所示的均质、水平、无限、无重地基。假定土体的黏聚力 $c = 10 \text{ kPa}$, 内摩擦角 $\varphi = 20^\circ$ 。这时 Prandtl 和 Hill 机构给出了相同的理论解^[4]:

$$q_u = c \cot \varphi \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \exp[(\pi \tan \varphi)] - 1 \right\} \quad (4)$$

由此可得基础的极限承载力 q_u 为 148.35 kPa。以此数值带入 ULCEI 进行计算, 得到的安全系数为 0.996。

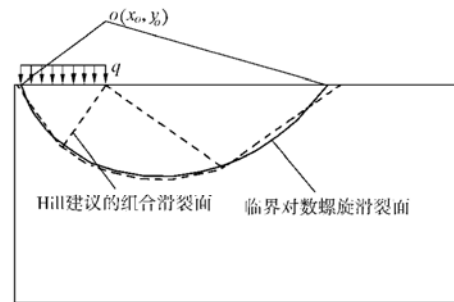


图 1 均质水平无重地基的承载力分析

Fig. 1 Bearing capacity analysis of a homogeneous horizontal weightless foundation

图 1 中所示的实线为通过优化得到的单滑块机构的临界对数螺旋滑裂面, 虚线为 Hill 建议的组合滑裂面。尽管二者有所不同, 但安全系数的计算结果却很接近, 只差 0.4%。

3.2 路基极限承载力分析

图 2 为一承受垂直荷载的路基^[8], 路肩倾角 $\alpha = 45^\circ$, 土体黏聚力 $c = 98 \text{ kPa}$, 内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$, 不计重度。Sokolovski 根据滑移线理论给出临界垂直荷载的计算公式为^[4]

$$q_u = c \cot \varphi \left\{ \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) \exp[(\pi - 2\alpha) \tan \varphi] - 1 \right\} \quad (5)$$

由此可得极限荷载为 1091.42 kPa。在这一垂直荷载的作用下, ULCEI 的计算的安全系数为 1.003。

图 2 中所示的实线为通过优化得到的单滑块机构

的临界对数螺旋滑裂面, 虚线为 Sokolovski 建议的组合滑裂面。尽管二者有所不同, 但安全系数的计算结果却很接近, 只差 0.3%。

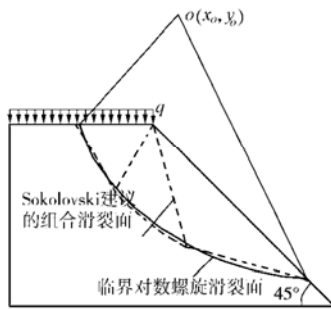


图 2 承受垂直荷载的无重路基的破坏模式

Fig. 2 Failure model of a weightless subgrade with vertical surface load

4 结 语

基于塑性力学上限定理的地基承载力分析, 在数值上可以通过单元集成法来实现。单元集成法的主要特点是单元网格只用于能量积分, 与滑动机构的构造无关。对于本文中的两个算例, 尽管所采用的单滑块机构的对数螺旋滑裂面与三滑块机构的滑移线场在形状上有所不同, 但所得的安全系数却与 1.0 的理论值非常接近。这说明单元集成法对求解地基承载力问题是一种有效的方法, 也说明单滑块机构对求解这类问题是有效的。

参考文献:

- [1] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 北京:水利电力出版社, 1996. (QIAN J H, YIN Z Z. Theory and analysis in geotechnique[M]. Beijing: Publishing Company of Water Resources and Electric Power, 1996. (in Chinese))
- [2] 龚晓南. 土工计算机分析[M]. 北京:建筑工业出版社, 2000. (GONG X N. Numerical analysis in geotechnique[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2000. (in Chinese))
- [3] 陈祖煜, 高峰. 地基承载力的数值分析[J]. 岩土工程学报, 1997, **19**(5): 6 - 13. (CHEN Z Y, GAO F. Numerical analysis of foundation bearing capacity[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, **19**(5): 6 - 13.)

- [4] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity [M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Co, 1975.
- [5] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 1989, **13**: 263 - 282.
- [6] LYAMIN A V, SLOAN S W. Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 2002, **26**: 181 - 216.
- [7] KIM J, SALGADO R, YU H S. Limit analysis of soil slopes subjected to pore-water pressures[J]. ASCE J Geotech and Geoenviron Eng, 1999, **125** (1): 49 - 58.
- [8] 殷建华, 陈健, 李焯芬. 岩土边坡稳定性的刚体有限元上限分析法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(6): 898 - 905. (YIN J, CHEN J, LEE C F. Upper limit analysis of stability of rock and soil slopes using rigid finite elements[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(6): 898 - 905. (in Chinese))
- [9] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析—原理、方法、程序[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2003. (CHEN Z Y. Soil slope stability analysis—theory, methods and program[M]. China Water Power Press, 2003. (in Chinese))
- [10] DONALD I, CHEN Z Y. Slope stability analysis by the upper bound approach: fundamentals and methods[J]. Can Geotech J, 1997, **34**(6): 853 - 862.
- [11] 徐千军, 李明元, 陆杨. 边坡稳定极限分析的单元集成法[J]. 岩土力学, 2006, **27**(7): 1028 - 1032. (XU Q, LI M, LU Y. Upper bound limit analysis of slope stability by element integration method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, **27**(7): 1028 - 1032. (in Chinese))
- [12] MICHALOWSKI R L. Bearing capacity of footing over two-layer foundation soils[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1995, **121**: 421 - 428.