

不同介质互层分布的弹性半空间地震波场输入

王子辉, 赵成刚, 李伟华, 徐春铃
(北京交通大学土木工程学院岩土所, 北京 100044)

摘要: 基于 Biot 两相饱和和多孔介质动力学理论, 提出两相饱和和多孔介质与单相固体介质互层弹性半空间地震波场解析计算方法, 为两相饱和和多孔介质和单相固体介质互层分布弹性半空间中的地下结构的地震波场输入提供理论基础。

关键词: 单相固体介质; 饱和多孔介质; Biot 动力理论; 平面波

中图分类号: TU459 文献标识码: A 文章编号: 1000 - 4548(2006)01 - 0033 - 04

作者简介: 王子辉(1967 -), 男, 副教授, 博士生, 主要从事岩土地震工程方面的研究。

Input seismic wave fields in elastic half-space interbedded by liquid-filled porous medium and solid medium

WANG Zi-hui, ZHAO Cheng-gang, LI Wei-hua, XU Chun-ling
(Institute of Geotechnical Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: Based on Biot dynamic theory for liquid-saturated porous media, the analytical expression and computing method were presented for the seismic wave fields in elastic half-space interbedded by liquid-filled porous medium and solid medium. The theoretical fundamentals were also provided for the input seismic wave fields of underground structures.

Key words: solid medium; liquid-filled porous medium; Biot dynamic theory; in-plane wave

0 引言

关于波在层状单相固体介质中的传播问题, 很早就有这方面的研究^[1, 2], 但关于地震波在两相饱和介质与单相固体介质互层分布弹性半空间的波场输入问题还未见报道。目前仅有关于波在两相饱和介质与单相固体介质交界面的反射与透射规律的研究论文: 文献[3]研究了地震波在交界面的反射和透射, 但没考虑能量耗散情况; 文献[4, 5]研究了在能量耗散下地震波在交界面的反射和透射规律。本文根据相关理论^[6]和单相固体动力理论及文献[4, 5], 研究了从基岩入射平面 P 波或 SV 波在两相饱和介质与单相固体介质互层分布的弹性半空间中产生的应力和位移场, 为分析置于该地层中的地下建筑物自由地震波场输入及其地震反应分析提供理论基础。文中所考虑的介质是均匀、各向同性的弹性情况, 对于互层介质的其它本构模型, 将另文加以论述。

1 基本方程

1.1 波动方程

单相固体介质中的波动方程:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot u) + G\Delta u \quad (1)$$

两相饱和介质中的波动方程^[6]:

$$\left. \begin{aligned} G\nabla^2 u_s + \nabla((\lambda' + G')e + Q\varepsilon) &= (\rho_{11} \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}), \\ \nabla(Qe + R\varepsilon) &= (\rho_{12} \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}). \end{aligned} \right\} (2)$$

式中 $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ 为位移向量; λ, G, λ', G' 为单相固体介质和固相的拉梅常数; ρ 为单相固体介质的密度; ∇ 为哈密顿矢量算子; Δ 为拉普拉斯算子; $u_s = (u_{s1}, u_{s2}, u_{s3})^T$; $U = (U_1, U_2, U_3)^T$ 分别为两相饱和介质中固相和液相的位移向量; Q, R 为两相饱和介质的物理常数; $e = \nabla \cdot u$; $\varepsilon = \nabla \cdot U$; ρ_{11}, ρ_{22} 分别为固相和液相的有效密度; ρ_{12} 为固液两相惯性耦合密度。

由矢量分析中的赫尔姆霍兹定理, 位移矢量可写成如下形式:

$$u(\text{或} u_s, U) = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi \quad (3)$$

式中 Φ 称为标量势函数, Ψ 称为矢量势函数。将式(3)代入式(1)、(2)中可分别得到单相固体介质和两相饱和介质中关于 Φ 和 Ψ 的标准波动方程, 频域标准波动方程解的一般形式:

$$\Phi(\text{或}\Psi) = E \exp[i(\omega t - k_1 x_1 + k_2 x_2)] + F \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)] \quad (4)$$

式中 E 、 F 为波幅系数； ω 为角频率； k_1 、 k_2 为波在直角坐标系 $x_1 o x_2$ 中 x_1 、 x_2 轴方向的视波数。由 Biot 动力理论，两相饱和多孔介质中存在快 P_{I} 波、慢 P_{II} 波和 SV 波，液相和固相中波的势函数表达见文献[4]。

1.2 应力、位移场

单相固体介质中的应力、位移场：

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \\ \sigma_{22} &= \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2G \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ \tau_{12} &= G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 φ 、 ψ 分别为单相固体介质中波的标量势函数与矢量势函数； u_1 、 u_2 分别为 x_1 、 x_2 轴方向的位移；

σ_{22} 为 x_2 轴方向的正应力； τ_{12} 为剪应力。

两相饱和介质中的应力、位移场：

$$\left. \begin{aligned} u'_{1s} &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_s}{\partial x_2}, \quad u'_{2s} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_s}{\partial x_1}, \\ \sigma'_{22s} &= \lambda' \left(\frac{\partial u'_{1s}}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_{2s}}{\partial x_2} \right) + 2G' \frac{\partial u'_{2s}}{\partial x_2} + Q \left(\frac{\partial U'_{1L}}{\partial x_1} + \frac{\partial U'_{2L}}{\partial x_2} \right), \\ \tau'_{12s} &= G' \left(\frac{\partial u'_{1s}}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_{2s}}{\partial x_1} \right), \quad U'_{1L} = \frac{\partial \varphi_L}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_L}{\partial x_2}, \\ U'_{2L} &= \frac{\partial \varphi_L}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_L}{\partial x_1}, \\ \sigma'_{22L} &= Q \left(\frac{\partial u'_{1s}}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_{2s}}{\partial x_2} \right) + R \left(\frac{\partial U'_{1L}}{\partial x_1} + \frac{\partial U'_{2L}}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 φ_s 、 ψ_s 为两相饱和介质中固相波的标量势函数与矢量势函数； u'_{1s} 、 u'_{2s} 为固相在 x_1 、 x_2 轴方向的位移； σ'_{22s} 为固相在 x_2 轴方向的正应力； τ'_{12s} 为固相中的剪应力； φ_L 、 ψ_L 为两相饱和介质中液相波的标量势函数与矢量势函数； U'_{1L} 、 U'_{2L} 为液相在 x_1 、 x_2 轴方向的位移； σ'_{22L} 为液相在 x_2 轴方向的正应力。

2 任一层介质地震波场的解析表达

2.1 “关键层”的提出

波在两相饱和介质与单相固体介质互层的弹性半空间传播过程中，交界面的连续性条件将相邻两层介质中波的势函数联系起来，从而得出波幅系数间的关系。各种交界面的连续性条件详见文献[4, 5]。

将单相固体介质和两相饱和介质中波的势函数代入式(5)、(6)，分别得单相固体介质与两相饱和介质的应力、位移的矩阵表达式：

单相固体介质

$$S = T_s H \exp[i(\omega t - k_{1p} x_1)] \quad ; \quad (7)$$

两相饱和介质

$$S' = T'_s H' \exp[i(\omega t - k'_{1pl} x_1)] \quad . \quad (8)$$

其中 S 、 S' 为应力一位移矢； H 、 H' 为波幅矢； T_s 、 T'_s 为转换矩阵。 $S^T = (u_1, u_2, \sigma_{22}, \tau_{12})$ ， $S'^T = (u'_{1s}, u'_{2s}, \sigma'_{22s}, \tau'_{12s}, U'_{1L}, U'_{2L}, \sigma'_{22L})$ ， $H'^T = (E'_{pl}, F'_{pl}, E'_{pII}, F'_{pII}, E'_s, F'_s)$ ， $H^T = (E_p, F_p, E_s, F_s)$ ， $T_s = [r_{ij}]_{4 \times 4}$ ， $T'_s = [r'_{ij}]_{7 \times 6}$ ， r'_{ij} 、 r_{ij} 的表达式详见文献[7]。

若有 n 层连续分布的单相固体介质或两相饱和介质，则第 n 层与第 1 层波幅矢间的关系为

$$H_n = T_{n1} H_1 \quad , \quad (9)$$

其中 T_{n1} 为第 1 层与第 n 层介质波幅矢间的传递矩阵。

当相邻两层介质中的一层为单相固体介质另一层为两相饱和多孔介质时，由交界面连续性条件，有

$$T_s H = T'_s H' \quad . \quad (10)$$

式中 H 、 H' 分别为单相固体介质与两相饱和介质的波幅矢； T_s 、 T'_s 分别为相应的转换矩阵。因 T_s 、 T'_s 不存在逆矩阵，所以，单相固体介质与两相饱和介质的波幅矢之间不存在传递矩阵。

为说明上的方便，本文称基岩层、顶层介质以及与相邻层不存在传递矩阵的介质层为“关键层”。

2.2 顶层介质波幅矢的表达式

当顶层为单相固体介质，设顶层介质波幅矢为 $H^T = (E_p, F_p, E_s, F_s)$ ，由顶层自由面边界条件：

$$\sigma_{22} = \tau_{12} = 0 \quad , \quad (11)$$

$$\text{即 } A \begin{pmatrix} F_p \\ F_s \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} E_p \\ E_s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F'_p \\ F'_s \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} E_p \\ E_s \end{pmatrix}, \quad C = A^{-1} \cdot B \quad .$$

其中 $A = \begin{pmatrix} r_{32} & r_{34} \\ r_{42} & r_{44} \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} -r_{31} & -r_{33} \\ -r_{41} & -r_{43} \end{pmatrix}$ ，所以 $F_p = c_{11} E_p + c_{12} E_s$ ， $F_s = c_{21} E_p + c_{22} E_s$ 。波幅矢

$$H^T = (E_p, c_{11} E_p + c_{12} E_s, E_s, c_{21} E_p + c_{22} E_s) \quad . \quad (12)$$

当顶层为两相饱和介质，设顶层介质波幅矢 $H'^T = (E'_{pl}, F'_{pl}, E'_{pII}, F'_{pII}, E'_s, F'_s)$ ，同样由顶层自由面边界条件：

$$\sigma'_{22s} = \sigma'_{22L} = \tau'_{12s} = 0 \quad , \quad (13)$$

$$\text{即 } A' \begin{pmatrix} F'_{pl} \\ F'_{pII} \\ F'_s \end{pmatrix} = B' \begin{pmatrix} E'_{pl} \\ E'_{pII} \\ E'_s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F'_{pl} \\ F'_{pII} \\ F'_s \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} E'_{pl} \\ E'_{pII} \\ F'_s \end{pmatrix}, \quad \text{其中}$$

$$A' = \begin{pmatrix} r'_{32} & r'_{34} & r'_{36} \\ r'_{42} & r'_{44} & r'_{46} \\ r'_{72} & r'_{74} & r'_{76} \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} -r'_{31} & -r'_{33} & -r'_{35} \\ -r'_{41} & -r'_{43} & -r'_{45} \\ -r'_{71} & -r'_{73} & -r'_{75} \end{pmatrix},$$

$C' = A'^{-1} \cdot B'$ 。波幅矢

$$H'^T = (E'_{pl}, c'_{11} E'_{pl} + c'_{12} E'_{pII} + c'_{13} E'_s, E'_{pII}, c'_{21} E'_{pl} +$$

$$c'_{22}E'_{p11} + c'_{23}E'_s, E'_s, c'_{31}E'_{pi} + c'_{32}E'_{p11} + c'_{33}E'_s) \quad (14)$$

矩阵 A, B, A', B' 中的 r_{ij}, r'_{ij} 的表达见文献[7]。

2.3 任一层地震波场的解析表达

在各“关键层”中，基岩层的入射波的波幅系数是已知的，未知的是反射 P 波与 SV 波的波幅系数；对于顶层介质，根据边界条件，反射 P 波与 SV 波的波幅系数可用入射 P 波与 SV 波的波幅系数表示，所以未知波幅系数减少一半；对于中间的“关键层”其波幅系数均是未知量。因此，求解任一层介质地震波场的关键是交界面连续性条件建立关于“关键层”未知波幅系数的线性方程组，解方程组后，得到“关键层”的波幅矢，再由传递矩阵可得到任一层介质的波幅矢，由式 (7)、(8) 计算任一层介质的应力、位移场，速度和加速度场可由位移场的一阶和二阶微分得到，这样，两相饱和介质与单相固体介质互层分布弹性半空间的地震波场的解析表达可知。

以图 1 说明任一层地震波场解析表达计算过程：

(1) 确定“关键层”

“关键层”为基岩、第一层两相饱和介质、第一层单相固体介质。

(2) “关键层”波幅矢计算

①分别计算两层单相固体介质间和两层两相饱和介质间波幅矢的传递矩阵为 T, T' ；②按交界面连续性条件建立关于“关键层”未知波幅系数的方程组。

未知波幅系数有：层 5, F_{p5}, F_{s5} ；层 3, $E'_{pi}, F'_{pi}, E'_{p11}, F'_{p11}, E'_s, F'_s$ ；层 1, E_{p1}, E_{s1} 。选取每一层的顶面为该层坐标原点，见图 1，交界面连续性条件如下：

基岩与第二层两相饱和介质之间，

$$T_s^5 \Big|_{x_2=0} H_5 = T_s^4 \Big|_{x_2=h'} H_4 ; \quad (15)$$

第二层两相饱和介质与第一层两相饱和介质之间

$$H_4 = T'H_3 ; \quad (16)$$

第一层两相饱和介质与第二层单相固体介质之间

$$T_s^3 \Big|_{x_2=0} H_3 = T_s^2 \Big|_{x_2=h'} H_2 ; \quad (17)$$

第二层单相固体介质与第一层单相固体介质之间

$$H_2 = TH_1 \quad (18)$$

在式 (15)~(18) 中， H_i 为第 i 层的波幅矢， T_s^{ii} (或 T_s^i) 为第 i 层的转换矩阵。

将式 (16) 代入式 (15)，得

$$T_s^5 \Big|_{x_2=0} H_5 = T_s^4 \Big|_{x_2=h'} \cdot T'H_3 \quad (19)$$

将式 (18) 代入式 (17)，得

$$T_s^3 \Big|_{x_2=0} H_3 = T_s^2 \Big|_{x_2=h'} \cdot TH_1 \quad (20)$$

以式 (19)、(20) 建立线性方程组为

$$AX = B, \quad (21)$$

其中 X 由 H_5, H_3, H_1 中未知波幅系数组成的向量，

$X^T = (F_{p5}, F_{s5}, E'_{pi}, F'_{pi}, E'_{p11}, F'_{p11}, E'_s, F'_s, E_{p1}, E_{s1})$ ， $A = [a_{ij}]_{10 \times 10}$ ， $B = [b_{ij}]_{10 \times 1}$ 。用全选主元高斯消去法求解复系数方程组，得到“关键层”未知波幅系数 X 。

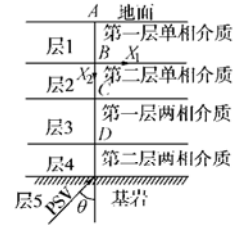


图 1 互层介质分布

Fig. 1 The distribution of interbedded medium

(3) 任一层介质地震波场解析表达的计算

在上一步骤中已得出第 1、3、5 层的波幅矢，再由式 (16)、(18) 得到第 2、4 层的波幅矢，则每一层介质的波幅矢均已知，由式 (7)、(8)，得到任一层介质地震波场的解析表达。

笔者根据以上计算过程编制了计算机程序，可计算在 P 波或 SV 波入射时在两相饱和介质与单相固体介质任意互层分布的弹性半空间的地震波场。

3 算 例

图 1 中两相饱和介质的层厚均为 25.0 m，单相固体介质层厚均为 20.0 m，各层介质力学参数见表 1、2。在基岩顶面入射矩形单脉冲加速度 $a(t)$ 的 P 波或 SV 波，持续时间为 4 s，入射角 $\theta = 30^\circ$ 。

$$a(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_d \\ 0 & t > T_d \end{cases} \quad (22)$$

表 1 单相固体介质的物理参数

层号	密度 $\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	拉梅常数 λ / Pa	拉梅常数 G / Pa
1	2100	2.0×10^7	1.2×10^7
2	2200	2.4×10^7	1.6×10^7
5	2800	2.8×10^9	1.9×10^9

表 2 两相饱和介质的物理参数

层号	3	4
密度 $\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	2600	2640
密度 $\rho_w / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	0	0
密度 $\rho_s / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	1000	1000
拉梅常数 λ	4.5×10^8	5.5×10^8
拉梅常数 G	6.8×10^7	7.8×10^7
物理常数 Q	6.2×10^6	8.0×10^6
物理常数 R	0.8×10^6	1.2×10^6
孔隙率 β	0.42	0.35

基岩入射 P 波势函数为

$$\varphi_i = E \exp i(\omega t - k_{ip} x_1 + k_{2p} x_2) \quad (23)$$

$$E_p = \frac{2c_p \sin \frac{\omega T_d}{2}}{\omega^4} \exp(-i(\omega(t + \frac{T_d}{2}) + \frac{\pi}{2})) \quad (24)$$

基岩波幅矢为 $(E_p, F_p, 0, F_s)^T$ 。按 2.3 节计算任一层介质的地震波场的频域解。对位移、应力场的频域解进行快速傅里叶逆变换, 得任一层介质地震波场输入的时域解。当入射波为矩形单脉冲加速度的 SV 波时, 基岩波幅矢为 $(0, F_p, E_s, F_s)^T$, 其中 E_s 按下式计算,

$$E_s = -\frac{2c_p \sin \frac{\omega T_d}{2} \tan \theta}{\omega^4} \exp(-i(\omega(t + \frac{T_d}{2}) + \frac{\pi}{2})). \quad (25)$$

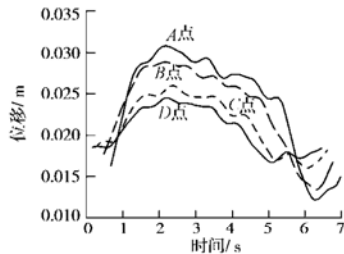


图 2 P 波入射时各点水平位移时程曲线

Fig. 2 The horizontal displacement-time curve of each point under P-wave

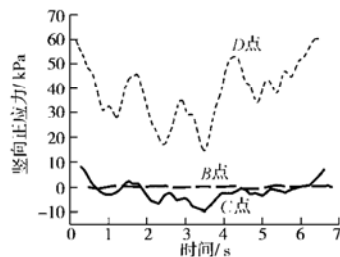


图 3 P 波入射时各点竖向正应力时程曲线

Fig. 3 The vertical normal stress-time curve of each point under P-wave

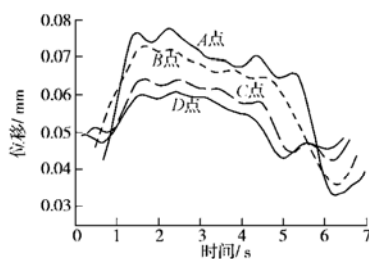


图 4 SV 波入射时各点水平位移时程曲线

Fig. 4 The horizontal displacement-time curve of each point under SV-wave

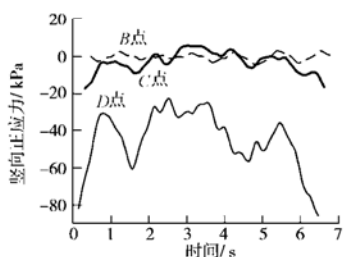


图 5 SV 波入射时各点竖向正应力时程曲线

Fig. 5 The vertical normal stress-time curve of each point under SV-wave

计算结果表明, 不论入射波是 P 波还是平面 SV 波, 自由表面的切向和法向应力值为 $1.0 \times 10^{-5} \sim 1.0 \times 10^{-6}$ Pa, 趋于 0, 认为边界条件得到满足。另外, 在交界面处的连续性条件也得到满足。现将各层顶面各点 A, B, C, D (见图 1) 的水平位移和竖向正应力的时程曲线给出, 见图 2~5。

4 结 语

在许多情况下, 自然界中地层的分布是两相饱和多孔介质与单相固体介质互层分布的。对于这种复杂的地层分布, 当平面 P 波或 SV 波从基岩入射时, 本文为其地震波场输入的解析表达提供一种计算方法, 也为分析处于这种互层分布地层中的地下建筑物自由地震波场输入及其地震反应提供理论基础。

参考文献:

- [1] EWING M, WORZEL J L, PEKERIS C L. Propagation of sound in the ocean. In: Memoir 27[M]. New York: The Geological Society of America, 1948.
- [2] THOMSON W T. Transmission of elastic waves through a stratified solid material[J]. Appl Phys, 1950, 21:89 - 93.
- [3] HAJRA S, MUKHOPADHYAY A. Reflection and refraction of wave incident obliquely at the boundary of liquid-saturated porous solid[J]. Bull Seism Soc Am, 1982, 72:1509 - 1533.
- [4] 赵成刚, 等. 波从单相介质向两相饱和和多孔介质入射时在交界面上的反射与透射[J]. 地震工程与工程振动, 1998, 18(1):131 - 138. (ZHAO Cheng-gang, et al. Reflection and transmission of plane waves on interface between solid and liquid-filled porous solid[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1998, 18(1):131 - 138.)
- [5] 赵成刚, 等. 波在饱和和多孔介质与弹性固体介质交界面上的界面效应[J]. 地震工程与工程振动, 1999, 19(1):1 - 6. (ZHAO Cheng-gang. Boundary effect of wave propagating from liquid-filled porous medium to solid medium[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1999, 19(1):1 - 6.)
- [6] BIOT M A. Theory of propagation of elastic wave in a fluid-saturated porous solid[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1956, 28(2):168 - 191.
- [7] 徐春铃. 水平成层饱和和两相介质中基岩入射平面 P 波的反演[D]. 北京: 北京交通大学, 2003. (XU Chun-ling. Inversion of incident plane P wave from bedrock in parallel horizontal porous layers[D]. Beijing: North Jiaotong University, 2003.)