

纵向振动桩侧壁切应力频率域解及其应用

Frequency-domain solution of shear stress along pile-soil interface for longitudinal vibration of piles and its application

刘东甲

(合肥工业大学 资源与环境科学系, 安徽 合肥 230009)

摘要: 利用 Fourier 变换, 得到纵向振动桩在简化条件下侧壁切应力的频率域表达式, 应用该表达式获得桩周土的等效刚度系数 k 和等效阻尼系数 c 的计算式, 它们是桩周土剪切波速和密度、桩半径和振动频率的函数, 把它们用于桩瞬态纵向振动计算, 并与工程桩反射波法动测曲线进行对比, 两者有较好的一致性。

关键词: 桩; 瞬态纵向振动; 切应力; 频率域; Fourier 变换

中图分类号: TU 473

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2001)05-0544-03

作者简介: 刘东甲, 男, 1957 年生, 1982 年在合肥工业大学获学士学位, 1984 年在中南矿冶学院(现中南大学)获硕士学位, 从事岩土工程与工程物探方面的教学、科研和测试工作。

LIU Dong-jia

(Dept. of Natural Resources and Environmental Science, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: A frequency-domain expression of shear stress along pile-soil interface is derived by using Fourier transform for transient longitudinal vibration of piles. Stiffness k and damping coefficient c of the soil around the piles are obtained by applying the expression, which are functions of shear wave velocity and density of the soil, radius and vibration frequency of the pile. Good agreement between simulated and measured curves of engineering piles indicates that the expressions of k and c are very efficient for calculating transient longitudinal vibration of piles.

Key words: pile; transient longitudinal vibration; shear stress; frequency-domain; Fourier transform

1 引言^y

桩的瞬态纵向振动问题, 严格说来是个有限长弹性圆柱体在半无限介质中纵向振动的三维问题。由于目前还没有解析解, 故不得不研究其在简化条件下的解答。通常把桩当作一维弹性杆, 桩周土对桩的作用用弹簧和粘壶模拟^[1]。基于这种简化, 笔者推出了不均匀(层状)土中多缺陷桩纵向振动解^[2]。Baranov 提出另一简化的解析方法, 假设基础侧面土由一系列厚度无限小的独立弹性薄层组成^[3]。Novak 应用 Baranov 解研究了浅基础和桩在简谐激振力作用下的稳态纵向振动问题^[3,4]。Novak, Nogami 和 About-Ella 还得到均匀粘弹性土对作简谐振动的无限长刚性圆杆作用的刚度公式^[5]。Kuhlemeyer, Militano 和 Rajapakse 用文献[5]中类似假设分别研究了完整桩稳态振动问题和瞬态轴向荷载作用下的动力响应问题^[6,7]。

2 桩土假设条件和桩周土轴向运动方程

为了解析地求得纵向振动桩侧壁切应力, 参考文献[5~7], 假设桩为半径 r_0 的无限长刚性圆柱体, 桩周土为弹性介质, 桩土界面两侧位移连续。在这些假设条件下, 纵向振动桩的桩周土作轴对称运动, 对称轴为桩轴线, 且土中位移分量和应力分量沿轴向不变。

在图 1 坐标系下, 桩周土的轴向运动方程为

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial r} + \frac{\tau_z}{r} = \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中 u_z 为桩周土质点的轴向位移, $u_z = u_z(r, t)$; ρ_s 为桩周土密度。桩周土的物理方程为

$$\tau_z = G_s \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (2)$$

式中 G_s 为桩周土剪切模量。

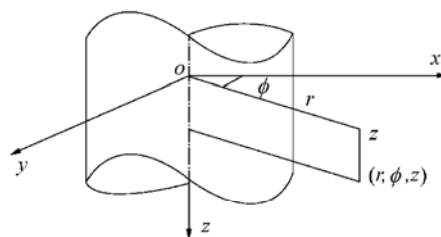


图 1 土中的桩

Fig. 1 Pile in soil

把式(2)代入式(1), 桩周土的轴向运动方程化为

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(G_s \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + G_s \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} = \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (3)$$

这一方程可用来研究径向不均匀土 ($G_s = G_s(r)$) 对桩的作用问题。当桩周土沿径向均匀时, G_s 为常数, 纵向振动桩之桩周土轴向运动方程简化为

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{v_s^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (4)$$

式中 v_s 为桩周土的剪切波速, $v_s = \sqrt{G_s/\rho_s}$ 。

3 纵向振动桩侧壁切应力

解方程(4)再代入式(2),就能求出纵向振动桩侧壁切应力。用不同方法解方程(4),可得形式不同但实质相同的表达式。为便于求解桩瞬态或稳态纵向振动问题,采用 Fourier 变换法,对方程(4)进行 Fourier 变换,得

$$\frac{d^2 U_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_z}{dr} + \frac{\omega^2}{v_s^2} U_z = 0 \quad (5)$$

式中 $U_z(r, \omega)$ 是 $u_z(r, t)$ 的 Fourier 变换; ω 为圆频率。式(5)是零阶贝塞尔方程,可用汉克尔函数(或称第三类贝塞尔函数)表示^[8]

$$U_z(r, \omega) = DH_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{v_s}r\right) + BH_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{v_s}r\right) \quad (6)$$

式中 D 和 B 为系数,而汉克尔函数与贝塞尔函数有如下关系:

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iY_0(x) \\ H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iY_0(x) \end{cases} \quad (7)$$

式(6)的 Fourier 逆变换式中, $H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{v_s}r\right)e^{i\omega t}$ 和 $H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{v_s}r\right)e^{i\omega t}$ 分别对应收敛波和发散波^[9]。由于波源为振动的桩,所以应取发散波,即

$$U_z(r, \omega) = BH_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{v_s}r\right) \quad (8)$$

对式(2)作 Fourier 变换,再将式(8)代入,得桩周土中切应力 $T_{rz}(r, t)$ 的 Fourier 变换为

$$T_{rz}(r, \omega) = -BG_s \frac{\omega}{v_s} H_1^{(2)}\left(\frac{\omega}{v_s}r\right) \quad (9)$$

式中 $H_1^{(2)}(x) = J_1(x) - iY_1(x)$ (10)

式(8)和(9)中,取 $r = r_0$,消去系数 B ,得纵向振动桩侧壁切应力的频率域表达式为

$$T_{rz}(r, \omega)|_{r=r_0} = -\rho_s v_s \omega \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega}{v_s}r_0\right)}{H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{v_s}r_0\right)} U_z(r, \omega)|_{r=r_0} \quad (11)$$

因假定桩土界面两侧位移连续,所以上式中桩侧壁土的轴向位移频谱 $U_z(r, \omega)|_{r=r_0}$ 就是桩纵向振动位移频谱。式中负号表明,桩周土对桩侧壁切应力与桩运动方向相反。

4 应用

4.1 桩周土等效参数 k 和 c 的表达式

根据式(11)可建立单位深度桩周土等效刚度系数

k 和等效阻尼系数 c 的表达式。

由文献[2]中桩周土对纵向振动桩作用的弹簧和粘壶模型,土对桩侧壁轴向切应力为

$$\tau_z|_{r=r_0} = -\frac{1}{2\pi r_0} \left(ku_z + c \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) |_{r=r_0} \quad (12)$$

式中 u_z 为桩纵向振动位移,也就是桩侧壁土的轴向位移。上式的 Fourier 变换表达为

$$T_{rz}|_{r=r_0} = -\frac{1}{2\pi r_0} (k + i\omega c) U_z|_{r=r_0} \quad (13)$$

将式(13)代入式(11)左边,两相等复数实部和虚部分离,可求得单位深度桩周土等效刚度系数 k 和单位深度桩周土等效阻尼系数 c :

$$k = \pi \rho_s v_s^2 \cdot 2a_0 \operatorname{Re}[H_1^{(2)}(a_0)/H_0^{(2)}(a_0)] \quad (14)$$

$$c = 2\pi r_0 \rho_s v_s \cdot \operatorname{Im}[H_1^{(2)}(a_0)/H_0^{(2)}(a_0)] \quad (15)$$

式中 a_0 为无量纲频率, $a_0 = \omega r_0/v_s$ (16)

式(14)~(16)表明, k, c 是桩周土的密度和剪切波速(或剪切模量)、桩半径和纵向振动频率的函数。

式(14)和(15)是前述假设条件下的精确结果,它提供了确定纵向振动的有限长弹性桩之桩周土参数 k 和 c 的近似方法。对均匀土,由桩周土的密度 ρ_s 和剪切波速 v_s 按式(14)和(15)计算 k 和 c ;对层状土,分别计算每层土的 k 和 c 。

4.2 桩瞬态纵向振动的计算及实例

笔者已研究出不均匀(层状)土中多缺陷桩瞬态纵向振动的简洁算法^[2]。在使用这一算法时,将桩周土等效参数 k 和 c 分别按式(14)和(15)计算,桩底土等效参数 k_b 和 c_b 按浅基础的 Lysmer 解计算^[10]。

$$\begin{cases} k_b = 4r_b \rho_b v_{sb}^2 / (1 - \nu_b) \\ c_b = 3.4r_b^2 \rho_b v_{sb} / (1 - \nu_b) \end{cases} \quad (17)$$

式中 r_b 为桩底半径; ρ_b, ν_b, v_{sb} 分别为桩底土密度、泊松比和剪切波速。桩顶瞬态纵向激振力 $p(t)$ 按文献[11]中给出的公式表示:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{I}{t_0} (1 - \cos \frac{2\pi}{t_0} t) & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (18)$$

其中 I 和 t_0 分别为纵向激振力的冲量和作用时间。对 $p(t)$ 作 Fourier 变换,得

$$P(\omega) = \frac{i4\pi^2 I (e^{-i\omega t_0} - 1)}{\omega t_0 (4\pi^2 - \omega^2 t_0^2)} \quad (19)$$

$P(\omega)$ 是 ω 的连续函数,但在两个可去奇点($\omega = 0$ 和 $\omega = 2\pi/t_0$) 必须按下式取值

$$\begin{cases} P(\omega)|_{\omega=0} = I \\ P(\omega)|_{\omega=2\pi/t_0} = -I/2 \end{cases} \quad (20)$$

实例 1 一根锤击沉管灌注桩,桩径 0.35 m, 施工桩长 7.0 m, 其反射波法动测曲线见图 2(a), 可见该桩

为完整桩。对该桩动测曲线作模拟计算时, 桩参数取值: $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量按动测波速 $v_p = 3470 \text{ m/s}$ 及公式 $E = \rho v_p^2$ 求出, 即 $E = 2.890 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$; 桩周土参数取值: $v_s = 130 \text{ m/s}$, $\rho_s = 1900 \text{ kg/m}^3$; 桩底土参数取值: $v_{sb} = 200 \text{ m/s}$, $\rho_b = 2000 \text{ kg/m}^3$, $\nu_b = 0.35$; 激振力参数取值: $I = 1 \text{ N} \cdot \text{s}$, $t_0 = 1.3 \times 10^{-3} \text{ s}$ 。模拟曲线见图 2(b), 它与反射波法动测曲线符合较好。

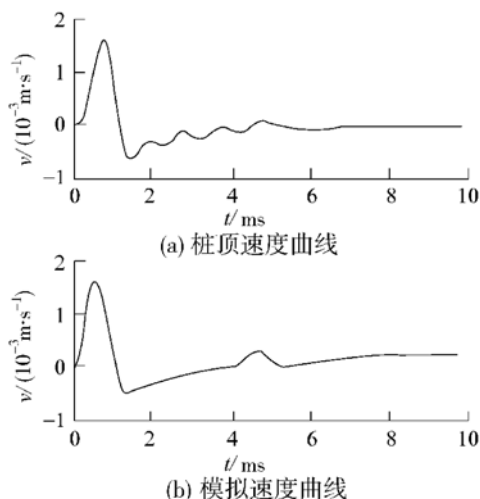


图 2 完整桩的桩顶测量速度和模拟速度

Fig. 2 Measured and simulated velocity responses at the pile head for an integrate pile

实例 2 另一工程的一根锤击沉管灌注桩, 桩径 0.4 m , 桩长 11.9 m 。图 3(a) 是其反射波法动测曲线, 曲线上存在缩径反射, 推断缩径位置在 5.4 m 处。模拟该曲线时, 由缩径缺陷界面及土层界面把桩分成三段, 各段底界面埋深: $h_1 = 5.0 \text{ m}$, $h_2 = 5.8 \text{ m}$, $h_3 = 11.9 \text{ m}$, 缩径段桩径 $d = 0.3 \text{ m}$, 由 $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ 和 $v_p = 3850 \text{ m/s}$, 求得桩弹性模量 $E = 3.557 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$; 各段桩周土剪切波速分别取 $v_{s1} = 80 \text{ m/s}$, $v_{s2} = 120 \text{ m/s}$,

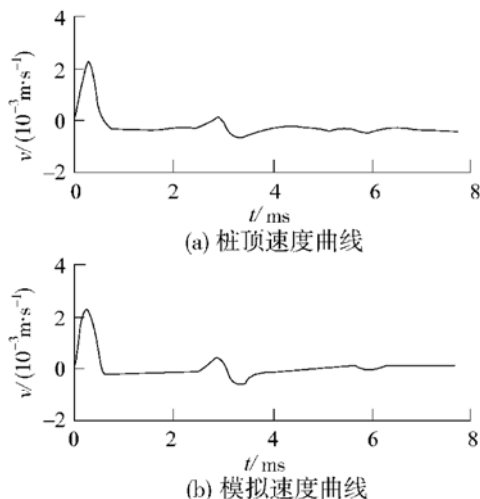


图 3 缺陷桩的桩顶测量速度和模拟速度

Fig. 3 Measured and simulated velocity responses at the pile head for a defective pile

$v_{s3} = 240 \text{ m/s}$, 桩侧土密度均取 $\rho_s = 1940 \text{ kg/m}^3$; 桩底土密度、剪切波速和泊松比分别取 $\rho_b = 2100 \text{ kg/m}^3$, $v_{sb} = 240 \text{ m/s}$, $\nu_b = 0.32$; 激振力冲量和作用时间分别取 $I = 1 \text{ N} \cdot \text{s}$, $t_0 = 0.7 \times 10^{-3} \text{ s}$ 。模拟曲线为图 3(b), 它较好地反映了实测曲线图 3(a) 的特征。

5 结 语

(1) 解决桩纵向振动问题必须研究桩侧土对桩侧壁切应力问题, 通过 Fourier 变换求出简化条件下桩侧壁切应力的频率域表达式。应用该式建立桩周土等效参数 k 和 c 与桩周土剪切波速、密度、桩半径和振动频率的关系式, 为文献[2]中桩周土等效参数 k 和 c 的确定提供了一种方法。

(2) 理论计算曲线与工程桩反射波法动测曲线对比表明, 简化条件下桩侧壁切应力频率域表达式较好地反映实际桩土瞬态纵向动力作用特征, 因而桩周土等效参数 k 和 c 的计算式对桩瞬态纵向振动的模拟计算是有效的。

参考文献:

- [1] Korten H Van, Middendorp P Van. An analysis of dissipative wave propagation in a pile [A]. Int Seminar on the Application of Stress-wave Theory on Piles [C]. Rotterdam: Balkema, 1980.
- [2] 刘东甲. 不均匀土中多缺陷桩的轴向动力响应[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(4): 391~395.
- [3] Milos Novak, Youpele O Bereduge. Vertical vibration of embedded footings [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, 1972, 98(SM2): 1291~1310.
- [4] Milos Novak. Vertical vibration of floating piles [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1977, 103(EM1): 153~168.
- [5] Milos Novak, Toyooki Nogami, Fakhry Aboul-Ella. Dynamic soil reaction for plane strain case [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1978, 104(EM4): 953~959.
- [6] Roger L kuhlemeyer. Vertical vibration of piles [J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1979, 105(GT2): 273~287.
- [7] Militano G, Rajapakse R K N D. Dynamic response of a pile in a multilayered soil to transient torsional and axial loading [J]. Geotechnique, 1999, 49(1): 91~109.
- [8] 王载典. 数学物理方程及特殊函数[M]. 北京: 清华大学出版社, 1991.
- [9] 梁昆淼. 数学物理方程[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.
- [10] Lysmer J, Richart F E. Dynamic response of footing to vertical loading [J]. Journal Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1966, 92(SM1): 65~91.
- [11] 刘东甲. 桩土系统纵向振动理论及应用 [A]. 白以龙, 扬卫. 力学 2000 学术大会论文集 [C]. 北京: 气象出版社, 2000. 309~310.