

双线性荷载传递函数的单桩荷载沉降关系统一解 Unified load-settlement solution of single piles based on bilinear load transfer

洪 鑫, 雷国辉, 施建勇
(河海大学 岩土工程研究所, 江苏 南京 210098)

关键词: 桩; 荷载传递函数; 软化; 硬化; 理想弹塑性

中图分类号: TU 413 文献标识码: A 文章编号: 1000- 4548(2004) 03- 0428- 04

作者简介: 洪 鑫(1978-), 男, 河海大学岩土工程研究所, 硕士研究生, 主要从事基础工程方面的研究。

0 前 言*

采用荷载传递函数法研究单桩的荷载沉降关系, 因其形式简单, 便于应用, 而受到普遍关注。常用的有双线性函数、双曲线函数、对数及指数函数等^[1]。其中, 双线性函数在模拟桩周土的软化特性上较其它函数有相对优势^[2]。然而, 现有的基于双线性函数的单桩荷载沉降关系解析解答只是针对某种特定工况(比如摩擦桩^[3])或特定模型而提出来的, 比如, 桩侧土强度随深度不变, 桩周土为硬化模型^[4]或理想弹塑性模型^[5, 6], 或桩侧土强度随深度线性变化且为理想弹塑性模型而桩端土为硬化模型^[7]。现有解答形式多样且散乱, 不便于对实际工程进行设计分析和应用。

本文采用双线性荷载传递函数模拟桩侧土和桩端土的硬化和软化模型特性, 同时考虑桩侧土的抗剪强度随深度线性增加, 推导了桩周土在不同状态(弹性或塑性)组合下的单桩荷载沉降关系解答及其算法, 使之能够反映单桩在不同工况下的荷载传递机理, 即承载特性, 使解答完善和统一。

1 双线性荷载传递函数统一表达式

假定桩体和桩周土的力学模型如图 1 所示。桩侧土的剪切(应力 τ_s 和位移 u) 软化和硬化模型可以用一个统一的双线性荷载传递函数表示为:

$$\left. \begin{aligned} \tau_s &= \lambda_{s1} u & u < u_{su} \\ \tau_s &= \tau_{su} \xi_s + \lambda_{s2} (u - u_{su}) & u \geq u_{su} \end{aligned} \right\} (1)$$

式中 λ_{s1} 为桩侧土的剪切刚度系数; $\tau_{su} = \lambda_{s1} u_{su}$ 为桩侧土的屈服应力(强度); u_{su} 为弹性和塑性的界限位移; λ_{s2} 为硬化参数; ξ_s 为软化系数。当 $\lambda_{s2} = 0, \xi_s < 1$ 时为软化模型; 当 $\lambda_{s2} = 0, \xi_s = 1$ 时为理想弹塑性模型; 当 $\lambda_{s2} > 0, \xi_s = 1$ 时为硬化模型。

与此类似, 桩端土的压缩(应力 σ_b 和位移 u) 软化和硬化模型也可以表示为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_b &= \lambda_{b1} u & u < u_{bu} \\ \sigma_b &= \sigma_{bu} \xi_b + \lambda_{b2} (u - u_{bu}) & u \geq u_{bu} \end{aligned} \right\} (2)$$

式中 λ_{b1} 为桩端土的法向刚度系数; $\sigma_{bu} = \lambda_{b1} u_{bu}$ 为桩端土的屈服应力(强度); u_{bu} 为弹性和塑性的界限位移; λ_{b2} 为硬化参数; ξ_b 为软化系数。当 $\lambda_{b2} = 0, \xi_b < 1$ 时为软化模型; 当 $\lambda_{b2} = 0, \xi_b = 1$ 时为理想弹塑性模型; 当 $\lambda_{b2} > 0, \xi_b = 1$ 时为硬化模型。

在缺乏试验资料的情况下, λ_{s1} 和 λ_{b1} 的取值可以通过文献[8]中的桩周土体应力与位移的弹性理论关系间接地得到, 用于单桩的初步计算和分析。

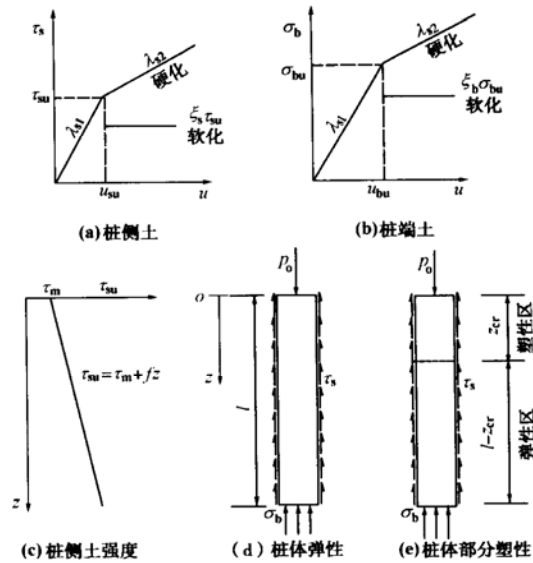


图 1 桩-土体系的简化力学模型
Fig. 1 Simplified mechanical model of a pile-soil system

2 桩周土不同状态的荷载沉降关系

假定桩长为 l , 桩的横截面积为 A , 周长为 C ; 桩体的弹性模量为 E ; 双线性荷载传递函数的参数(λ_{s1} ,

* 基金项目: 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目
收稿日期: 2003- 06- 19

λ_2, ξ_s 沿桩长保持不变; 桩侧土的抗剪(屈服)强度沿深度线性增加。为便于分析, 用 P_0 和 S_0 分别表示桩顶荷载和桩顶沉降, P_b 和 S_b 分别表示桩端荷载和桩端沉降, $u(z)$ 和 $P(z)$ 分别表示桩体的位移及轴力。

显然, 无论桩周土处于什么状态, 桩顶和桩端都将满足以下边界条件:

$$u|_{z=0} = S_0 \quad (3a)$$

$$EA \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} = -P_0, \quad (3b)$$

$$u|_{z=l} = S_b, \quad (3c)$$

$$EA \frac{du}{dz} \Big|_{z=l} = -P_b. \quad (3d)$$

2.1 桩侧土和桩端土均处于弹性状态(I)

该状态, $u(z) < u_{su}, S_b < u_{bu}$ 。桩体静力平衡方程为:

$$EA \frac{d^2u}{dz^2} - \lambda_1 Cu = 0, \quad (4)$$

令 $k_{s1} = \sqrt{\lambda_1 C / (EA)}$ 。 (5)

由式(4)和式(3c), (3d)可解得(因篇幅所限, 本文中的全部详细求解过程可参阅文献[9]):

$$u(z) = \frac{S_0 k_{s1} EA - P_b}{2k_{s1} EA} e^{k_{s1} z} + \frac{S_b k_{s1} EA + P_b}{2k_{s1} EA} e^{-k_{s1} z}. \quad (6)$$

由式(6)和式(3a), (3b)可得与文献[4]一致的解答:

$$S_0 = \frac{k_{s1} E + \lambda_1 \text{th}(k_{s1} l)}{k_{s1} EA [\lambda_1 + k_{s1} E \text{th}(k_{s1} l)]} P_0, \quad (7)$$

式中 符号 th 表示双曲正切函数。

2.2 桩侧土处于弹性, 桩端土处于屈服状态(II)

在该状态, $u(z) < u_{su}, S_b \geq u_{bu}$ 。桩体静力平衡方程仍为式(4), 而边界条件式(3d)中的桩端阻力为:

$$P_b = A \alpha_{bu} \xi_b + A \lambda_2 (S_b - u_{bu}). \quad (8)$$

联立式(3b, c, d)和式(8)重新求解式(4), 可得:

$$S_0 = \frac{P_0 [\text{ch}(k_{s1} l) + \lambda_2 \text{sh}(k_{s1} l) / (k_{s1} E)] / A - (\alpha_{bu} \xi_b - \lambda_2 u_{bu})}{k_{s1} E \text{sh}(k_{s1} l) + \lambda_2 \text{ch}(k_{s1} l)}, \quad (9)$$

式中 符号 sh 和 ch 分别表示双曲正弦和余弦函数。

2.3 桩侧土部分屈服, 桩端土处于弹性状态(III)

在该状态, $S_b < u_{bu}$ 。设一临界深度 z_{cr} 如图 1(e)所示, 当 $0 < z \leq z_{cr}$ 时, 桩侧土处于屈服阶段, $u(z) \geq u_{su}$; 当 $z_{cr} < z < l$ 时, 桩侧土处于弹性阶段, $u(z) < u_{su}$ 。采用 S_{cr} 和 P_{cr} 分别表示 $z = z_{cr}$ 处桩体的位移和轴力。因此, 在临界深度 z_{cr} 处, 有:

$$S_{cr} = (\tau_m + fz_{cr}) / \lambda_1. \quad (10)$$

当 $z_{cr} < z < l$ 时, 桩周土处于弹性状态, 故仅需将

式(7)中的 l 换成 $l - z_{cr}$ 即可得 P_{cr} 与 S_{cr} 的关系:

$$P_{cr} = k_{s1} EA \frac{\lambda_1 + k_{s1} E \text{th}[k_{s1}(l - z_{cr})]}{k_{s1} + \lambda_1 \text{th}[k_{s1}(l - z_{cr})]} S_{cr}. \quad (11)$$

当 $0 < z \leq z_{cr}$ 时, 桩体的平衡方程及边界条件为:

$$EA \frac{d^2u}{dz^2} = C \left[(\tau_m + fz) \xi_s + \lambda_2 \left| u - \frac{\tau_m + fz}{\lambda_1} \right| \right], \quad (12a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} EA \frac{du}{dz} \Big|_{z=z_{cr}} &= -P_{cr}, \\ u|_{z=z_{cr}} &= S_{cr}. \end{aligned} \right. \quad (12b)$$

当 $\lambda_2 = 0$ 时, 即桩侧土为软化或理想弹塑性模型, 解上式可得:

$$P_0 = P_{cr} + C(\tau_m z_{cr} + fz_{cr}^2/2) \xi_s, \quad (13a)$$

$$S_0 = S_{cr} + [P_{cr} z_{cr} + C(\tau_m z_{cr}^2/2 + fz_{cr}^3/3) \xi_s] / (EA). \quad (13b)$$

当 $\lambda_2 > 0$, $\xi_s = 1$ 时, 即桩侧土为硬化模型, 令

$$k_{s2} = \sqrt{\lambda_2 C / (EA)}, \quad (14)$$

则由式(12)可解得:

$$P_0 = \{ [P_{cr} / (EA) - f(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)] \text{ch}(-k_{s2} z_{cr}) - k_{s2} [(\tau_m + fz_{cr})(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1) + S_{cr}] \text{sh}(-k_{s2} z_{cr}) + f(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1) \} EA, \quad (15a)$$

$$S_0 = [-P_{cr} / (EA) + f(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)] \text{sh}(-k_{s2} z_{cr}) / k_{s2} + [(\tau_m + fz_{cr})(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1) + S_{cr}] \text{ch}(-k_{s2} z_{cr}) - \tau_m (1/\lambda_2 - 1/\lambda_1). \quad (15b)$$

在应用上述解答时, 可以在桩长范围内任取一临界深度值 z_{cr} , 由式(13)或(15)直接计算得到相应的桩顶荷载沉降值。这种显式算法可以避免像文献[7]那样需要求解复杂的超次方程组的问题。

2.4 桩侧土部分屈服, 桩端土处于屈服状态(IV)

在该状态, $S_b \geq u_{bu}$ 。当 $z_{cr} < z < l$ 时, 桩侧土处于弹性状态, 而桩端土处于屈服状态。因此, P_{cr} 与 S_{cr} 的关系仅需将式(9)中的 l 换成 $l - z_{cr}$ 即可:

$$S_{cr} = \{ \text{ch}[k_{s1}(l - z_{cr})] + \lambda_2 \text{sh}[k_{s1}(l - z_{cr})] / (k_{s1} E) \} P_{cr} / A - (\alpha_{bu} \xi_b - \lambda_2 u_{bu}) \{ k_{s1} E \text{sh}[k_{s1}(l - z_{cr})] + \lambda_2 \text{ch}[k_{s1}(l - z_{cr})] \}^{-1}. \quad (16)$$

在求解本阶段荷载沉降关系时, 只需将上节中的式(11)用本节中的式(16)代替, 其它求解过程与上节是完全一致的。

2.5 桩侧土全部屈服, 桩端土处于弹性状态(V)

在该状态, $u(z) \geq u_{su}, S_b < u_{bu}$ 。桩体的静力平衡方程为式(12a), 边界条件为式(3)。

当 $\lambda_2 = 0$ 时, 即桩侧土为软化或理想弹塑性模型, 则桩顶位移和桩顶荷载的关系仅需将式(13)中的 z_{cr}, P_{cr} 和 S_{cr} 分别用 l, P_b 和 S_b 代换可得:

$$S_0 = \frac{P_0 - C(\tau_m + fl/2)l\xi_s}{\lambda_{b1}A} + \frac{P_0l - C(\tau_m/2 + fl/6)l^2\xi_s}{EA} \quad (17)$$

当 $\lambda_2 > 0$, $\xi_s = 1$ 时, 即桩侧土为硬化模型, 则将式(15)中的 z_{cr} , P_{cr} 和 S_{cr} 分别用 l , P_b 和 S_b 代换可得:

$$S_0 = (1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)[-\tau_m + f \operatorname{sh}(-k_{s2}l)/k_{s2} + (\tau_m + fl) \operatorname{ch}(-k_{s2}l)] + \frac{k_{s2}E \operatorname{ch}(-k_{s2}l) - \lambda_{b1} \operatorname{sh}(-k_{s2}l)}{\lambda_{b1}k_{s2} \operatorname{ch}(-k_{s2}l) - k_{s2}^2 E \operatorname{sh}(-k_{s2}l)} [P_0/(EA) + (1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)[f \operatorname{ch}(-k_{s2}l) - f + k_{s2}(\tau_m + fl) \operatorname{sh}(-k_{s2}l)]] \quad (18)$$

2.6 桩侧土全部屈服, 桩端土屈服状态(VI)

在该状态, $u(z) \geq u_{su}$, $S_b \geq u_{bu}$ 。桩体静力平衡方程为式(12a), 边界条件为式(3)和式(8)。故当 $\lambda_2 = 0$ 时, 即桩侧土为软化或理想弹塑性模型, 求解可得:

$$S_0 = [P_0 - A\alpha_{bu}\xi_s - C\xi_s l(\tau_m + fl/2)]/(\lambda_2 A) + u_{bu} + [P_0l - C\xi_s l^2(\tau_m/2 + fl/6)]/(EA) \quad (19)$$

由此: 当 $\lambda_2 = 0$ 时, 即桩端土为软化模型, 桩顶沉降 S_0 将持续增加, 此时桩已达到极限承载状态。

当 $\lambda_2 > 0$, $\xi_s = 1$ 时, 即桩侧土为硬化模型, 重新解式(12a)和式(3)及式(8), 可得:

$$S_0 = [k_{s2}E \operatorname{sh}(k_{s2}l) + \lambda_2 \operatorname{ch}(k_{s2}l)]^{-1} \{ (1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)[fE + \lambda_2(\tau_m + fl)] + (\lambda_2 u_{bu} - \alpha_{bu}\xi_s) + [P_0/A - fE(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)] \operatorname{ch}(k_{s2}l) + \lambda_2 \operatorname{sh}(k_{s2}l)/(k_{s2}E) \} - (1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)\tau_m \quad (20)$$

3 桩周土状态判断及单桩工况组合

以上推导了桩周土在不同状态下的荷载沉降关系。对于一根单桩及其特定的桩周土模型, 需要判断在荷载作用下, 桩周土处于何种状态, 并利用相应解答, 才能计算得到一条完整的荷载沉降关系曲线。

判断状态(I)和(II)的临界荷载 $P_{I, II}$ 仅需令 $S_b = u_{bu}$, $P_b = A\alpha_{bu}$, 以此求解式(3)和(4)可得

$$P_{I, II} = u_{bu}k_{s1}EA \operatorname{sh}(k_{s1}l) + \alpha_{bu}A \operatorname{ch}(k_{s1}l) \quad (21)$$

判断状态(I)和(III)的临界荷载仅需令状态(III)中的 $z_{cr} = 0$, 求出相应的桩顶荷载即为 $P_{I, III}$ 。

当 $P_{I, II} \leq P_{I, III}$ 时, 桩在竖向荷载作用下, 随着桩顶荷载的增大, 依次经历以下四个阶段: 状态(I), 状态(II), 状态(IV), 状态(VI)。

判断状态(II)和(IV)的临界荷载仅需令状态(IV)中的 $z_{cr} = 0$, 求得相应的桩顶荷载即为 $P_{II, IV}$ 。判断状态(IV)和(VI)的临界荷载仅需令状态(IV)中的 $z_{cr} = l$, 求得相应的桩顶荷载即为 $P_{IV, VI}$ 。

当 $P_{I, II} > P_{I, III}$ 时, 桩在竖向荷载作用下, 随着

桩顶荷载的增大, 依次经历以下四个阶段: 状态(I), 状态(III), 状态(IV)或状态(V), 状态(VI)。其中, 判断第三阶段桩周土的状态时, 可以令状态(III)中的 $z_{cr} = l$, 计算出该位置处的轴力 $P_{III}(z_{cr} = l)$, 当 $P_{III}(z_{cr} = l) \leq A\alpha_{bu}$ 时, 则第三阶段为状态(V), 否则为状态(IV)。

判断状态(III)和(IV)的临界荷载可以通过联立式(21)(将 l 换成 $l - z_{cr}$)和式(11)并使它们相等, 求解 z_{cr} , 且将其代入状态(III)中的解答计算相应的桩顶荷载即为 $P_{III, IV}$ 。判断状态(III)和(V)的临界荷载仅需令状态(III)中的 $z_{cr} = l$, 求得相应的桩顶荷载, 即为 $P_{III, V}$ 。判断状态(V)和(VI)的临界荷载仅需将式(13a)或(15a)中的 z_{cr} 和 P_{cr} 分别用 l 和 $A\alpha_{bu}$ 代换, 求得相应的桩顶荷载即为 $P_{V, VI}$ 。

综上所述, 根据桩周土的不同状态组合(弹性和屈服软化或硬化), 单桩有三种工况, 每种工况可以分为四个阶段, 如表1所示。这三种工况组合分别代表了桩的不同荷载传递机理, 即承载特性。根据表1和本文中所提出的解答和算法, 可以方便地求解出单桩在各种工况下所对应的荷载沉降关系。

表1 单桩的工况组合及其判别方法

Table 1 Working conditions of single pile and corresponding identification method

工况	阶段一	阶段二	阶段三	阶段四	判别方法
一 桩侧	弹性	弹性	部分屈服	全部屈服	$P_{I, II} \leq P_{I, III}$
一 桩端	弹性	屈服	屈服	屈服	
	状态(I)	状态(II)	状态(IV)	状态(VI)	
二 桩侧	弹性	部分屈服	部分屈服	全部屈服	$P_{I, II} > P_{I, III}$
二 桩端	弹性	弹性	屈服	屈服	
	状态(I)	状态(III)	状态(IV)	状态(VI)	$P_{III}(z_{cr} = l) > A\alpha_{bu}$
三 桩侧	弹性	部分屈服	全部屈服	全部屈服	$P_{I, II} > P_{I, III}$
三 桩端	弹性	弹性	弹性	屈服	
	状态(I)	状态(III)	状态(V)	状态(VI)	$P_{III}(z_{cr} = l) \leq A\alpha_{bu}$

4 算例

本文采用文献[7]中的一根均质地基中单桩作为算例对所提出的解答进行验证。桩身及桩周土的计算参数^[7]为: 桩长 $l = 20$ m, 桩径 $d = 0.6$ m, 桩身弹性模量 $E = 2.5 \times 10^4$ MPa, 桩侧土的强度参数为 $\tau_m = 21.2$ kPa, $f = 2.65$ kPa/m, 桩侧土的模型参数为 $\lambda_1 = 1.27 \times 10^4$ kPa/m, $\lambda_2 = 0$ kPa/m, $\xi_s = 1$, 桩端土的模型参数为 $\lambda_{b1} = 5.66 \times 10^5$ kPa/m, $\lambda_{b2} = 2.12 \times 10^5$ kPa/m, $\xi_b = 1$, $u_{bu} = 5$ mm。从计算参数可知, 桩侧土采用的是理想弹塑性模型, 而桩端土为硬化模型。经比较发现, 采用本文所提出的解答得到的计算结果与文献[7]中所提供的结果是一致的。计算得到的桩顶荷载沉降

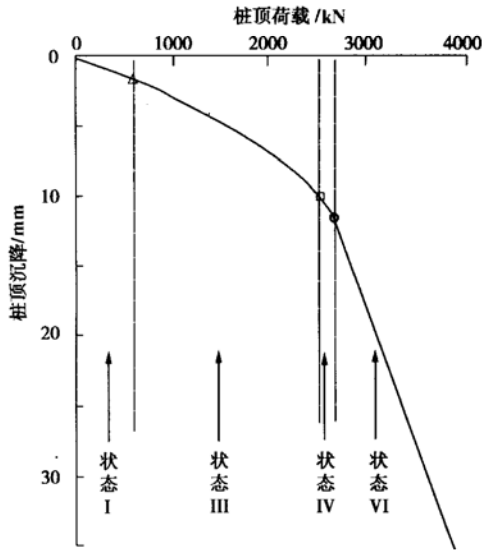


图2 单桩的荷载沉降关系曲线

Fig. 2 Load- settlement curve of a single pile

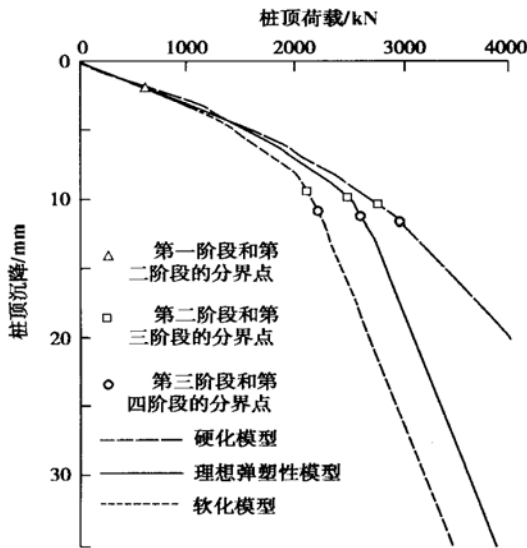


图3 桩侧土模型对单桩荷载沉降关系的影响

Fig. 3 Effect of near-shaft soil model on the load- settlement relationship of a single pile

关系曲线如图2所示。图中清楚地表明, 桩的荷载沉降曲线由状态(I), (III), (IV)和(VI)这四个阶段组

成, 与表1中的工况二相对应。

另外, 还分别计算了假定桩侧土为硬化($\lambda_2 = 0.21 \times 10^4$ kPa/m, $\xi_s = 1$)和软化($\lambda_2 = 0$ kPa/m, $\xi_s = 0.75$)模型条件下的荷载沉降关系。三种不同桩侧土模型下的桩顶荷载沉降曲线如图3所示。图中清楚地反映了不同的桩侧土模型对单桩的承载性能的影响。

5 结 论

本文基于双线性的荷载传递函数, 模拟桩侧土和桩端土的软化和硬化模型, 得到了桩周土处于不同状态(弹性或塑性屈服)下的单桩荷载沉降关系解答和算法, 提出了桩周土承载状态的判断方法, 以及由不同状态所组成的单桩工况的组合方式, 用于分析单桩的荷载传递机理, 即承载特性。解答的实际应用表明, 计算结果能够清楚地反映组成单桩荷载沉降曲线的各阶段所对应的桩侧土和桩端土的状态, 从而完整地描述单桩的荷载传递过程。

参考文献:

- [1] 徐攸在, 刘兴满. 桩的动测新技术[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989.
- [2] Guo W D. Pile capacity in nonhomogeneous softening soil[J]. Soils and Foundations, 2001, 41(2): 111- 120.
- [3] 杨从军, 单华刚. 摩擦桩沉降变形规律及承载力确定的探讨[J]. 岩土力学, 2000, 21(2): 167- 169, 172.
- [4] 陈龙珠, 梁国钱, 朱金颖, 等. 桩轴向荷载- 沉降曲线的一种解析算法[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(6): 30- 38.
- [5] 罗惟德. 单桩承载机理分析与荷载- 沉降曲线的理论推导[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(1): 35- 44.
- [6] Motta Ernesto. Approximate elastic- plastic solution for axially loaded piles[J]. J Geotech Engng, ASCE, 1994, 120(9): 1616- 1623.
- [7] 陈明中, 龚晓南, 严平. 单桩沉降的一种解析解法[J]. 水利学报, 2000, (8): 70- 75.
- [8] Kraft L M, Ray R P, Kagawa T. Theoretical t- z curves[J]. J Geotech Engng Div, ASCE, 1981, 107(GT11): 1543- 1561.
- [9] 洪鑫. 壁板桩承载特性的理论分析与模型试验研究[D]. 南京: 河海大学, 2003.