



# 地震荷载作用下大坝非线性响应的混沌分析

张我华, 吴志军, 薛新华

(浙江大学岩土工程研究所, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 从能量角度出发, 推导出大坝-地基结构系统在地震荷载作用下响应的拉格朗日动力方程, 在此基础上建立了该系统的非线性动力学模型, 并运用混沌理论方法, 对系统的非线性动力学行为进行了时域、相空间、庞加莱映射、Liapunov 指数等内容的混沌分析和讨论。结果表明: 地基土层的密度、厚度等土层性质的变化都会对坝体的非线性响应表现出复杂的非线性混沌关系, 其通向混沌之路是通过倍周期分叉实现的。

**关键词:** 地震荷载; 动力响应; 混沌; 大坝; 非线性

中图分类号: TV698.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2006)10-1298-06

**作者简介:** 张我华(1945-), 男, 浙江大学外籍教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程力学的研究工作。

## Chaotic analysis of nonlinear response of dams under earthquake

ZHANG Wo-hua, WU Zhi-jun, XUE Xin-hua

(Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** The Lagrange dynamic equation of dam-foundation structure system under seismic load was derived from system energy. The nonlinear dynamic model of the system was established by using the chaotic theory, and the chaotic behavior of nonlinear dynamics the system response due to earthquake was discussed and analyzed in the time domain, in the phase space, by the Poincaré map, and with the Liapunov exponent and so on. It was shown that the variation of parameters of foundation soil property, such as the soil density, thickness and so on, would be chaotically related with the response of dam due to the seismic load.

**Key words:** seismic load; dynamic response; chaos; dam; nonlinear

## 0 引言

目前,我国的大坝建设处于一个快速发展的阶段,一批300 m级的高混凝土重力坝、拱坝将要兴建或正在兴建中,例如长江上游的溪洛渡、百鹤滩,雅砻江上的锦屏一、二级,乌江上的构皮滩等。一旦这些高坝发生破坏,将给国家和人民的生命财产带来巨大的灾难。地震是一种复杂的振动过程,它对建筑物的破坏作用十分复杂<sup>[1]</sup>。在抗震设计时,如何通过一种简便易行又符合实际情况的方法,将地震对建筑物(结构)的作用反映到建筑物的设计计算中去,使设计的建筑物在预计强度的地震作用下能保持不被破坏,这是人们一直在探索的问题<sup>[2]</sup>。试验表明岩土体或建筑材料在荷载作用下一般都表现出不同程度的非线性特征。事实上,大量由地震所导致的结构破坏的实例也已经表明,地震对建筑物的作用过程远比我们想象的要复杂得多,它不但与地震强度有关,在很大程度上还取决于结构本身对地震作用的响应(反应)特征。结构的非线性必然导致其对地震响应的非线性。

在一般情况下,堤坝与基础系统的动力响应处于

规则的和可预见的连续变化状态,但当其内外因素非线性演化的某些情况下,堤坝与基础系统的动力响应可能会从一种可预见的规则运动形式突然变化为具有随机特征的不可预见的混沌运动形式。这种系统突变所造成的混沌运动过程,用传统的分析方法是无法描述的。本文从系统能量的角度出发,推导了大坝-地基系统在地震荷载作用下响应的非线性动力方程,运用混沌理论进行了初步研究,得出了一些重要的结论。

## 1 大坝-地基系统动力方程的推导

设  $H$  为堤坝基础岩土层厚度,  $h$  为堤坝的高度,  $v_g$  为基础的水平地震位移,  $v_s$  为基础的竖直振动位移,地基水平运动的动力响应为  $v_f(x,t)$ , 岩土层密度为  $\rho_s$ , 坝体密度为  $\rho_d$ ,  $l$  为地基宽度,  $b_1$ 、 $b_2$  分别为坝顶和坝底截面的宽度(如图1所示)。堤坝-基础系统在地震荷载作用下主要产生水平方向和竖直方向的振动,堤坝任意水平截面的水平振动位移  $u(x,t)$  和竖直位移

$v(x,t)$ 可用坝顶的广义自由度  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ 和任意阶形函数  $\phi(x)$ ,  $\varphi(x)$ 表示为

$$u(x,t) = \phi(x)q_1(t), \quad v(x,t) = \varphi(x)q_2(t) \quad (1)$$

式中  $q_1(t)$  为坝顶的水平位移自由度;  $\phi(x)$  为坝体横向运动的形函数;  $q_2(t)$  为坝顶的竖直位移自由度;  $\varphi(x)$  为坝体竖向运动的形函数。

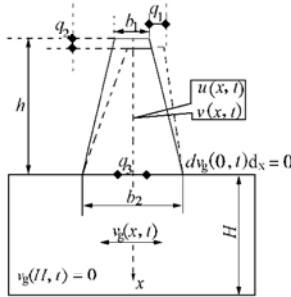


图 1 堤坝-基础系统模型图

Fig. 1 Model of dam-foundation system

系统的动能  $T$  可表示为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^h m(x) \left\{ \left[ \dot{u}(x,t) + \dot{v}_f(H,t) + \dot{v}_g \right]^2 + \left[ \dot{v}(x,t) + \dot{v}_s \right]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \iiint \rho_s \left[ \dot{v}_f(x,t) + \dot{v}_g \right]^2 dx dy dz \quad (2)$$

式中  $m(x) = \rho_d l \left[ \frac{x}{h} (b_2 - b_1) + b_1 \right]$  为变截面坝体的质量分布函数。

系统的势能  $E_J$  为坝体变形的应变能  $E_1$ 、基础变形的应变能  $E_2$  以及由于坝体自重引起的轴向变形位移的应变能  $E_3$  之和, 即

$$E_J = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2} \int_0^h M(x) \kappa(x) dx + \frac{1}{2} \iiint_V \tau \gamma dx dy dz + \frac{1}{2} EI \int_0^h \left[ \frac{x}{h} (b_2 - b_1) + b_1 \right] \left[ \frac{v(0,t)}{h} \right]^2 dx \quad (3)$$

式中  $\tau$  和  $\gamma$  分别为基础层的剪应力和剪应变。坝体横向弯曲的曲率  $\kappa(x)$  和弯矩  $M(x)$  分别为

$$\kappa(x) = \frac{d^2 u(x,t) / dx^2}{\left[ 1 + (du(x,t) / dx)^2 \right]^{3/2}}; \quad M(x) = EI(x) \kappa(x);$$

其中  $I(x) = \frac{x}{h} (I_2 - I_1) + I_1$  为  $x$  处截面的惯性矩,

$$I_1 = \frac{lb_1^3}{12}, \quad I_2 = \frac{lb_2^3}{12}; \quad \text{且 } x \text{ 处的宽度为 } b(x) = \frac{x}{h} (b_2 - b_1) + b_1.$$

坝顶端为自由端, 假定坝底为随基础地面一起运动的固定端。因此, 可对不同阶的形函数近似的把坝体水平运动表示为不同阶的单自由度运动, 其横向位移为

$$v(x,t) = \phi_n(x) q_1(t) = q_1(t) \cos \frac{n\pi x}{2h}, \quad n = (1, 3, 5 \dots) \quad (4)$$

严格讲, 式 (4) 中应为  $q_{1n}(x)$ , 为了简便仍用  $q_1(t)$ 。

应变能  $E_1$  为

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_0^h EI(x) \kappa^2(x) dx = \frac{E}{2} \int_0^h \left\{ \left[ \frac{x}{h} (I_2 - I_1) + I_1 \right] \left[ \frac{-q_1(t) \left( \frac{n\pi}{2h} \right)^2 \cos \frac{n\pi x}{2h}}{\left[ 1 + q_1(t) \left( \frac{n\pi}{2h} \right)^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{2h} \right]^{1.5}} \right]^2 \right\} dx \quad (5)$$

积分式 (5) 得

$$E_1 = \frac{E}{4} (I_1 + I_2) \left( \frac{n\pi}{2h} \right)^4 h q_1^2(t) - \frac{E}{4} (I_1 + I_2) \cdot \left( \frac{n\pi}{2h} \right)^7 \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) h^2 q_1^4(t), \quad (6)$$

$$\text{令 } \lambda_1 = \frac{E}{2} (I_1 + I_2) \left( \frac{n\pi}{2h} \right)^4 h; \quad B = 2 \left( \frac{n\pi}{2h} \right)^3 \sin \left[ \frac{(n+2)\pi}{2} \right] h.$$

$$\text{则有 } E_1 = \lambda_1 \left[ 0.5 q_1^2(t) + 0.25 \beta q_1^4(t) \right] \quad (7)$$

考虑地基水平方向的运动, 则可将地基土层假定为一维剪切梁模型<sup>[3]</sup>, 其剪切模量随深度按某函数  $G(x)$  形式变化, 可假定为幂函数形式, 即  $G = Ax^B$ , 其中  $A$ 、 $B$  为常数, 剪切梁的运动方程为

$$\rho_s \frac{\partial^2 v_f}{\partial t^2} + c \frac{\partial v_f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ G(x) \frac{\partial v_f}{\partial x} \right] = -\rho_s \frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2} \quad (8)$$

对上部结构  $n$  阶形函数所对应的基础的位移解可表示为剪切梁的形函数  $\psi_n(x)$  和地表面水平位移广义自由度  $q_3(t)$  的乘积形式  $v_f(x,t) = \psi_n(x) q_3(t)$ , 其中  $\psi_n(x)$  为

$$\psi_n(x) = \left( \frac{\beta_n}{2} \right)^b \Gamma(1-b) \left( \frac{x}{H} \right)^{\frac{b}{\theta}} J_{-b} \left[ \beta_n \left( \frac{x}{H} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] \quad (9)$$

式中  $J_{-b}$  为  $-b$  阶第一类贝塞尔函数;  $\beta_n$  为  $J_{-b} = 0$  的根,  $n=1, 3, \dots$ ;  $\Gamma$  是伽马函数;  $b, \theta$  为系数。

则基础变形的应变能  $E_2$  为

$$E_2 = \frac{1}{2} \iiint_V \tau \gamma dx dy dz = \frac{1}{2} AB l q_3^2(t) \int_0^H \left( \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right)^2 (H-x)^B dx \quad (10)$$

式 (3) 中第 3 项是坝体自重引起的轴向变形位移的应变能  $E_3$ 。由与  $n$  阶水平位移形函数协调的  $n$  阶竖向的位移形函数  $\varphi_n(x)$  和广义自由度  $q_2(t)$  得

$$v(x,t) = q_2(t) \varphi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{2h} q_2(t) \quad (11)$$

将式 (11) 代入  $E_3$  的表达式得

$$E_3 = \frac{b_2 + b_1}{4h} EI q_2^2(t) \quad (12)$$

因此, 系统的总势能  $E_J$  为

$$E_J = E_1 + E_2 + E_3 = \lambda_1 \left[ 0.5 q_1^2(t) + 0.25 \beta q_1^4(t) \right] + \lambda_2 q_2^2(t) + \lambda_3 q_3^2(t), \quad (13)$$

$$\text{式中 } \lambda_2 = \frac{b_1 + b_2}{4h} EI.$$

对位移关于时间求导后, 可得各速度表达式为

$$\dot{u}(x,t) = \dot{q}_1(t) \cos \frac{m\pi x}{2h}; \quad \dot{v}(x,t) = \dot{q}_2(t) \cos \frac{m\pi x}{2h}; \quad \dot{v}_f = \dot{q}_3(t) \psi_n(x), \quad (14)$$

将速度的表达式代入式(2)并积分,可以得到系统动能  $T$  表达式为

$$T = a_1 \dot{q}_1^2(t) + a_2 \dot{q}_1(t) [s_1 \dot{q}_3(t) + \dot{v}_g] + a_3 [s_1 \dot{q}_3(t) + \dot{v}_g]^2 + a_4 \dot{q}_2^2(t) + a_5 \dot{q}_2(t) \dot{v}_s + a_6 \dot{v}_s^2 + a_7 \dot{q}_3^2(t) + a_8 \dot{q}_3(t) \dot{v}_g + a_9 \dot{v}_g^2, \quad (15)$$

式中

$$a_1 = \left[ \frac{\rho_d l (b_1 + b_2) h}{8} - \frac{\rho_d l (b_2 - b_1) h}{2n^2 \pi^2} \right]; \quad a_2 = \frac{2\rho_d l b_2 h}{m\pi} - \frac{4\rho_d l (b_2 - b_1) h}{n^2 \pi^2};$$

$$a_3 = \frac{1}{4} \rho_d l (b_1 + b_2) h; \quad a_4 = \frac{\rho_d l b_2 h}{2} - \frac{5\rho_d l h (b_2 - b_1)}{8n\pi};$$

$$a_5 = \frac{HBl\rho_s}{2} 0.76\beta_n^{0.8} [J_{-0.4}^2(\beta_n) - J_{-1.4}(\beta_n)J_{0.6}(\beta_n)];$$

$$a_6 = \frac{1.4HBl\rho_s J_{0.6}(\beta_n)}{\beta_n^{0.6}}; \quad a_7 = \frac{HBl\rho_s}{2}; \quad s_1 = 1.13\beta_n^{0.4} J_{-0.4}(\beta_n).$$

考虑非保守力做的功(虚功),非保守力分内非保守力和外非保守力,内非保守力与结构阻尼的耗散功相关,分别采取简单弯曲和轴向运动的耗散功及基础内的阻尼耗散。则  $\delta w_1 + \delta w_2 + \delta w_3$  为内非保守力的功。堤坝迎水面的库水压力  $p(x) = \rho_w g x$  为外部非保守力,该水压力为静压力,当堤坝在横向、纵向运动时其在相应虚位移上也要做功为  $\delta w^*$ 。总耗散功为

$$\delta w = \delta w_1 + \delta w_2 + \delta w_3 + \delta w^*. \quad (16)$$

将式(13)、(15)、(16)代入拉格朗日方程<sup>[4]</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial E_i}{\partial q_i} = Q_r^i, \quad i = 1, 2, 3,$$

其中系统对应于广义坐标  $q_1(t)$ 、 $q_2(t)$  和  $q_3(t)$  的非保守力为

$$Q_r^1 = d_1 + d_2 \dot{q}_1(t); \quad Q_r^2 = d_3 \dot{q}_2(t); \quad Q_r^3 = d_4 \dot{q}_3(t).$$

于是,可得大坝在地震荷载作用下动力响应方程为

$$2a_1 \ddot{q}_1 - d_2 \dot{q}_1 + a_2 s_1 \dot{q}_3 + \lambda_1 (q_1 + \beta q_1^3) = -a_2 \ddot{v}_g + d_1, \quad (17)$$

$$2a_4 \ddot{q}_2 - d_3 \dot{q}_2 + 2\lambda_2 q_2 = -a_2 \ddot{v}_s, \quad (18)$$

$$2a_5 (1 + s_1) \ddot{q}_3 - d_4 \dot{q}_3 + 2\lambda_3 q_3 = -(a_6 + 2a_2 + s_1) \ddot{v}_g, \quad (19)$$

式中

$$d_3 = -c_2 l b_1 \frac{2mb_2 - 4b_2 + 4b_1}{n^2 \pi^2}; \quad d_4 = -c_3 \frac{1.35HJ_{0.6}(\beta_n)}{\beta_n^{0.6}},$$

$$d_1 = \rho_w g l \frac{2h^2 - 4h^2}{n^2 \pi^2}; \quad d_2 = -\frac{c_1}{h^2} \left[ \frac{mI_1}{4} + \frac{m(I_2 - I_1)}{2} + (I_2 - I_1) \right].$$

$c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$  为 3 个广义自由度对应的等效阻尼系数。

## 2 系统动力学模型产生的混沌效应

混沌是非线性系统演变的特性之一,它的基本特点之一是“对初始条件的极度敏感性”,即初始条件的一个很小的变化也可能引起系统很大的响应结果,并

且这种响应结果有着明显的不确定性<sup>[5]</sup>。堤坝在地震荷载作用下,由于地基厚度、地基岩土性质以及堤坝结构倾角等因素变化的影响,其动力响应也会出现不确定性,可以用非线性混沌理论来分析。

### 2.1 混沌理论简介

混沌作为非线性动力系统解的重要特征已引起了人们的广泛注意。混沌理论研究的目的是要揭示貌似随机(或无规则)的运动现象背后可能隐藏的简单规律,以求发现一大类复杂问题普遍遵循的一般规律,并利用这些规律为人类造福。混沌现象广泛存在于数学、力学、社会学、天文学等学科中。如何判断一个非线性动力系统是否存在混沌运动是混沌理论的重要研究内容之一,可从以下几个方面判断<sup>[6-7]</sup>:

(1) 计算 Liapunov 指数,若 Liapunov 指数大于零,则认为系统可能出现混沌。

(2) 计算吸引子的豪斯道夫(F.Hausdorff)维数,若该维数为分数,则认为系统可能出现混沌。

(3) 计算拓扑熵,若拓扑熵大于零,则认为系统可能出现混沌。

(4) 分析功率谱,若功率谱连续,则认为系统可能出现混沌。

(5) 绘制庞加莱映射图,如果庞加莱映射图既不是有限点集,也不是封闭曲线,则对应系统的运动可能是混沌运动。

由于篇幅所限,上述各种方法的具体算法和内容在此不一一列出,有兴趣的读者可以参阅相关文献,本文也暂不涉及拓扑熵和功率谱分析计算等内容。

### 2.2 系统动力学模型的建立

取系统一阶形函数分析,即  $n=1$ ,此时  $\beta_n=1.75$ ,  $A=2.0 \times 10^8$ ,  $H=15$  m,  $\theta_1=\pi/2$  (迎水面坝体倾角),  $h=15$  m (堤坝高度值),  $l=1$  m (取单位宽度坝体作研究),  $\theta_2=\arctan(1.765)$  (背水面坝体倾角),  $b_1=3.5$  m (坝顶面截面宽),  $E=2.8 \times 10^7$  (坝体弹性模量),  $\rho_d=2.5 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup> (坝体的密度),  $\rho_w=1.0 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup> (水的密度),  $\rho_s=2.0 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup> (基础介质的密度),  $\omega=6.89$  s<sup>-1</sup> (地震振动频率),则可得到  $a_5=0.22HBl$ ,  $a_6=0.61HBl\rho_s$ ,  $a_7=0.5HBl\rho_s$ ,  $s_1=0.0012$ ,  $\lambda_1=0.06ABlH^{2/3}$ 。

当截取的基础层范围较大时,略去一些无限小量,式(19)可以简化为

$$\ddot{q}_3 + \eta_3 \dot{q}_3 + \frac{0.44A}{H^3 \rho_s} q_3 = 1.4\alpha \ddot{v}_g = 1.4\alpha g \cos \omega t, \quad (20)$$

式中,  $\eta_3=2\xi\omega_1$  为基础的阻尼系数;  $\alpha$  为水平地震影响系数,一般取 0.1~0.3<sup>[8]</sup>。当  $\eta_3=0$  时,式(20)可

简化为  $\ddot{q}_3 + \omega_0^2 q_3 = F \cos \omega t$ , 代入式 (17) 并整理得式得

$$\ddot{q}_1 + \eta_1 \dot{q}_1 + \omega_0^2 (q_1 + \beta q_1^3) = p_0 \cos \omega t + c \quad (21)$$

式中  $\eta_1$  为坝体阻尼系数;  $c$  为常数;  $\omega$  为外部输入信号频率,  $\omega_0$  为结构固有频率, 由下式计算出

$$\omega_0^2 = \frac{k}{2a_1}, \quad p_0 = \frac{\alpha a_2 g}{2a_1} (1 + \frac{1.4s_1 \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2}), \quad c = \frac{d}{2a_1} \quad .$$

为便于分析, 引入如下变换关系

$$x = \sqrt{|\beta|} q_1; \quad t_1 = \omega_0 t; \quad c_1 = \frac{\sqrt{|\beta|}}{\omega_0^2} c; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \delta = \frac{\eta_1}{2\omega_0}; \quad p = \frac{\sqrt{|\beta|}}{\omega_0^2} p_0 \quad .$$

则式 (21) 可化为无量纲方程

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + x - x^3 = p \cos \bar{\omega} t_1 + c_1 \quad . \quad (22)$$

由此可知, 堤坝在地震荷载作用下响应的变化主要取决于 3 个方面: ① 堤坝参数, 如倾角、坝高、坝厚及材料性质等; ② 地基参数, 如地基岩土层厚度、密度、剪切模量等; ③ 地震荷载强度、周期等。下面就各因素的变化讨论大坝横向振动的混沌效应。

### 2.3 $A/\rho_s$ 变化时引起的混沌

首先假设  $A/\rho_s$  为变化量, 其它量均为常量且取值同上。当  $A/\rho_s$  分别取为  $1.2 \times 10^5$ ,  $1.1 \times 10^5$ ,  $1.0 \times 10^5$ ,  $0.9 \times 10^5$ ,  $0.8 \times 10^5$ ,  $0.7 \times 10^5$  (即地基越来越软) 时, 时域响应曲线如图 2 所示。可以看出, 当  $A/\rho_s > 0.9 \times 10^5$

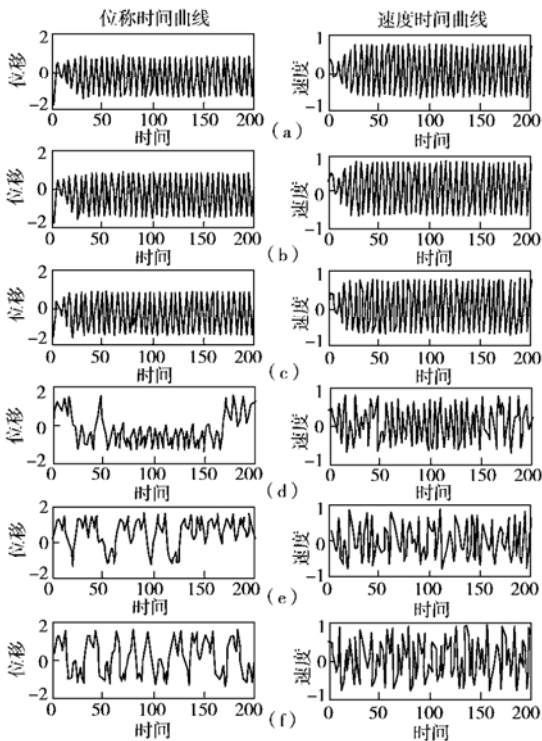


图 2  $A/\rho_s$  取不同值时 (由上往下依次取:  $1.2 \times 10^5$ ,  $1.1 \times 10^5$ ,  $1.0 \times 10^5$ ,  $0.9 \times 10^5$ ,  $0.8 \times 10^5$ ,  $0.7 \times 10^5$ ) 的  $x(t)$  和  $\dot{x}(t)$  曲线

Fig. 2 Curves of  $x(t)$  and  $\dot{x}(t)$  with different values of  $A/\rho_s$  时, 解  $x(t)$  均为周期振荡, 而且周期是逐次成倍增长。当  $A/\rho_s$  减小到某一临界值 ( $A/\rho_s = 0.9 \times 10^5$ ) 时, 系统

已不具有周期性, 表现为拟随机响应, 于是出现混沌。

这种倍周期振荡并由此通向混沌的情况也可以从相平面图 (见图 3) 上看出, 周期运动都是封闭曲线, 但周期为  $2^n T$  的振荡有  $n$  条近似相同的轨线, 这些轨线共有  $n$  个交点, 但这些轨线看上去确实是杂乱无序。

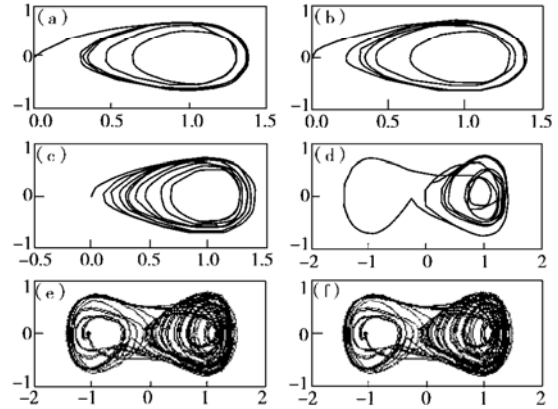


图 3  $A/\rho_s$  取不同值时的相平面上的轨迹

Fig. 3 Orbit on the phase plane for different values of  $A/\rho_s$

当然并不是混沌运动的轨线真是完全无序而没有一定结构, 实际上它是有内部结构的, 这就要求对这类复杂运动采用一些有效方法进行分析研究。

此外, 图 4 给出了  $A/\rho_s = 0.7 \times 10^5$  时的庞加莱映射图, 可以看出, 该映射图既不是有限点集, 也不是封闭曲线, 因此系统此时处于混沌状态。

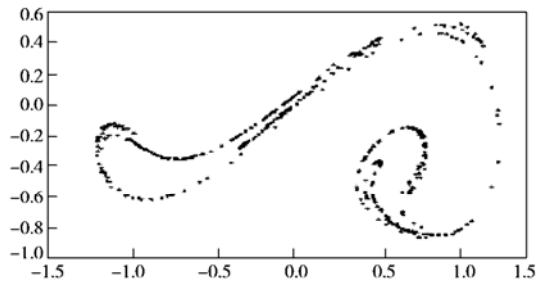


图 4 当  $A/\rho_s = 0.7 \times 10^5$  时的庞加莱映射图、

Fig. 4 The Poincaré map for  $A/\rho_s = 0.7 \times 10^5$

为更加准确的判定混沌, 当  $A/\rho_s = 0.7 \times 10^5$  时, 计算得分维数为 1.53, 根据相关理论也可以判定系统此时应处于混沌状态。

### 2.4 基础厚度 $H$ 变化时引起的混沌

假设  $H$  为变化量, 取  $A/\rho_s = 1.0 \times 10^5$ , 其它参数为定值, 且取值同上。当土层厚度  $H$  从 10 m 逐渐变到 30 m 时, 位移速度的时间响应曲线如图 5 所示。从图 5 中可知, 当  $H < 15$  m 时, 解  $x(t)$  和  $\dot{x}(t)$  都是周期振荡, 而且周期是逐次成倍增长。而当  $H > 16$  m 时, 系统就不再具有周期性, 出现了混沌。

这种倍周期振荡并由此通向混沌的情况也可以从相平面上的轨线(见图6)看出,周期运动给出封闭相曲线,周期为 $2^n T$ 的振荡给出 $n$ 条近似相同的轨线,这些轨线共有 $n$ 个交点。演化至混沌运动时,其轨线图看上去确实是杂乱无序的。

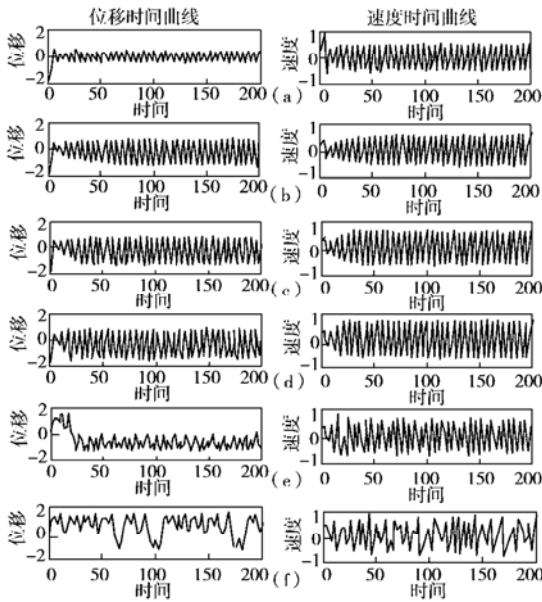


图5  $H$  取不同值时(由上往下依次分别取: 10, 12, 13, 15, 16, 17 m)的  $x(t)$ 和  $\dot{x}(t)$  曲线

Fig. 5 Curves of  $x(t)$  and  $\dot{x}(t)$  with different values of  $H$

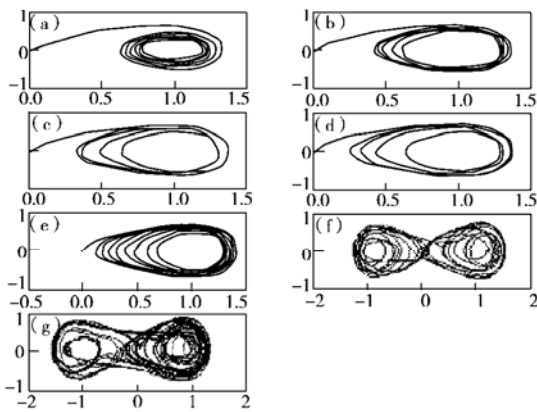


图6  $H$  取不同值时相平面上的轨线图

Fig. 6 Orbit on the phase plane for different values of  $H$

为了更加准确的判定系统是否处于混沌,图7给出了当 $H$ 分别为15, 17 m时的庞加莱映射图。由该图可知,当 $H = 15$  m时系统的庞加莱映射为有限点集,因此,此时系统尚未处于混沌,但当 $H = 17$  m时系统的庞加莱映射既不是有限点集,也不是封闭曲线,此时系统处于混沌状态。

当土层厚度 $H = 17$  m时,根据吸引子分维理论可以计算得到此时系统的分维数为2.53,同时Liapunov

指数为0.1467大于0,这些也说明系统处于混沌状态。图8给出了Liapunov指数与基础厚度的关系,由图8可知,当 $H > 15.5$  m后,系统的Liapunov指数均大于零。因此,也可以判断出系统在基础厚度达到15.5 m后可能开始由周期运动进入混沌运动状态。

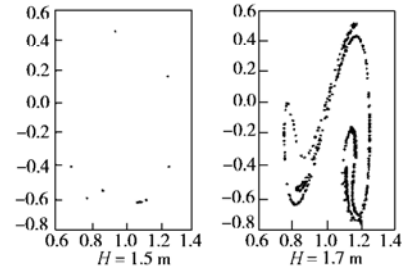


图7 当土层厚为  $H$  为 1.5 和 1.7 m 时的庞加莱映射图

Fig. 7 The Poincaré map for  $H=1.5$  m and  $H=1.7$  m

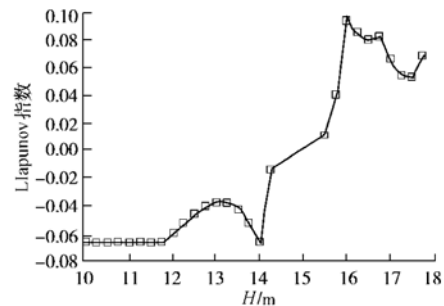


图8 Liapunov 指数随基础层厚度变化的关系曲线图

Fig. 8 Variation of Liapunov exponents with foundational thickness  $H$

### 2.5 坝体形状参数变化时的影响

取坝体倾角 $\theta_2$ (背水面坝体倾角)作为变量,其它参数取值如下: $h = 15$  m(坝体高度值), $\theta_1 = \pi/2$ (迎水面坝坡倾角), $b_1 = 3.5$  m(坝顶面截面宽), $E = 2.8 \times 10^7$ (坝体弹性模量), $n = 1$ (取一阶振型), $\rho_d = 2.5 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>(坝体的密度), $\rho_w = 1.0 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>(水的密度), $\rho_s = 2.0 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>(基础介质的密度), $\omega = 6.89$  s<sup>-1</sup>(地震振动频率), $A = 2.0 \times 10^8$ ,  $H = 15$  m,  $\theta_2$  依次为:  $\theta_2 = \arctan(1.3)$ 、 $\arctan(1.4)$ 、 $\arctan(1.5)$ 、 $\arctan(1.6)$ 、 $\arctan(1.7)$ 、 $\arctan(1.8)$ 。

当 $\theta_2$ 由小逐渐变大时,其位移时间曲线和速度时间曲线如图9所示。从图9中可以看出,坝体的倾角在一定范围内变化时并不会使堤坝横向响应的位移历程以及速度历程出现混沌现象。从图10也可以看出,倾角的变化也不会使系统的相平面变得杂乱无章。因此,可以认为坝体的倾角在一定范围内变化并不会使系统从周期状态转入混沌状态。

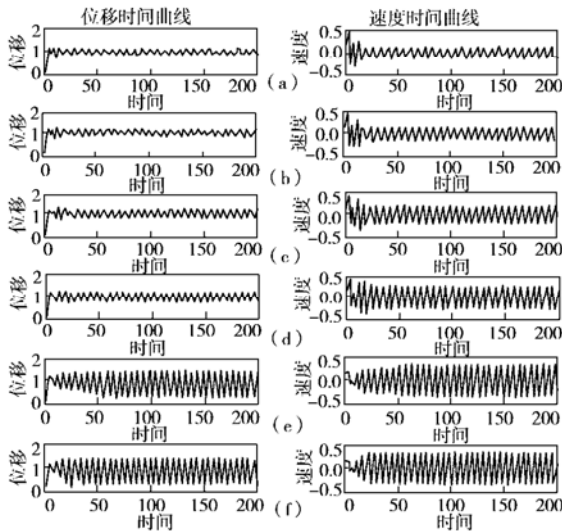


图 9  $\theta_2$  依次取不同值时  $x(t)$  和  $\dot{x}(t)$  曲线

Fig. 9 Curves of  $x(t)$  and  $\dot{x}(t)$  with different values of  $\theta_2$

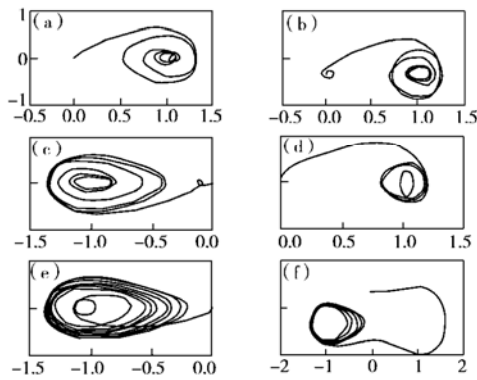


图 10  $\theta_2$  依次取不同值时相平面上的轨迹图

Fig. 10 Orbit on phase plane with different values of  $\theta_2$

### 3 结 论

本文针对大坝在地震荷载作用下的稳定性问题, 从系统能量出发, 由哈密顿原理导出大坝-地基系统的拉格朗日非线性动力方程。然后, 运用混沌理论对系统中非线性因素的演化对系统的非线性动力学行为的影响进行了时域、相空间等内容的现代非线性分析和讨论。通过分析, 可以得出以下几个方面的结论:

(1) 地基参数如土层剪切模量、土层的厚度及土层的密度等土层性质的变化都会对坝体的非线性响应表现出复杂的非线性混沌关系。当上述非线性扰动因素作用的影响达到一定程度时, 大坝的响应过程会出现明显的非线性混沌现象, 其通向混沌之路是通过倍周期分叉实现的。

(2) 当大坝自身的非线性特征与其它各种因素(包括外部环境影响、地基厚度、土层性质等)的周期扰动作用相匹配时, 大坝的地震响应过程会出现混沌特征, 并且该过程常常是周期运动和混沌运动的复杂分叉与集合, 而大坝本身的倾角在一定范围内变化时并没有使系统出现混沌特征。

(3) 混沌现象既可在时间历程反应曲线上看出, 也可在相平面的轨线上看出。在相平面轨线中周期运动都是封闭曲线, 周期为  $2^n T$  的振荡轨迹由  $n$  条近似相同的轨线集合而成, 这些轨线共有  $n$  个交点。出现混沌运动时, 其轨线是杂乱无序的, 应当对这类复杂运动采用一些更有效方法进行混沌分析研究, 例如: Liapunov 指数、Hausdorff 分维数、庞加莱映射图等。

(4) 大坝结构在地震荷载下的上述混沌响应特性可能是导致大坝结构产生复杂的地震破坏(损坏)行为的实际原因之一, 因此在抗震设计时上述响应特性应予以考虑。

### 参考文献:

- [1] 欧珠光. 工程振动[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2003. (OU Zhu-guang. Engineering vibration[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2003.)
- [2] 许强, 黄润秋. 地震作用下结构非线性响应的突变分析[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(4): 25 - 29. (XU Qiang, HUANG Run-qiu. Catastrophic analysis of nonlinear response of structure under earthquake[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(4): 25 - 29.)
- [3] IDRISSE I M, SEED H B. Seismic response of horizontal soil layers[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, American Society of Civil Engineers, 1968, 95(4): 693 - 698.
- [4] 井町勇. 机械振动学[M]. 北京: 科学出版社, 1979. (JING Ding-yong. Mechanism vibracy[M]. Beijing: Science Press, 1979.)
- [5] 秦四清. 斜坡失稳的突变模型与混沌机制[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(4): 486 - 492. (QIN Si-qing. Nonlinear catastrophe model of slope instability and chaotic dynamics mechanism of slope evolution process [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2000, 19(4): 486 - 492.)
- [6] 库比切克 M, 马雷克 M. 分叉理论和耗散结构的计算方法[M]. 刘式达, 刘式适, 译. 北京: 科学出版社, 1990. (KUBICHEK M. MAREK M. Computational method in bifurcation theory and dissipative structures[M]. LIU Shi-da, LIU Shi-shi, translators. Beijing: Science Press, 1990.)
- [7] 陈予恕. 非线性振动系统的分叉和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993. (CHEN Yu-ru. Bifurcation and chaos theory of nonlinear vibration system[M]. Beijing: Higher Education Press, 1993.)
- [8] GB50011—2001 建筑抗震设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999. (GB50011—2001 Code for aseismatic design of constructions[S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1999.)