

固结系数的最小二乘法计算

包 太, 刘新荣, 朱 凡, 朱可善

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

摘 要: 室内固结试验确定固结系数常用的是时间对数法和平方根法, 这两种方法仅利用了试样固结试验中沉降量与时间关系曲线的初始值, 利用的数据较少, 无法反映固结的全过程。同时由于作图法受到的人为因素影响较大, 难以准确确定固结系数, 本文采用工程上通用的最小二乘法, 通过公式推导, 编程得到了固结系数的求解过程, 通过计算机运算, 从而避免了人为因素的影响, 同时也得到了固结的初值和终值。

关键词: 固结系数; 最小二乘法; 初始值; 固结试验

中图分类号: TU 411

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2005)10 - 1230 - 03

作者简介: 包 太(1972 -), 男, 吉林通化人, 博士研究生, 主要从事岩土力学与工程方面的研究。

Least square method for the consolidation coefficient evaluation

BAO Tai, LIU Xin-rong, ZHU fan, ZHU Ke-shan

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: The consolidation coefficient was an important parameter in geotechnical engineering. To improve the precision of consolidation coefficient, many solutions have been suggested, such as logarithm of time and square root of time methods. However, many solution depends on the initial value of compression curve which and influenced the precision of consolidation coefficient directly. At the same time, only few data were adopted to determine the consolidation coefficient and couldn't reflect the complete process of consolidation. So, in the paper, the least square method was adopted to compute the consolidation coefficient with the derived formulae. At the same time, the obtained solution could eliminate personal error and get the initial and final values of consolidation.

Key words: consolidation coefficient; least square method; initial value; consolidation test

0 前 言

固结系数反映土层固结特性的参数, 在基础沉降计算中具有十分重要的意义。目前由室内固结试验确定固结系数的方法中, 最早提出且应用最广泛的是时间平方根法和时间对数法^[1], 这两种方法均属作图法, 人为因素对于固结系数的计算影响较大。而三点法当采点不恰当时, 会使得固结系数计算出现较大的离散性。司各脱法是一种较好的计算方法, 但是其本身也依赖于初值的准确性, 从而对于固结系数也有较大的影响, 即使初值变化千分之一, 也会使计算得到的初期固结系数发生较大的变化^[2]。因此如何准确、有效的计算出固结系数是岩土工程中的一个重要问题。许多学者提出了许多的计算方法, 各种计算方法各有千秋^[3-7]。因此, 本文采用最小二乘法来进行固结系数的计算, 从而减小了由于确定初始值而导致的计算上的偏差。

1 公式的推导

对于固结试验来说, 假设在任意时刻 t , 其读数 为 r_t , 则其固结度 $U(t)$ 可以表示如下

$$U(t) = 1 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{M^2} e^{-M^2 \frac{c_v t}{H^2}} = \frac{r_0 - r_t}{r_0 - r_f} \quad (1)$$

式中 $M = (2k+1)\pi/2$; c_v 为固结系数; H 为压缩层厚度; r_0 为固结初始读数; r_f 为固结结束终值读数 $U(t)$ 为任意时刻 t 的固结度; r_t 为任意时刻 t 的读数。

因此, 根据式(1), 则可以假设

$$Q(c_v, r_0, r_f) = \sum_1^n \left[\frac{r_0 - r_t}{r_0 - r_f} - U(t) \right]^2 = \min \quad (2)$$

式中 n 为数据组数。

把上式对 r_0 及 r_f 分别求偏导, 则有

基金项目: 留学回国人员科研启动基金资助项目(教外司留[2002]247号)

收稿日期: 2004 - 11 - 30

$$\frac{\partial Q}{\partial r_0} = 2 \sum_1^n \left(\frac{r_0 - r_i - U(t)}{r_0 - r_f} \right) \left(\frac{r_i - r_f}{(r_0 - r_f)^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial r_f} = 2 \sum_1^n \left(\frac{r_0 - r_i - U(t)}{r_0 - r_f} \right) \left(\frac{r_0 - r_i}{(r_0 - r_f)^2} \right) \quad (4)$$

根据极限条件, 则有 $\frac{\partial Q}{\partial r_0} = 0, \frac{\partial Q}{\partial r_f} = 0$ 。

把以上两式联立求解, 即可以求出 r_0, r_f 值, 从而即可以确定在给定的固结系数的条件下, 在较多的数据对的条件下, 可以确定初值及终值。

把式(3)和式(4)相加并取极值后, 则有

$$\frac{\partial Q}{\partial r_0} + \frac{\partial Q}{\partial r_f} = \sum_1^n \left(\frac{r_0 - r_i - U(t)}{r_0 - r_f} \right) \left(\frac{1}{(r_0 - r_f)} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\sum_1^n \left(\frac{r_0 - r_i - U(t)}{r_0 - r_f} \right) = 0 \quad (6)$$

设 $r_0 - r_f = B$, 则有

$$\sum_1^n (r_0 - r_i - BU(t)) = 0 \quad (7)$$

对上式化简, 则可以得到

$$B = \frac{nr_0 - \sum_1^n r_i}{\sum_1^n U(t)} \quad (8)$$

对式(3)运用极限条件, 化简后, 则可得

$$\sum_1^n \left(\frac{r_0 - r_i - U(t)}{r_0 - r_f} \right) r_i = 0 \quad (9)$$

对式(9)进行化简, 则有

$$\sum_1^n (r_0 \cdot r_i - r_i \cdot r_i - B \cdot r_i \cdot U(t)) = 0 \quad (10)$$

对式(10)进行整理, 则可以得到初值的表达式

$$r_0 = \frac{\sum_1^n r_i^2 \cdot \sum_1^n U(t) - \sum_1^n r_i \cdot \sum_1^n r_i \cdot U(t)}{\sum_1^n r_i \cdot \sum_1^n U(t) - n \sum_1^n r_i \cdot U(t)} \quad (11)$$

把式(11)和(8)代入式(2)中, 通过对给定范围的固结系数的搜索^[8], 使得式(2)的值最小, 从而得到最优解, 得到初值及固结系数和终值。

$$Q(c_v, r_0, r_f) = \sum_1^n \left[\frac{r_0 - r_i - U(t)}{B} \right]^2 = \min \quad (12)$$

2 程序的编制

根据上式, 采用 matlab 编制了相应的程序, 进行了计算。在固结度的计算中, 根据前后两项级数的差值确定迭代的次数。据此, 确定了不同时间因数下固

结度达到收敛所需要的级数项, 如表 1 所示。从表 1 中可以看到, 随着时间因数的增加, 其达到误差所需的级数项急剧减少, 从而可以使得计算过程较为快速。同时, 根据文献[8]设定了固结系数搜索的范围, 通过对固结系数的迭代求解过程, 当公式(12)达到最小值时所得到的固结系数即为最优解, 从而得到固结系数及相应的初始值和终值。

表 1 固结度稳定所需计算级数分析

Table 1 The convergence of degree of consolidation

时间因数	固结度	计算级数
0.00001	0.003568	320
0.0001	0.011284	111
0.001	0.035682	38
0.05	0.252313	6
0.10	0.356823	4
0.15	0.436950	4
0.20	0.504088	3
0.30	0.613236	3
0.40	0.697882	2
0.50	0.763950	2
0.60	0.815565	2
0.70	0.855893	2
0.80	0.887403	2
0.90	0.912023	2
1.00	0.931260	1

注: 误差为 10^{-10}

$$\text{计算公式: } U(t) = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M^2} e^{-M^2 T}$$

3 算例分析

根据上述所得的计算公式及所编制的程序, 采用算例对本文所得公式进行了验证。

3.1 算例 1

利用文献[2]所给出的数据, 如表 2 所示, 采用本文所编制的程序, 进行了计算。所得结果如表 3 所示。由表 3 可知, 固结系数为 $23.2 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$, 文献[2]中固结系数约为 $23 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$, 两者的误差为 0.86%。从而说明, 采用本文所提出的方法, 是准确的。同时, 本文所采用的方法不仅可以得到固结系数, 对于初始值及最终的沉降值也可以准确的计算出来。

表 2 算例 1 计算数据

Table 2 The data for example 1

时间/s	读数/mm
15	2.0250
60	1.9530
144	1.8820
240	1.8150
360	1.7500
540	1.7000
900	1.6380
1200	1.6150
1800	1.593

表3 算例1 计算结果

Table 3 The result of example 1

初值 /mm	终值 /mm	固结系数 /($\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$)	计算 时间/s	$Q(c_v, r_0, r_f)$
2.094759	1.592293	0.00232	294	4.4×10^{-4}

3.2 算例2

根据文献[1]中所得的数据,如表4所示,采用本文所编制的程序进行了计算,求解了固结系数。

根据表4的数据,输入上节所编制的程序中,该程序在P4 2.4GHz计算机上进行计算,其结果如表5所示。

表4 算例2 计算数据

Table 4 The data for example 2

时间/s	读数/mm
15	2.0250
60	1.9530
198	1.8400
240	1.8150
540	1.7000
630	1.6600
1200	1.6150

表5 算例2 计算结果

Table 5 The result of example 2

初值 /mm	终值 /mm	固结系数 /($\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$)	计算 时间/s	$Q(c_v, r_0, r_f)$
2.097805	1.593107	0.002405	223	9.0×10^{-4}

通过该法所得到的固结系数与文献1所得到的计算结果对比分析表明,本文所采用的方法,可以快速的得到试验成果。

3.3 计算结果的对比分析

表6是不同方法确定固结系数结果对比^[1],从表中可以看出,利用最小二乘法可以快速的得到计算结果。

表6 不同固结系数测试方法结果的比较

Table 6 The comparison of different calculation methods

计算方法	时间 对数 法	平方 根法	反弯 点法	三点 法	司各 脱法	最小二乘 法
固结系数/ ($10^{-4} \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	22.7	30.7	7.7	24.7	24.7	24.05
初始读数 /mm	2.10	2.10	—	2.097	2.097	2.097805
计算时间/s	很长	长	长	长	长	223

果。其所得结果可以满足工程上的需要,同时,该法易于实现,可以对试验数据快速的处理。

4 结 论

通过以上的推导与验算,可以得到以下结论:

(1) 作为一种工程实用的方法,工程中采用最小二乘法在计算固结系数,其结果与司各脱法及三点法均相近,说明本文提出的方法是可行的。

(2) 与常规的图解法及解析法相比较,本文提出的方法利用计算机,对所得数据可以快速的进行计算,所得结果较为精确,从而避免了由于图解法中人为因素而造成的误差。

(3) 用本文提出的方法可以不采用实验后期的数据,只需要前一段时间内的数据就可得到精确的解,从而可减少测读次数。

参考文献:

- [1] 钱家欢,殷宗泽.土工原理与计算[第二版][M].北京:水利电力出版社,1994.
- [2] Ronald f, Scott. New method of consolidation coefficient evaluation[A]. Journal of the soil mechanicals and foundations division proceedings of the Americal in Society of Civil Engineers[C]. 1961.
- [3] Cour F R. Inflection point method for computing C_v [J]. J Soil Mech Fdn Engng, ASCE, 1971, (1): 827 - 831.
- [4] 张仪萍,俞亚南,张土乔,等.室内固结系数的一种推算方法[J].岩土工程学报,2002,24(5):616 - 618.
- [5] 谢新宇,张继发,曾国熙.饱和土体一维主固结解析方法研究[J].浙江大学学报,2002,36(4):345 - 351.
- [6] 能兴邦,陈 钟.固结系数的计算方法[J].工程勘察,1996,6:17 - 21.
- [7] 张诚厚,施 健,戴济群.孔压静力触探试验的应用[J].岩土工程学报,1997,19(1):50 - 56.
- [8] BRAJA M,DAS.Principles of foundation engineering (third edition)[M]. Pws publishing company, 1995.