

大规模优化及其在上限定理有限元中的应用

Large-scale optimization and its application to upper bound theorem using kinematical element method

杨小礼, 李亮, 刘宝琛
(中南大学土木建筑学院, 湖南长沙 410075)

摘要: 通过引进变量将原问题变为标准的内点法问题, 将原问题的可行域仿射为单位球体区域, 在仿射后的区域内向目标函数减少最快的方向移动, 寻求问题的最优解, 最后进行逆变换, 将得到的解换回到原可行域。

关键词: 上限定理; 流动法则; 速度间断线; 仿射变换; 大规模优化

中图分类号: TU 457 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2001)05-0602-04

作者简介: 杨小礼, 男, 1971 年生, 讲师, 博士研究生, 主要从事岩土极限分析与隧道的教学、科研工作。

YANG Xiao-li, LI Liang, LIU Bao-chen

(Civil Architectural Engineering College, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: This paper transforms the original problem into standard form adopted for interior-point approach using slack variables. Then feasible range of original problem is converted to unit spheroid range, and converted optimal solution is obtained by moving converted objective function along first-order decent direction in converted range. Finally, inverse conversion is employed to obtain optimal result.

Key words: upper bound theorem; flow rule; velocity discontinuity; conversion; large-scale optimization

1 引言

岩土承载力问题的研究方法一般分为弹塑性法、平衡法和极限分析法三类。与弹塑性法、平衡法相比, 极限分析法将岩土结构看成理想刚塑性体, 在破坏前不发生任何弹性变形; 刚性体在塑性流动状态时, 屈服应力与塑性应变之间没有直接关系, 屈服应力与相应的塑性应变率之间的关系可由相关联流动规则确定; 岩土屈服函数 F 与塑性势函数相同。

在上述假设基础上, 50 年代 Drucker 和 Prager 把静力场和速度场结合起来并提出极值理论, 建立岩土结构物的极限分析理论, 文献[1]则为岩土结构物的极限分析理论奠定了基础。理论上讲, 平衡条件、屈服条件、流动法则与相应的边界条件, 足以确定应力场、速度场和破坏荷载, 但由于实际问题的复杂性, 要求全面满足这些条件的解答几乎不可能。在极限分析理论基础上, 应用有限元法^[2,3], 为求解岩土极限荷载提供了新的途径。这种有限元(或称速度有限元)与一般以节点位移为未知量的常规有限元的主要区别如下:

(1) 速度有限元以节点速度作为未知量, 当同一节点属于不同的单元时有不同的速度。如图 1 所示, 节点 ①、②的速度不相等, 节点 ③、④的情况也是如此。

(2) 单元与单元之间可能存在速度不连续现象, 即存在速度间断线。对于 Mohr-Coulomb 材料, 速度间断线上的切向和法向速度都不连续, 对于 Tresca 材料, 只有切向速度不连续。

(3) 对于 Tresca 材料, 单元满足不可压缩条件, 即

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \quad (1)$$

因此在单元划分时, 要合理布置各单元形状。Jiang (1995) 与 Sloan (1989) 等学者对二维问题采用如图 2 所示的单元布置, 4 个单元组成矩形, 公共单元节点位于矩形对角线的交点上。

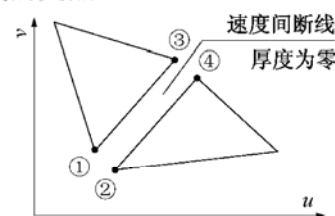


图 1 节点速度不连续
Fig. 1 Velocity discontinuity of nodes

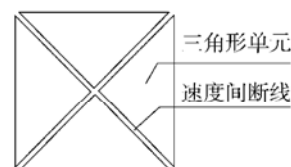


图 2 三角形单元布置
Fig. 2 Distribution of three-noded triangle element

(4) 刚性单元在破坏前无任何变形产生。在上限定理基础上, 采用有限元法求解承载力问题基本思路是: 将岩土离散为三角形单元, 同时构造线性速度场; 三角形单元中以及速度间断线上需要满足流动法则, 速度边界上满足边界条件, 以此建立约束方程; 最后引入线性规划中的内点法寻求问题的上解。

2 上限定理

虚功率原理表明: 对于任意一组静力容许的应力场和任意一组机动容许的速度场, 外力的虚功率等于物体内能消散功率。即

$$\int_A T_i u_i^* dA + \int_V F_i u_i^* dV = \int_V \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^* dV + \int_L (\tau - \alpha_n \tan \theta) \Delta V_i dL \quad (2)$$

式中 T_i, F_i 分别为作用于物体上的面力和体力; ΔV_i 为速度间断线两侧切向速度变化量; $u_i^*, \dot{\epsilon}_{ij}^*$ 分别为速度场中的速度和应变率; τ, α_n 分别为速度间断线 L 上的剪应力和正应力; σ_{ij}^0 为静力场中的应力。

根据上述原理可推导出上限定理: 在所有机动容许的塑性变形速度场相对应的荷载中, 极限荷载最小。即

$$\int_A T_i u_i^* dA + \int_V F_i u_i^* dV \leq \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV + \int_L c \Delta V_i dL \quad (3)$$

式中 σ_{ij}^* 为由 $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ 按塑性变形法则求出的应力; c, θ 为土体抗剪强度指标。

应用上限定理求解土工问题时, 速度场必须满足相关联准则 边界条件。

3 速度有限元法基本理论

速度有限元法的基本理论详见文献[3~ 8]。对计算区域的土体按三角形单元离散, 并假设三角形中速度场线性分布, 即

$$[u \ v]^T = [\varphi][u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_k \ v_k]^T \quad (4)$$

式中 $[\varphi] = [N_i \mathbf{E} \ N_j \mathbf{E} \ N_k \mathbf{E}]$, \mathbf{E} 为 2×2 阶单位矩阵, N_i 为三角形单元形函数; i, j, k 为三角形单元节点, 逆时针排列; u_i, \dots, v_k 分别为节点 i, j, k 的速度分量。

3.1 三角形单元内满足相关联流动法则

平面应变问题中, 以拉应力为正, 岩土材料常用的屈服准则是 Mohr- Coulomb 屈服准则。由于三角形单元中采用线性速度场模式, 屈服准则需要线性化, 为此用一个外切正多边形逼近上述圆域^[3,4]。设正多边形的边数为 p , 则第 k 边屈服条件的线性表达式为

$$F_k = A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} - 2c \cos \theta = 0 \quad (5)$$

式中 $A_k = \cos \alpha_k + \sin \theta$; $B_k = -\cos \alpha_k + \sin \theta$; $C_k = 2 \sin \alpha_k$; $\alpha_k = 2k\pi/p$; $k = 1, 2, \dots, p$ 。

上限定理求解岩土问题时, 其相关联流动法则为

$$\dot{\epsilon}_{ij} = d\epsilon_{ij}^\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad d\lambda \geq 0 \quad (6)$$

式中 φ 为塑性势函数; $d\epsilon_{ij}^\varphi$ 为塑性应变增量; $d\lambda$ 为比例系数。将屈服函数 F 代入式(6)得

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda_k \quad d\lambda_k \geq 0 \quad (7)$$

其中 $d\lambda_k$ 为与屈服函数第 k 边相关联的比例系数。式(7)是一个单元的约束方程, 对计算区域所有的单元按式(7)合并, 整理后写成矩阵形式如下:

$$\mathbf{A}_{11} \mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_{12} \mathbf{X}_2 = \mathbf{0} \quad \mathbf{X}_2 \geq \mathbf{0} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}$ 为系数矩阵; \mathbf{X}_1 为以节点速度表示的列向量; \mathbf{X}_2 为以相关联比例系数表示的列向量, 具体表达式参阅文献[4~ 6]。下文 $\mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{23}, \mathbf{A}_{31}, \mathbf{X}_3$ 等符号的具体表达式也参阅文献[4~ 6]。

3.2 速度间断线上满足相关联流动法则

速度间断线与水平线的夹角为 Φ , 节点 i 和 j 是速度间断线 L 上的两点, 其速度间断分量为

$$\Delta u_{ij} = (u_j - u_i) \cos \Phi + (v_j - v_i) \sin \Phi \quad (9)$$

$$\Delta v_{ij} = (u_j - u_i) \sin \Phi + (v_j - v_i) \cos \Phi \quad (10)$$

在速度间断线上, Mohr- Coulomb 材料在塑性变形过程中体积应变不等于零, 速度间断线两侧的法线速度分量和切线速度分量均不连续, 它们应满足下式:

$$\Delta v_{ij} = |\Delta u_{ij}| \tan \theta \quad (11)$$

式(11)表明, 速度间断线上的相对速度 Δv_{ij} 与间断线切线方向成 θ 角, 切向速度 Δu_{ij} 在单元中线性分布, 在速度线上的某一点可能会改变方向, 为此用 $s(u^+ - u^-)$ 代替 $|\Delta u|$, $s = \pm 1$ 。将式(11)应用于节点 i, j 得

$$\begin{aligned} \Delta v_{ij} &= (u_i - u_j) \sin \Phi + (v_j - v_i) \cos \Phi \\ &= s(u_{ij}^+ - u_{ij}^-) \tan \theta \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)构成速度间断线上的约束方程, 拓展到计算区域全部的速度间断线上, 即所有的速度间断线按式(12)合并得

$$\mathbf{A}_{21} \mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_{23} \mathbf{X}_3 = \mathbf{0} \quad \mathbf{X}_3 \geq \mathbf{0} \quad (13)$$

3.3 速度边界上满足边界条件

设节点 i 是速度边界上一点, 其速度 u_i 已知, n_j 为速度边界面外法线方向余弦。对机动容许的速度场须满足 $u_{ij} \cdot n_j = \bar{u}_i$, 计算区域所有边界条件按此条件合并, 得

$$\mathbf{A}_{31} \mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_3 = \mathbf{0} \quad (14)$$

式(8), (13), (14)构成上限定理有限元求解的基本方程。

3.4 上限目标函数

土工计算中, 所要求的极限荷载通常是沿一部分边界上的外力。根据虚功率原理, 外力的虚功率应等于内能消散率, 而内能消散率包括速度间断线上的能量消散率和三角形单元的能量消散率。三角形单元的能量消散率 W_e 和速度间断线上的能量消散率 W_L 分别为

$$\begin{aligned} W_e &= \int_A (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) dA \\ &= 2A \cos \theta \sum_{k=1}^p d\lambda_k \int_A c dA \end{aligned} \quad (15)$$

$$W_L = \int_L c | \Delta u | dL \quad (16)$$

式(15)为某一个三角单元的内能消散率, 式(16)为某一条速度间断线上的内能消散率。拓展到整个计算区域, 即将所有的单元和全部速度间断线上的内能消散率按式(15), (16)合并, 得 $C_2^T X_2 + C_3^T X_3$, 其中 C_2^T, C_3^T 为目标系数矩阵。由上限定理可得到求解土工问题极限荷载的数学模型:

$$\begin{array}{l} \text{求最小值} \quad C_2^T X_2 + C_3^T X_3 \\ \text{约束条件} \quad A_{11} X_1 - A_{12} X_2 = 0 \\ \quad \quad \quad A_{21} X_1 - A_{23} X_3 = 0 \\ \quad \quad \quad A_{31} X_1 - A_3 = 0 \\ \quad \quad \quad X_2 \geq 0, X_3 \geq 0 \end{array} \quad (17)$$

4 结构优化的内点法

式(17)为极限荷载的目标函数与约束方程, 它是优化理论中的线性规划问题。对少量的有限单元和速度间断线, 采用最陡边有效集法^[4-6]或拉格朗日增项法^[7,8]是求解规划问题行之有效的方法。随着计算范围的扩大, 优化变量从几百个增加到数万个, 从几何观点看, 线性规划问题的可行域是凸多面体, 基本可行解对应着它的顶点, 而可行域顶点的个数一般随问题维数的变大成指数函数增加。因此选择合适的优化方法尤为重要。Kamarker 发表了需要 $O(nL)$ 次迭代次数 $O(n^3 L)$ 次算术运算次数的内点算法, 对含几千个以上变量的问题, 它的收敛性完全不同于其他的优化方法^[11-13]。实际计算中发现内点法的迭代次数与问题的规模无关, 几乎保持在 20~40 次。因此, 采用内点法中仿射变换原理, 寻求该规划问题的上限数值解。

4.1 仿射变换原理

令 $X_1 = X_1^+ - X_1^- (X_1^+ \geq 0, X_1^- \geq 0)$, 将式(17)转化为标准的线性规划问题

$$\begin{array}{l} \text{Minimise} \quad C^T X \\ \text{Subject to} \quad AX = B \quad X \geq 0 \end{array} \quad (18)$$

假定已知一个内点 X^k , 此时, 寻找目标函数最自然的优化方法是从 X^k 开始向可行域内函数 $C^T X$ 减少率最大的方向移动, 即向向量 $-C$ 在子空间 $\{X | AX = 0\}$ 的投影方向移动。由于 X^k 在可行域空间的位置未知, 因此采用如下仿射变换:

$$\bar{X} = (D_k)^{-1} X \quad (19)$$

式中 D_k 是以 X^k 的元素为对角元素的对角矩阵, $D_k = \text{diag}(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ 。对于式(18), 通过上述变换得

$$\begin{array}{l} \text{Minimise} \quad \bar{C}^T \bar{X} \\ \text{Subject to} \quad \bar{A}^T \bar{X} = B \quad \bar{X} \geq 0 \end{array} \quad (20)$$

其中 $\bar{C}^k = D_k C; \bar{A}^k = A D_k$ 。

4.2 仿射变换法的实施

经过上述变换后, 设目标函数在单位球体空间内下降最快的方向为 \bar{d}^k , 因为 \bar{d}^k 只能是 $-C^k$ 在子空间 $\{X | \bar{A}^k X = 0\}$ 的投影方向, 所以可写成

$$\bar{d}^k = P_{A^k} C^k \quad (21)$$

其中 P_{A^k} 为投影矩阵, $P_{A^k} = I - (\bar{A}^k)^T (\bar{A}^k (\bar{A}^k)^T)^{-1} \bar{A}^k$ 。将向量 \bar{d}^k 进行逆变换得

$$d^k = D_k \bar{d}^k \quad (22)$$

将 $\bar{C}^k = D_k C, \bar{A}^k = A D_k$ 和式(21)代入式(22), 整理得

$$d^k = - (D_k)^2 r^k \quad (23)$$

其中 $r^k = C - A^T W^k, W^k = [A (D_k)^2 A^T]^{-1} A (D_k)^2 C$ 。

向量 d^k 是目标函数 $C^T X$ 的下降方向, 由于目标函数是线性函数, 则 $X^k + t d^k (t \geq 0)$ 也是目标函数下降的方向。但是考虑到问题的可行性, 步长不能太大, 否则就会超过可行域的边界, 最大步长由式(24)确定。

$$t_{\max} = \frac{1}{\max\{x_j^k / r_j^k | r_j^k > 0\}} \quad (24)$$

式中 x_j^k 是内点 X^k 的第 j 个元素; r_j^k 是向量 r^k 的第 j 个元素。下一个迭代点的计算表达式为

$$X^{k+1} = X^k + t^k d^k \quad (25)$$

其中 $t^k = \alpha_{\max}, 0 < \alpha < 1$ 。

仿射变换法的步骤总结为: ①选择一个初始内点 X^0 , 此时 $k=0$; ②由式(23)计算 d^k ; ③由式(24)计算最大步长 t_{\max} , 然后确定实际步长 t^k ; ④由式(25)确定下一个迭代点 X^{k+1} ; ⑤若确认目标函数值 $C^T X$ 已不可能有明显改进, 则停止计算, 否则 $k = k + 1$, 返回步骤 ②。

5 程序的检验与应用

在不考虑土体重量的情况下, 对于抗剪强度指标为 c, θ 的均质各向同性地基, 通过极限分析可知, 光滑刚性条形基础下承载力的精确解为

$$q_f = N \cdot c = \cot \theta [e^{\pi \tan \theta} \tan^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) - 1] c \quad (26)$$

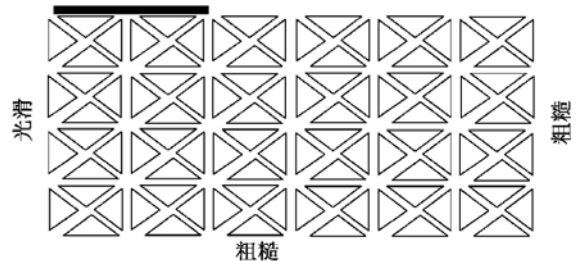


图3 条形基础下单元网格划分
Fig.3 Element mesh for strip footing

图3所示的单元网格用于计算光滑刚性条形基础下承载力的上限解, 该网格与文献[4]的网格划分相同(包含96个单元, 134个速度间断线, 288个节点)。由

式(5)可知, p 的大小直接关系到计算工作量和计算精度, p 取得越大, 线性化屈服条件就越接近于原来的屈服方程, 但约束方程个数随之增加。当 $c = 20 \text{ kPa}$, $\theta = 20^\circ$ 时, 计算结果与 p 大小的关系见图 4。

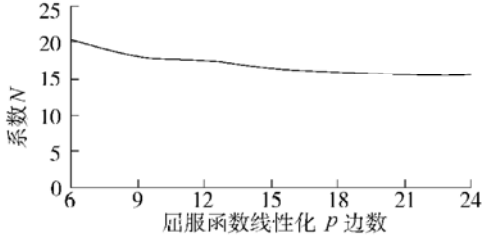


图 4 承载力系数 N 与屈服函数线性化 p 关系

Fig. 4 The relationship between N and p

由图 4 可知, p 较小时, p 的大小对计算结果影响较大, 如 $p = 6$ 时, 计算结果与精确解误差为 37.5%; 当 p 较大时, p 的大小对计算结果影响较小, 如 $p = 18$ 时误差值为 8.1%, $p = 24$ 时误差值为 4.5%。因此选择合适的 p , 能求出条形基础承载力的较精确解。

根据图 3 的网格划分, 表 1 为本文仿射变换法与 Sloan 的最陡边有效集法^[4]的比较情况。从表 1 可以看出: 仿射变换法的点列收敛性改善了最陡边有效集法, 具有特别优越的计算效率, 而且程序的实施过程简单, 是目前最实用的算法之一。

表 1 迭代次数与屈服函数线性化 p 的关系

Table 1 The relationship between number of iterations and linear approximation to yield criterion with p sides

p	文献[4]迭代次数	仿射变换法迭代次数
6	488	18
12	493	23
18	—	27
24	564	35

若将上限定理有限元应用在边坡稳定性方面, 需要考虑土体的重量, 此时对每个单元还须满足下列条件:

$$\int_A v_{ij} dA = - \gamma \quad (27)$$

式中 γ 为土体的单位容重; A 为单位单元面积。

值得一提的是, 上限定理有限元是建立在相关联流动法则的基础上, 实际上砂土在受剪时发生膨胀现象, 而不服从相关联流动法则。基于这一事实, 近年来部分学者用 c^* , θ^* 代替砂土的抗剪强度指标 c , θ ^[9, 10], 即

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta^* &= \tan \theta \cdot \frac{\cos \phi \cos \theta}{1 - \sin \phi \sin \theta} \\ c^* &= c \cdot \frac{\cos \phi \cos \theta}{1 - \sin \phi \sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中 ϕ 为砂土的剪切膨胀角。从而极限分析有限元法也能在砂土中应用。

6 结 论

(1) 上限定理是求解岩土极限分析课题的一种有效工具。由于岩土边界形状不规则, 边界受力复杂, 岩土层状分布等, 其应用范围受到限制, 有限元法与上限定理相结合, 使在复杂条件下求解岩土极限分析问题成为可能, 为上限定理的广泛应用开辟了新的途径。

(2) 首次将线性规划的内点法应用于极限分析问题, 为上限定理有限元在大规模优化中应用提供依据; 在优化时, 仿射变换法的迭代次数小于最陡边有效集法, 提高优化效率。

参考文献:

- [1] Chen W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishing Company, 1975.
- [2] Lysmer J. Limit analysis of plane problems in soil mechanics [J]. J of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1970, **96**: 1311~ 1334.
- [3] Bottero A, Negre R. Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems[J]. Comp Methods in Appl Mech of Engrg, 1980, **22**: 131~ 149.
- [4] Sloan S W, Kleeman P W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields[J]. Comp Methods in Appl Mech of Engrg, 1995, **127**: 293~ 314.
- [5] Sloan S W. A steepest edge active set algorithm for solving sparse linear programming problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1988, **26**: 2671~ 2685.
- [6] Sloan S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1989, **13**: 263~ 282.
- [7] Jiang Gongliang. Non-linear finite element formulation of kinematic limit analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, **38**: 2775~ 2807.
- [8] Jiang Gongliang. Regularized method in limit analysis[J]. J Engrg Mechanics, ASCE, 1994, **120**: 1179~ 1197.
- [9] Drescher A, Detournzy E. Limit load in translational failure mechanics for associative and non-associative materials [J]. Geotechnique, 1993, **43**(3): 443~ 456.
- [10] Michalowski R L, Shi L. Bearing capacity of footing over two-layer foundation soils[J]. J Geotech Engrg, ASCE, 1995, **121**(5): 421~ 428.
- [11] Karmarker N. A new polynomial-time algorithm for linear programming[J]. Combinatorica, 1984, **4**: 375~ 395.
- [12] Barnes E R. A variation of karmarker's algorithm for solving linear programming problems[J]. Mathematical Programming, 1986, **36**: 174~ 182.
- [13] Vanderbei R J, Meketon M S, Freedman B A. A modification of karmarker's linear programming algorithm [J]. Algorithmica, 1986, **1**: 395~ 407.