

# 非饱和渗流随机模型中水力要素的随机特性研究

李少龙, 杨金忠, 蔡树英

(武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072)

**摘要:** 为了分析非饱和渗流水力要素的随机特性, 将土壤的水力特性参数作为随机空间函数, 运用 Karhunen-Loeve 展开和摄动方法, 对二维非饱和渗流进行随机数值模拟。研究表明: 土壤越干燥, 负压水头和含水率的变异性越大; Gardner-Russo 模型中的  $m$  值越小, 含水率的变异性越大; 负压水头、含水率及达西流速的变异性对土壤质地的粗糙程度比较敏感; 土壤介质的各向异性降低垂向达西流速的变异性。非饱和渗流的随机理论尚待进一步的研究和完善。

**关键词:** 非饱和土; 渗流; 随机模拟

中图分类号: P641.2

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2006)10 - 1273 - 04

**作者简介:** 李少龙(1979 - ), 男, 湖北嘉鱼人, 博士研究生, 主要从事地下水环境方面的研究。

## Study on random properties of hydraulic factors in stochastic model of unsaturated flows

LI Shao-long, YANG Jin-zhong, CAI Shu-ying

(National Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Sciences, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

**Abstract:** In order to analyze the random properties of hydraulic factors of unsaturated seepage, hydraulic properties of soils were treated as random space functions, and stochastic numerical simulation for two-dimensional unsaturated seepage has been conducted by the combination of Karhunen-Loeve expansion and perturbation method. It was shown that the variabilities of water head and water content increased with the dryness of soils. The smaller the unsaturated parameter  $m$  in the Gardner-Russo model, the larger the variability of water content. The variabilities of water head, water content and Darcian flux were sensitive to the coarseness of soil texture. Anisotropy of soil properties decreased the variability of the vertical Darcian flux. Researches on stochastic theory of unsaturated seepage should be strengthened.

**Key words:** unsaturated soil; seepage; stochastic modeling

## 0 引言

非饱和带联系着地表和地下的水文过程, 水分和污染物在非饱和带的运动影响着地下水补给量、蒸发蒸腾量以及水质等。为了考察土壤水力特性的空间变异性对非饱和渗流的影响, 近年来已有很多研究针对非饱和渗流问题进行随机分析。随机分析的基本思想是将介质特性视为随机空间函数<sup>[1]</sup>, 那么描述介质中水流的方程成为随机方程, 然后通过随机方法获得流体运动的统计特征。Yeh<sup>[2-3]</sup>、Mantoglou<sup>[4-5]</sup>研究了重力主导的非饱和渗流在无界区域中的运动, 在这种条件下, 流场在空间上是平稳的, 因而可以得到解析解。解析解对认识随机流动特征起到了很好的作用, 但是由于假设条件的引入, 限制了应用的范围。Zhang 和 winter<sup>[6]</sup>、Zhang<sup>[7]</sup>提出了一个有界区域内非饱和流的随机模型, 通过数值求解对一维和二维问题进行随机分析。Yang 等<sup>[8]</sup>运用 Karhunen-Loeve 展开和摄动方法相结合的随机数值方法分析饱和 - 非饱和流问题, 研

究表明该方法具有较高的计算效率。这些随机方法采用 Gardner-Russo 参数化模型描述非饱和水力传导度和土壤含水率对基质吸力的函数关系, 但都是在速率参数  $m$  为 0 的特定条件下建立模型进行随机分析。本文将 Yang 等<sup>[8]</sup>的非饱和渗流随机模型扩展到  $m$  取任意值的一般情况, 同时通过数值模拟, 分析非饱和渗流水力要素的随机特性。

## 1 随机方程

非饱和土壤介质中的稳定渗流满足以下连续性方程和达西定律

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot q(\mathbf{x}) &= 0, \\ q_i(\mathbf{x}) &= -K(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} [h(\mathbf{x}) + x_i] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

边界条件如下

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50379042)

收稿日期: 2005 - 12 - 19

$$\left. \begin{aligned} h(\mathbf{x})|_D &= h_D(\mathbf{x}), \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})|_N &= Q_N(\mathbf{x}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  为达西流速;  $h(\mathbf{x})$  为负压水头;  $K(\mathbf{x})$  为非饱和水力传导度;  $i=1, 2$ , 或者  $3$ ,  $x_i$  方向以向上为正;  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  为二类边界上的单位外法线向量;  $h_D(\mathbf{x})$ 、 $Q_N(\mathbf{x})$  分别为一类边界水头和二类边界流量。

多孔介质的水力传导度具有较大的空间变异性, 文献[1]中的统计资料显示, 标准差在最大值和最小值之间相差一个数量级, 水平方向相关尺度较垂直方向相关尺度要大。将水力传导度作为随机空间函数处理, 方程 (1)、(2) 就成为随机偏微分方程, 它的解不再是确定性的值, 而是具有一定概率分布的随机函数。

## 2 统计矩

### 2.1 达西流速的均值与方差

为了数学处理上的方便, 对非饱和水力传导度采用对数变换, 即  $Y(\mathbf{x}) = \ln K(\mathbf{x})$ , 将  $Y(\mathbf{x})$  进行一阶摄动展开,  $Y(\mathbf{x}) = Y^{(0)}(\mathbf{x}) + Y^{(1)}(\mathbf{x})$ 。同样地,  $h(\mathbf{x}) = h^{(0)}(\mathbf{x}) + h^{(1)}(\mathbf{x})$ 。后文在不引起混淆的情况下, 将  $(\mathbf{x})$  省略。将这些展开式代入达西定律有

$$q_i(\mathbf{x}) = -\exp[Y^{(0)} + Y^{(1)}] \cdot \left[ \frac{\partial h^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial h^{(1)}}{\partial x_i} + \delta_{i1} \right], \quad (3)$$

式中  $\delta_{i1}$  为 Kronecker delta 函数。

对于一阶分析有

$$\left. \begin{aligned} q_i^{(0)}(\mathbf{x}) &= K_m(\mathbf{x}) J_i(\mathbf{x}), \\ q_i^{(1)}(\mathbf{x}) &= -K_m(\mathbf{x}) \frac{\partial h^{(1)}}{\partial x_i} + K_m(\mathbf{x}) J_i(\mathbf{x}) Y^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中  $K_m(\mathbf{x}) = \exp[Y^{(0)}(\mathbf{x})]$  定义为  $K(\mathbf{x})$  的几何平均;  $J_i(\mathbf{x}) = -\partial h^{(0)}(\mathbf{x}) / \partial x_i - \delta_{i1}$  定义为  $x_i$  方向的平均水力梯度。

在一阶展开的情况下, 零阶项就代表均值。达西流速的方差  $\sigma_{qii}^2 = \langle q_i^{(1)}(\mathbf{x}) q_i^{(1)}(\mathbf{x}) \rangle$  为

$$\sigma_{qii}^2 = (K_m)^2 \left\langle \left[ \frac{\partial h^{(1)}}{\partial x_i} \right]^2 \right\rangle + (K_m J_i)^2 \langle [Y^{(1)}]^2 \rangle - 2(K_m)^2 J_i \left\langle \frac{\partial h^{(1)}}{\partial x_i} Y^{(1)} \right\rangle. \quad (5)$$

### 2.2 含水率的均值与方差

采用 Gardner-Russo 模型描述非饱和水力传导度和土水特性曲线函数, 即

$$K(\mathbf{x}) = K_s(\mathbf{x}) \exp[\alpha(\mathbf{x})h(\mathbf{x})], \quad (6)$$

$$\theta_e(\mathbf{x}) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ \exp[0.5\alpha(\mathbf{x})h(\mathbf{x})] \cdot [1 - 0.5\alpha(\mathbf{x})h(\mathbf{x})] \right\}^{\frac{2}{m+2}}, \quad (7)$$

式中  $K_s(\mathbf{x})$  为饱和水力传导度;  $\alpha(\mathbf{x})$  为孔隙大小分布参数;  $\theta_e = \theta - \theta_r$  为有效体积含水量;  $\theta$  为总体积含水量;  $\theta_r$  为残余体积含水量;  $\theta_s$  为饱和体积含水量;  $m$  为速率参数。

Unlu 等<sup>[9]</sup>对野外实测数据的分析表明参数  $\alpha(\mathbf{x})$  近似服从正态分布, 饱和水力传导度  $K_s(\mathbf{x})$  服从对数正态分布。Yeh<sup>[2-3]</sup>、Mantoglou<sup>[4-5]</sup>、Zhang<sup>[7]</sup>和 Yang 等<sup>[8]</sup>的随机分析都采用了这样的分布。本文将土壤参数  $\alpha(\mathbf{x})$  和对数饱和水力传导度  $f(\mathbf{x}) = \ln K_s(\mathbf{x})$  视为服从正态分布的随机空间函数, 用 Karhunen-Loeve 随机展开表示为

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \langle f(\mathbf{x}) \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^f(\mathbf{x}) \sqrt{\chi_i^f} \xi_i, \\ \alpha(\mathbf{x}) &= \langle \alpha(\mathbf{x}) \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^\alpha(\mathbf{x}) \sqrt{\chi_i^\alpha} \eta_i. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中  $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$ 、 $\langle \alpha(\mathbf{x}) \rangle$  分别为  $f(\mathbf{x})$  和  $\alpha(\mathbf{x})$  的均值;  $\chi_i^f$ 、 $\chi_i^\alpha$ 、 $\psi_i^f(\mathbf{x})$ 、 $\psi_i^\alpha(\mathbf{x})$  分别为  $f(\mathbf{x})$  和  $\alpha(\mathbf{x})$  的协方差函数的特征值和特征函数;  $\xi_i$ 、 $\eta_i$  为正态随机变量。

式 (8) 可简记为  $f = \langle f \rangle + f'$ ,  $\alpha = \langle \alpha \rangle + \alpha'$ 。将展开式代入式 (6) 和 (7) 有

$$\left. \begin{aligned} Y^{(0)}(\mathbf{x}) &= \langle f \rangle + \langle \alpha \rangle h^{(0)}, \\ Y^{(1)}(\mathbf{x}) &= f' + \langle \alpha \rangle h^{(1)} + h^{(0)} \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_e^{(0)}(\mathbf{x}) &= (\theta_s - \theta_r) \exp \left[ \frac{\langle \alpha \rangle h^{(0)}}{m+2} \right] \\ &\quad \left[ 1 - 0.5 \langle \alpha \rangle h^{(0)} \right]^{\frac{2}{m+2}}, \\ \theta_e^{(1)}(\mathbf{x}) &= \bar{\theta} \left[ \langle \alpha \rangle h^{(1)} + h^{(0)} \alpha' \right], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中  $\bar{\theta} = -\frac{\theta^{(0)}}{2(m+2)1 - 0.5 \langle \alpha \rangle h^{(0)}}$ 。

有效含水率的方差  $\sigma_{\theta_e}^2 = \langle \theta_e^{(1)}(\mathbf{x}) \theta_e^{(1)}(\mathbf{x}) \rangle$  为:

$$\sigma_{\theta_e}^2 = \bar{\theta}^2 \left\{ \langle \alpha \rangle^2 \langle [h^{(1)}]^2 \rangle + 2 \langle \alpha \rangle h^{(0)} \langle h^{(1)} \alpha' \rangle + [h^{(0)}]^2 \langle (\alpha')^2 \rangle \right\}. \quad (11)$$

### 2.3 水头的方差

由式 (5) 和 (11) 可见, 只要求得定解问题 (1)、(2) 的随机解函数  $h(\mathbf{x})$  就能获得达西流速和土壤含水率的二阶统计矩。由于  $h(\mathbf{x})$  的协方差函数事先无法知道, 因此不能直接采用 Karhunen-Loeve 展开, 可将一阶水头展开为土壤介质参数 Karhunen-Loeve 展开中的随机变量的多项式如下

$$h^{(1)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} (h_i^\xi \xi_i + h_i^\eta \eta_i), \quad (12)$$

只要能够求得水头展开式中的确定性系数  $h^{(0)}$ 、 $h_i^\xi$ 、 $h_i^\eta$ , 则可得到随机函数  $h(\mathbf{x})$  的表达式。

将各展开式代入方程 (1)、(2), 通过随机偏微分

方程的摄动展开, 可以推导得到如下关于水头展开的各阶系数的方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 h^{(0)} + \nabla Y^{(0)} \cdot \nabla h^{(0)} + g^{(0)} &= 0, \\ h^{(0)} \Big|_D &= h_D, \\ \nabla h^{(0)} \cdot \mathbf{n} \Big|_N &= Q^{(0)}, \\ g^{(0)} &= \frac{\partial Y^{(0)}}{\partial z}, \\ Q^{(0)} &= -e^{-Y^{(0)}} Q_N / ep^{(0)} - \nabla z \cdot \mathbf{n} \Big|_N, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 h_i^P + \nabla Y^{(0)} \cdot \nabla h_i^P + g_i^P &= 0, \\ h_i^P \Big|_D &= 0, \\ \nabla h_i^P \cdot \mathbf{n} \Big|_N &= Q_i^P, \\ g_i^P &= \nabla Y_i^P \cdot \nabla (h^{(0)} + z), \\ Q_i^P &= -ep_i^P \nabla (h^{(0)} + z) \cdot \mathbf{n} \Big|_N / ep^{(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中  $P$  分别为  $\xi$  和  $\eta$ 。

方程(13)和(14)为确定性的偏微分方程, 可以用已有的任何一种数值方法求解, 本文采用有限差分法求解。求解这些方程后就得到水头的随机描述, 水头的方差为

$$\sigma_h^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ (h_i^\xi)^2 + (h_i^\eta)^2 \right]. \quad (15)$$

### 3 随机数值模拟分析

用上述随机分析方法, 模拟非饱和土垂直剖面的二维渗流问题, 分析不同土壤介质参数对渗流随机模型中的水头、含水率以及达西流速的随机特性的影响。 $\alpha(\mathbf{x})$ 和  $f(\mathbf{x})$ 的协方差函数满足指数模型

$$C(x, y) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|x_1 - y_1|}{\lambda_1} - \frac{|x_2 - y_2|}{\lambda_2}\right), \quad (16)$$

式中 空间向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ ;  $\sigma^2$  为方差;  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  分别为两个方向上的相关长度。

Zhang 和 Winter<sup>[6]</sup>在非饱和和渗流的随机分析中将水流入渗模型进行简化, 即上边界是水量均匀入渗, 下边界是位置固定的潜水面, 在二维情况下左右两边边界不透水。本文在上述简化的非饱和土垂向入渗的条件下进行随机数值模拟。研究区域为 200 cm×200 cm, 左右两边为隔水边界, 下边界为自由水面, 地表有速率为 0.05 cm/d 的均匀入渗,  $\langle f \rangle = 0.0$ ,  $\sigma_f^2 = 1.0$ ,  $\sigma_\alpha^2 = 1.0 \times 10^{-4}$ ,  $\theta_s = 0.3$ ,  $\theta_r = 0.0$ ,  $f$  和  $\alpha$  的相关尺度  $\lambda = 10$  cm, 其它参数在不同分析中取不同值。水头、含水率和流速的变异性用变异系数  $CV_h$ 、 $CV_\theta$ 、 $CV_q$  来表示, 即标准差与均值的比值。

首先考察曲率参数  $m$  的不同取值对随机模拟结果的影响,  $m$  分别取为 0.0, 1.0, 2.0, 此时  $\langle \alpha \rangle = 0.03$ 。图 1 为非饱和和渗流区域中部的负压水头、含水率、垂

向达西流速在  $m$  取不同值时的变异系数计算结果。从方程 (13) ~ (15) 可见, 在稳定流条件下, 水头的统计矩与  $m$  的取值无关, 图 1 (a) 也说明了这一点。同样地, 如图 1 (c) 所示,  $m$  不影响垂向流速的变异性。达西流速的变异性随着土壤变干逐渐增大, 接近地表时由于流量边界的影响, 变异性减小。含水率的变异性对  $m$  比较敏感,  $m$  的取值越小, 含水率变异系数的变化也越大, 如图 1 (b) 所示。因此, 对于给定的土壤负压, 含水率的变异性会随着  $m$  的减小而增加。从自由水面到地表, 土壤越来越干燥, 由图 1 (a) 和 (b) 可以看到, 水头和含水率的变异性也越来越大, 这一结果与 Yeh<sup>[2-3]</sup>从解析解获得的结论一致。从图 1 (b) 可见, 流量边界处的含水率变异性有所减小。

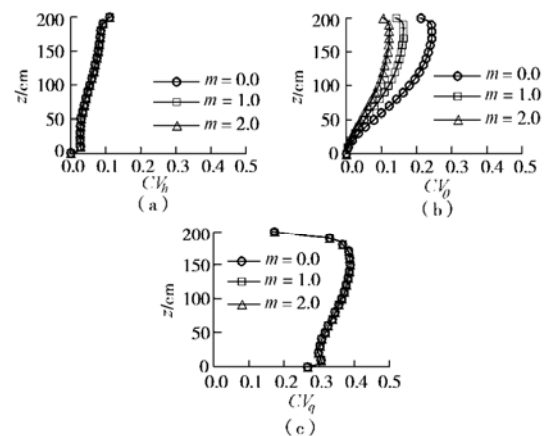


图 1 不同  $m$  值时的水头、含水率及流速的变异系数  
Fig. 1 Coefficients of variation of water head, water content and flux with different values of  $m$

土壤质地的粗糙程度主要由  $\langle \alpha \rangle$  反映, 将  $\langle \alpha \rangle$  分别取为 0.02, 0.03, 0.04, 分析它对非饱和和渗流水力要素的随机特性的影响, 此时  $m = 2.0$ 。由图 2 (a) 可见,  $\langle \alpha \rangle$  越大, 水头的变异性在土壤干燥的区域也越大。如图 2 (b) 所示, 在干燥区域,  $\langle \alpha \rangle$  较大时含水

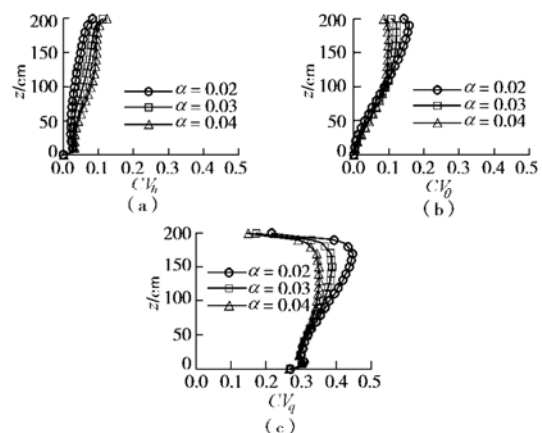


图 2 水头、含水率及流速的变异系数随  $\alpha$  的变化  
Fig. 2 Coefficients of variation of water head, water content and flux as function of  $\alpha$

率变异性较小而且变化也较小,  $\langle\alpha\rangle$ 较小时土壤的含水率变异性随着干燥程度而增大。在土壤湿润区域,  $\langle\alpha\rangle$ 对达西流速变异性的影响较小;而在土壤干燥区域,  $\langle\alpha\rangle$ 的增大降低了达西流速的变异性。Zhang 和 winter<sup>[6]</sup>对非饱和土壤一维垂向入渗的随机分析同样表明, 流速的变异性随着 $\langle\alpha\rangle$ 的增大而减小。

最后, 分析  $f$  和  $\alpha$  两个随机函数的各向异性程度对水头、土壤含水率及达西流速的变异性的影响。保持纵向相关尺度为 10 cm 不变, 将横向相关尺度分别取为 10, 20, 30 cm。由图 3 可见, 土壤的各向异性使水头的变异性有所增大, 但是对含水率的变异性影响很小, 垂向达西流速对土壤的各向异性比较敏感, 随着横向相关尺度的增加, 流速的变异性减小。

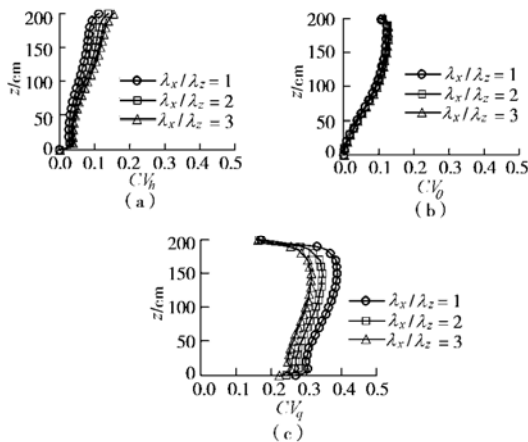


图 3 各向异性对水头、含水率及流速的随机特性的影响

Fig. 3 Effect of anisotropy on random properties of water head, water content and flux

## 4 结 语

基于 Gardner-Russo 模型, 将非饱和土的水力传导度和土水特性曲线参数作为随机空间函数, 在曲率参数任意取值的情况下, 运用摄动和 Karhunen-Loeve 展开方法, 得到非饱和渗流的随机数值分析模型, 为研究土壤介质参数的空间变化对非饱和渗流水力要素的影响提供了一种新的分析思路。

利用该模型对二维非饱和土壤渗流进行数值模拟, 分析不同土壤介质参数对非饱和渗流水力要素的随机特性的影响, 得到如下结果: 土壤越干燥, 负压水头和含水率的变异性越大;  $m$  值越小, 含水率的变异性越大; 负压水头、含水率及达西流速的变异性对土壤质地的粗糙程度比较敏感; 土壤介质的各向异性降低垂向达西流速的变异性。

本文针对一个简化的非饱和土垂直二维入渗问题进行随机分析, 得到初步研究结果。随着非饱和渗流问题研究的逐步深入, 非饱和渗流的随机理论还有待进一步的研究和完善。

## 参考文献:

- [1] 杨金忠, 蔡树英, 黄冠华, 叶自桐. 多孔介质中水分及溶质运移的随机理论[M]. 北京: 科学出版社, 2000. (YANG Jin-zhong, CAI Shu-ying, HUANG Guan-hua, YE Zi-tong. Stochastic theory of water and solute movement in porous media[M]. Beijing: Science Press, 2000.)
- [2] YEH T C, GELHAR L W, GUTJAHR A L. Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogeneous soils: 1. Statistically isotropic media[J]. Water Resources Research, 1985, 21(4): 447 - 456.
- [3] YEH T C, GELHAR L W, GUTJAHR A L. Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogeneous soils: 2. Statistically anisotropic media with variable  $\alpha$ [J]. Water Resources Research, 1985, 21(4): 457 - 464.
- [4] MANTOGLOU A, GELHAR L W. Stochastic modeling of Large-scale transient unsaturated flow system[J]. Water Resources Research, 1987, 23(1): 37 - 46.
- [5] MANTOGLOU A, GELHAR L W. Capillary tension head variance, mean soil moisture content and effective specific soil moisture capacity[J]. Water Resources Research, 1987, 23(1): 47 - 56.
- [6] ZHANG D, WINTER C L. Nonstationary stochastic analysis of steady-state flow through variably saturated, heterogeneous media[J]. Water Resources Research, 1998, 34(5): 1091 - 1100.
- [7] ZHANG D. Nonstationary stochastic analysis of transient unsaturated flow in randomly heterogeneous media[J]. Water Resources Research, 1999, 35(4): 1127 - 1141.
- [8] YANG J, ZHANG D, LU Z. Stochastic analysis of saturated-unsaturated flow in heterogeneous media by combining Karhunen-Loeve expansion and perturbation method[J]. Journal of Hydrology, 2004, 294: 18 - 38.
- [9] UNLU K, NIELSEN D R, BIGGAR J W, MORKOC F. Statistical parameters characterizing the spatial variability of selected soil hydraulic properties[J]. Soil Science Society of America Journal, 1990, 54: 1537 - 1547.