

层状土中污染物的一维扩散解析解

陈云敏, 谢海建, 柯 瀚, 唐晓武

(浙江大学岩土工程研究所, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 扩散是污染物在填埋场细颗粒土质衬里中迁移的主要方式, 同时土质衬里存在着成层的情形。在建立了污染物在层状土中的一维扩散模型的基础上, 通过分离变量法得到了解析解。基于该解析解, 编制了相应的计算程序。通过与有限差分法对比, 证明了该解析解的正确性及有效性。算例分析了不同衬里的放置顺序对污染物扩散的影响, 虽然两种情况下土层的浓度剖面不同, 但两者的击穿曲线是一致的。该解析解可用于对试验数据的拟合、对复杂数值模型的检验以及为垃圾填埋场衬里系统的初步设计提供参考。

关键词: 污染物; 层状土; 填埋场; 扩散; 解析解

中图分类号: X705 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2006)04-0521-04

作者简介: 陈云敏(1962-), 男, 浙江温岭人, 教授, 主要从事环境土工、基础工程及土动力学等方面的研究工作。

Analytical solution of contaminant diffusion through multi-layered soils

CHEN Yun-min, XIE Hai-jian, KE Han, TANG Xiao-wu

(Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Diffusion is the predominant mechanism controlling contaminant transport in soil liners. An analytical solution of contaminant diffusion through layered porous media was presented. The comparisons between the results obtained by the present analytical method and the existing numerical solutions was described by figures. Furthermore, the application of the solutions was illustrated in a practical example. The present method was relatively simple to apply and could be used for preliminary design of landfill liners, evaluating experimental results, and verifying more complex numerical models.

Key words: contaminant; layered soils; diffusion; analytical solution; landfill

0 引 言

填埋法已成为固体废弃物的主要处理方式, 美国环保局规定垃圾填埋场一般使用年限为 30 a, 即在 30 a 之内应保证填埋场能安全地运行^[1]。实际上, 固体废弃物在垃圾填埋场中存在时间往往是几百年甚至上千年。因此, 如何保证填埋场在长时间内不对地下水造成污染的相关课题引起了很大的重视。

为确保污染物在设计年限或更长时间内不对地下水造成污染, 往往需要在填埋场建造合适的衬里系统。虽然越来越多的衬里系统采用了土工膜作为其必要的防渗材料。但由于土工膜的长期性状并不明确, 土工膜下卧的粘土衬里往往是污染物的长期屏障^[2]。这种粘土衬里可以是天然粘土或压实粘土衬里。

以往在研究污染物在粘土衬里中迁移时, 往往认为污染物在此类介质中运移的主要过程是水力传导。实际上, 当填埋场的渗滤液收集层能正常工作时, 作用在衬里系统上方的渗滤液水头往往很小(如小于 30 cm), 在这种情况下, 分子扩散在污染物迁移中占主

导地位^[2-6]。

实际上, 填埋场衬里往往具有成层性^[7-10]。一方面填埋场衬里的组成本身存在成层性; 另一方面, 衬里系统的下卧土层是成层的。文献[7, 8]利用半解析法研究了污染物在层状介质中的迁移机理。文献[11]对两层介质中污染的迁移机理进行了试验研究。文献[1]利用拉氏变换给出了考虑半无限边界条件的双层介质扩散解析解, 并用有限差分法研究了考虑零下边界的双层介质一维扩散问题。

本文在这些研究的基础上, 建立了污染物在成层土中的一维扩散模型, 并得到了解析解。将本文理论与数值方法进行了比较。通过算例分析了不同衬里层的放置顺序对其防渗效果的影响。本文解可用于实验室数据拟合、对更复杂数值模型进行验证及可为垃圾填埋场衬里系统的初步设计提供参考。

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(50425825);教育部优秀青年教师资助计划(教人司[2003]355)

收稿日期: 2005-03-05

1 基本假设及计算模型

1.1 基本假设

本文在建立污染物在成层土中的扩散模型时，主要基于以下假设：①污染物在土中迁移的主要方式是分子扩散和吸附作用，忽略水力传导的作用；②污染物在土中的扩散是一维的，且遵循费克第二定律；③扩散系数是常数，即扩散系数不随时间、空间的变化，粘土矿物对污染物的吸附作用是线性吸附；④成层介质中的各分层介质均是饱和的；⑤污染物是单一的离子或有机物。

1.2 控制方程及求解条件

在上述假设的基础上，建立了污染物在层状土中扩散的一维模型，如图 1 所示。污染物在第 i 层土中的迁移方程可描述为

$$\frac{\partial C_i(z,t)}{\partial t} = \frac{D_i^*}{R_i} \frac{\partial^2 C_i(z,t)}{\partial z^2} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1)$$

式中 $C_i(z,t)$ 为第 i 层介质中污染物的浓度； D_i^* 为第 i 层介质的有效扩散系数^[12]； R_i 为第 i 层介质对污染物吸附的阻滞因子； t 为时间； z 为空间坐标。

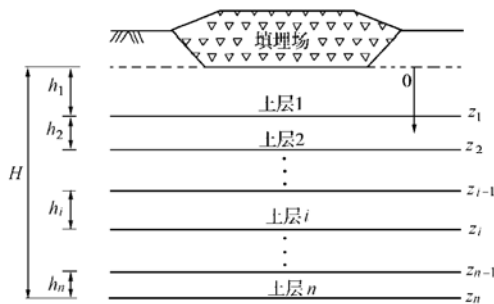


图 1 垃圾填埋场典型剖面图 (引自文献[7, 8])

Fig. 1 Cross-section of a landfill

该模型具有的初始条件为

$$t=0: C_i(z, t) = f_i(z) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2)$$

其中 $f_i(z)$ 为第 i 层介质中污染物的初始浓度分布函数， $f_i(z)$ 是 z 的任意函数。

具有的边界条件如下。

(1) 在上边界，假设填埋场污染物浓度是随时间变化的，则边界条件为

$$z=0: C_i(z,t) = C_b(t), t \geq 0 \quad (3)$$

特殊地，若填埋场中污染物的浓度维持恒定，为 C_0 ^[12]，则 $C_b(t) = C_0$ 。

(2) 在下边界，一般成层的衬里层是建造在渗滤液监测层或导流层上，可以认为其下边界浓度为 0^[1]。即

$$z=H: C_n(z,t) = 0 \quad (4)$$

(3) 在两层介质的交接面，保持浓度连续和通量连续，从而

$$z = z_i: C_i(z,t) = C_{i+1}(z,t) \quad (5)$$

$$z = z_i: n_i D_i^* \frac{\partial C_i(z,t)}{\partial z} = n_{i+1} D_{i+1}^* \frac{\partial C_{i+1}(z,t)}{\partial z} \quad (i=1,2,3,\dots,n-1), \quad (6)$$

式中 n_i 为第 i 层土的孔隙率。

2 方程的解答

为求解方便，将非齐次的上边界条件转化为齐次边界来处理，参考文献[13]的方法，将原问题表述成如下的叠加形式：

$$C_i(z,t) = \phi_i(z)C_b(t) + \theta_i(z,t) \quad (7)$$

式中，函数 $\phi_i(z)$ 和 $\theta_i(z,t)$ 的求解如下。

2.1 $\phi_i(z)$ 的求解

关于 $\phi_i(z)$ 的问题描述如下，控制方程为

$$\frac{d^2 \phi_i(z)}{dz^2} = 0 \quad (8)$$

具有的边界条件为

$$z=0: \phi_1(z) = 1 \quad (9)$$

$$z = z_i: \begin{cases} \phi_i(z) = \phi_{i+1}(z), \\ n_i D_i^* \frac{d\phi_i(z)}{dz} = n_{i+1} D_{i+1}^* \frac{d\phi_{i+1}(z)}{dz}, \end{cases} \quad (10)$$

$$z=H: \phi_n(z) = 0 \quad (11)$$

显然，上述方程的通解为

$$\phi_i(z) = A_i + B_i z \quad (12)$$

其中 A_i, B_i 由求解条件(9)、(10)、(11a)及(11b)确定。

2.2 $\theta_i(z,t)$ 的求解

关于 $\theta_i(z,t)$ 的控制方程为

$$\frac{\partial \theta_i(z,t)}{\partial t} = \frac{D_i^*}{R_i} \frac{\partial^2 \theta_i(z,t)}{\partial z^2} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (13)$$

具有的边界条件为

$$z=0: \theta_1(z,t) = 0 \quad (14)$$

$$z = z_i: \begin{cases} \theta_i(z,t) = \theta_{i+1}(z,t), \\ n_i D_i^* \frac{\partial \theta_i(z,t)}{\partial z} = n_{i+1} D_{i+1}^* \frac{\partial \theta_{i+1}(z,t)}{\partial z}, \end{cases} \quad (15)$$

$$z=H: \theta_n(z,t) = 0 \quad (16)$$

初始条件为

$$\theta_i(z,0) = f_i(z) - \phi_i(z)C_b(0) \quad (17)$$

考虑到上述关于 $\theta_i(z,t)$ 问题的控制方程和求解条件与凝结问题相类似，在求解时参考了文献[14]的解法，得到满足上述求解条件的 $\theta_i(z,t)$ 的解为

$$\theta_i(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m g_{mi}(z) e^{-\beta_m t} \quad (18)$$

式中

$$\beta_m = \frac{\lambda_m^2 D_1^*}{R_1 h_1^2}, \quad (19)$$

$$g_{mi}(z, t) = A_{mi} \sin\left(\mu_i \lambda_m \frac{z}{h_1}\right) + B_{mi} \cos\left(\mu_i \lambda_m \frac{z}{h_1}\right), \quad (20)$$

$$\mu_i = \sqrt{\frac{D_1^* R_i}{D_i^* R_1}}, \quad (21)$$

$$S_m = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{n_i R_i}{n_1 R_1} \int_{z_{i-1}}^{z_i} g_{mi}(z) [f_i(z) - \phi_i(z) C_b(0)] dz}{\sum_{i=1}^n \frac{n_i R_i}{n_1 R_1} \int_{z_{i-1}}^{z_i} g_{mi}^2(z) dz}. \quad (22)$$

其中 A_{mi} 及 B_{mi} 则由以下递推公式计算:

$$\left. \begin{aligned} [A_{mi} \quad B_{mi}]^T &= [1 \quad 0]^T, \\ [A_{mi} \quad B_{mi}]^T &= S_i [A_{m(i-1)} \quad B_{m(i-1)}]^T \quad (i=2,3..n). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

而 S_i 为以下矩阵:

$$S_i = \begin{bmatrix} A_i B_i + \eta_i E_i F_i & A_i F_i - \eta_i E_i B_i \\ E_i B_i - \eta_i A_i F_i & E_i F_i + \eta_i A_i B_i \end{bmatrix}, \quad (24)$$

式中, $A_i = \sin\left(\mu_i \lambda_m \frac{z_{i-1}}{h_1}\right)$, $B_i = \sin\left(\mu_{i-1} \lambda_m \frac{z_{i-1}}{h_1}\right)$,

$E_i = \cos\left(\mu_i \lambda_m \frac{z_{i-1}}{h_1}\right)$, $F_i = \cos\left(\mu_{i-1} \lambda_m \frac{z_{i-1}}{h_1}\right)$, $\eta_i = \frac{n_{i-1}}{n_i} \sqrt{\frac{D_{i-1}^* R_{i-1}}{D_i^* R_i}}$.

λ_m 为以下超越方程的正根:

$$S_{n+1} \cdot S_n \cdot S_{n-1} \cdots S_2 \cdot S_1 = 0. \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= [1 \quad 0]^T, \\ S_{n+1} &= [B_{n+1} \quad F_{n+1}]^T. \end{aligned} \right\}, \quad (26)$$

在上述浓度解的基础上, 第 i 层土中的污染物的通量可通过下式求得:

$$F_i(z, t) = -n_i D_i^* \frac{\partial C_i(z, t)}{\partial z}, \quad (27)$$

式中, $F_i(z, t)$ 为第 i 层介质处的污染物通量。

3 与数值解法的比较

基于上述解析解, 笔者编制了相应的计算程序。对于双层土的情形(下边界浓度为 0), 文献[1]曾用有限差分法研究了该类系统的扩散问题。这里假设两层介质的参数取值如表 1 所示, 渗滤液的初始浓度为 1000 mg/L, 即 $C_b(t) = C_0 = 1000$ mg/L, 并维持恒定。假设两层介质中污染物的初始浓度均为 0, 即 $f_1(z) = f_2(z) = 0$, 笔者对本文推导的解析解与有限差分法进行了对比, 结果如图 2 所示。

定义衬里底部的污染物通量随时的变化曲线为击穿曲线。图 2 比较了两种方法得到的击穿曲线。由图可知, 基于本文解得到的污染物击穿曲线与基于有限

差分解得到的曲线较为一致, 这也说明了本文解的可靠性。

表 1 土层的物理化学性质参数

Table 1 Properties of the soils

参数	n_1	n_2	D_1^* /($m^2 \cdot s^{-1}$)	D_2^* /($m^2 \cdot s^{-1}$)	R_1	R_2	h_1 /m	h_2 /m
工况 1	0.5	0.1	6.5×10^{-11}	6.5×10^{-11}	4.0	0.5	1.0	1.0
工况 2	0.5	0.1	26×10^{-11}	6.5×10^{-11}	1.7	1.7	1.0	1.0

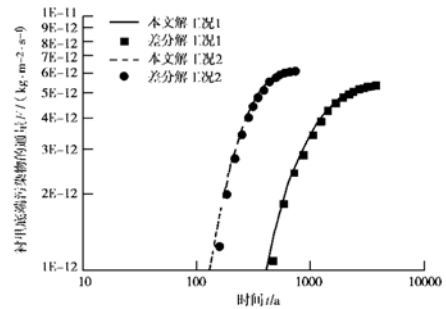


图 2 本文解和有限差分法的比较

Fig. 2 Comparison between the present solutions and those by the finite difference method

4 算例分析及应用

填埋场的成层衬里在施工时, 往往遇到各层衬里的放置顺序问题。因此有必要考察这种衬里的先后顺序对衬里系统防渗有效性的影响。假设填埋场的防渗结构由两层土质衬里组成, 如图 3 所示。

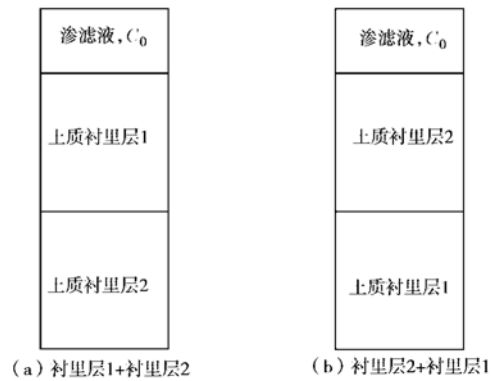


图 3 填埋场的两种土质衬里系统

Fig. 3 Two liner systems of landfill

表 2 两层衬里的物理化学性质参数

Table 2 Properties of the two liner system considered in the example

衬里类型	孔隙率 n	D^* / ($m^2 \cdot s^{-1}$)	阻滞因子 R	衬里厚度 h/m
土质衬里层 1	0.3	6.5×10^{-11}	4.0	0.3
土质衬里层 2	0.5	13.0×10^{-11}	2.0	0.4

图 3 分别表示两种不同的工况, 即图 3 (a) 表示工况 1 和图 3 (b) 表示工况 2。假设两层衬里的物理化学性质指标如表 2 所示。并假设填埋场渗滤液的浓

度保持不变,即 $C_b(t) = C_0$ 。同时,设两层土中污染物的初始浓度均为 0。基于本文模型,分别按上述两种不同工况考察了不同时刻土层浓度的分布曲线及衬里系统底端通量随时间的变化曲线,如图 4, 5 所示。

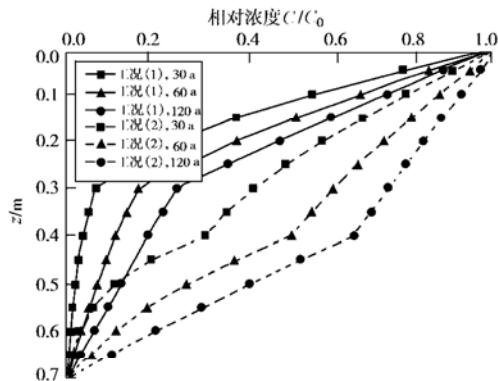


图 4 两种不同工况下浓度分布曲线比较

Fig. 4 Comparison between concentration profiles of two scenarios

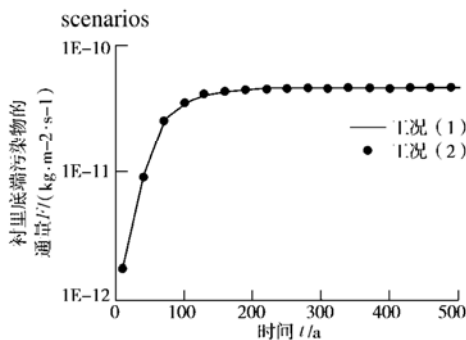


图 5 两种不同工况下的击穿曲线对比

Fig. 5 Comparison of breakthrough curves between two scenarios

图 4 分别比较了在 30、60 及 120 a 时,这两种工况的浓度分布情况。由图可知,在相同的时刻,在这两种工况下土层中的浓度分布曲线是不同的,工况 2 的浓度普遍比工况 1 大较大。虽然这两种工况的浓度剖面不同,但由图 5 可知,衬里底端达到同样的污染物通量,两种不同工况所需的时间是相同的,即如以衬里底端通量作为衬里设计的控制指标,这两种结构的击穿曲线是一致的。

5 结 论

建立了污染物在成层介质中扩散的一维模型,并得到了解析解。基于这个解析解编制了相应的程序,并将本文方法与有限差分法进行了比较,发现两者所得结果较为一致。对于以衬里底端通量作为衬里设计的控制指标时,两种性质不同衬里的放置顺序并不影响污染物的击穿曲线,但是两种情形的浓度分布曲线不同。本文提出的计算模型能考虑任意层的污染物扩散问题,可以为垃圾填埋场衬里系统的初步设计提供参考,亦可以用来检验更复杂的数值模型。由于本文在推导该解析解时是基于土层饱和及土体对污染物的线性吸附假设;因此应进一步研究土层非饱和性及土

层对污染物的非线性吸附作用对污染物扩散的影响。

参考文献:

- [1] FOOSE G J. Transit-time design for diffusion through composite liners[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2002, **128**(1): 590 - 601.
- [2] GOODALL D C, QUIGLEY R M. Pollutant migration from two sanitary landfill sites near Sarnia, Ontario[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1977, **14**(2): 223 - 236.
- [3] JOHNSON R L, CHERRY J A, PANKOW J F. Diffusion contaminant transport in natural clay: A field example and implications for clay-lined waste disposal sites[J]. Journal of Environmental Science and Technology, 1989, **23**(3): 340 - 349.
- [4] ROWE R K, CAERS C J, BARONE F. Laboratory determination of diffusion and distribution coefficients of contaminants using undisturbed clayey soil[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1988, **25**(1): 108 - 118.
- [5] 罗春泳, 唐晓武, 陈云敏, 等. 粘性土中离子扩散的影响因素研究[C]//第九届土力学及岩土工程学术会议论文集. 北京: 清华大学出版社, 2003: 1254 - 1257.
- [6] 成春奇. 粘土对重金属污染物容纳阻滞能力研究[J]. 水文地质工程地质, 2001, **28**(6): 12 - 14.
- [7] ROWE R K, BOOKER J R. The analysis of pollutant migration in a non-homogeneous soil[J]. Geotechnique, 1984, **34**(4): 601 - 612.
- [8] ROWE R K, BOOKER J R. A finite layer technique for calculating 3D pollutant migration in soil [J]. Geotechnique, 1986, **36**: 205 - 226.
- [9] 俞调梅, 朱百里. 废弃物填埋场设计[M]. 上海: 同济大学出版社, 1999.
- [10] GUYONNET D, PERROCHET P, et al. On the hydro-dispersive equivalence between multi-layered mineral barriers[J]. Journal of Contaminant Hydrology, 2001, **51**: 215 - 231.
- [11] ROWE R K, BADV K. Chloride migration through clayey silt underlain by fine sand or silt[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **122**(1): 60 - 68.
- [12] SHACKELFORD C D, DANIEL D E. Diffusion in saturated soil. I: Background[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1991, **117**(3): 467 - 484.
- [13] 奥齐西克 M N. 热传导[M]. 北京: 高等教育出版社, 1984.
- [14] LEE P K K, XIE K H, CHEUNG Y K. A study on one dimensional consolidation of layered systems[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1992, **16**: 815 - 831.