

# 边坡稳定三维分析的极限平衡方法

## A three-dimensional limit equilibrium method for slope stability analysis

陈祖煜<sup>1</sup>, 弥宏亮<sup>2</sup>, 汪小刚<sup>1</sup>

(1. 中国水利水电科学研究院 岩土工程研究所, 北京 100044; 2. 清华大学 水利水电系, 北京 100084)

**摘要:** 介绍对边坡稳定分析三维极限平衡方法的一个新解法, 它是二维 Spencer 法在三维条件下的扩展。该法保证了滑坡体三个方向的静力平衡, 同时, 还增加了一个整体力矩平衡条件, 行界面的条间力不再假定为水平, 条底的剪力方向也不假定为平行于主滑平面。考题和工程实例说明了其可行性和实用性。

**关键词:** 边坡稳定分析; 极限平衡法; 三维分析

中图分类号: TU 457

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2001)05-0525-05

**作者简介:** 陈祖煜, 男, 1943 年生, 1966 年本科毕业于清华大学水利系, 1991 年获工学博士学位, 教授级高级工程师, 从事边坡和水工建筑物稳定分析研究工作。

CHEN Zu-yu<sup>1</sup>, MI Hong-liang<sup>2</sup>, WANG Xiao-gang<sup>1</sup>

(1. China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100044, China; 2. Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** This paper describes an approach to three-dimensional slope stability analysis. It is an extension of the 2-D Spencer's. The new method allows the static equilibrium in all the three directions of the failure mass, with an additional condition satisfying the requirement for moment equilibrium. The number of assumptions made for the inter-column forces has been reduced, compared to the other 3-D methods commonly used. This paper describes the results of some illustrative examples and applications in a number of engineering projects.

**Key words:** slope stability; limit equilibrium; 3-D analysis

### 1 引言

在边坡稳定分析领域, 二维极限平衡法是常用的手段, 越来越多的工程实际问题提出了建立三维边坡稳定分析的要求。有关边坡稳定三维极限平衡方法, 已有众多文献介绍研究成果。Duncan 曾经列表总结了 20 篇文献资料<sup>[1]</sup>, 列举了这些方法的特点和局限性。

为了使问题变得静定可解, 以往各种三维极限平衡法均引入大量假定。Lam 和 Fredlund 计算了以物理和力学要求为基础建立的方程个数及这些方程中的未知数数目<sup>[2]</sup>, 发现对于离散成  $n$  行  $m$  列条块的破坏体, 共需引入  $8mn$  个假定。在诸多假定中, 最常见的是忽略作用在条柱侧面的全部剪力。Hung 在此基础上, 建立了通过力矩平衡和静力平衡求解的两种方法<sup>[3]</sup>。前者需要将滑裂面近似为一个球面, 被称为 Bishop 法的扩展; 后者则不能保持作用力在垂直滑坡这一方向的坐标轴(图 1 中的  $z$  轴)的静力平衡, 被称为简化 Janbu 法的延伸。Hung 发现, 此类方法通常给出较小的安全系数。许多三维极限平衡分析方法还对滑裂面的形状作出假定, 如假定为左右对称, 对数螺旋面等<sup>[4, 5]</sup>, 进一步削弱了方法的理论基础和应用范围。

在建立三维极限平衡分析方法时, 面临的另一个问题是: 在进行假定的时候, 通常不可能恰好使可建立

的方程和经假定后剩余的未知物理量的数量匹配。Lam & Fredlund 在建立条柱法时发现, 最终还多出两个系数  $\lambda_3, \lambda_4$ , 于是, 便进一步假定  $\lambda_3$  应该在若干个数值中选一个相应安全系数最小的, 这样, 进一步增加了方法的任意性, 使其失去了严格的理论基础。

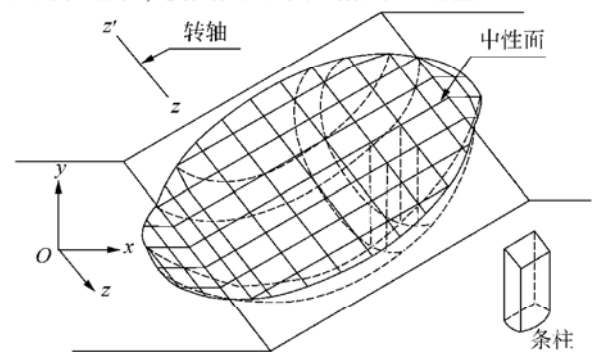


图 1 具有垂直界面条柱的滑动土体

Fig. 1 The failure mass divided by columns with vertical interfaces

本文在总结这些方法的处理特点及其包含的局限性基础上提出一个改善方法, 以期边坡稳定分析的三维极限平衡法所包含的上述局限性在一定程度上得到克服, 同时和笔者提出的边坡稳定三维上限解组成一个上、下限的分析方法体系<sup>[6]</sup>, 较好地解决实际工程问题。

## 2 建议的三维极限平衡分析方法

### 2.1 理论框架

和传统的边坡稳定分析方法一样,引入安全系数  $F$  的定义。如果滑面上的抗剪强度指标  $\tan \varphi$  和  $c$  按下式缩减,滑面上处处达到极限平衡。

$$\varphi_e = \tan \varphi / F \quad (1)$$

$$c_e = c / F \quad (2)$$

将滑动土体分成具有垂直界面的条柱,建立如图1所示的坐标系,  $x$  和  $y$  的正方向分别与滑坡方向和重力方向相反,  $xoy$  平面基本反映主滑方向,  $z$  轴的正方向按右手法则确定。

在分析作用在条柱上作用力的力和力矩平衡条件时,引入如下假定(见图2):

a)作用在行界面(平行于  $y\alpha$  平面的界面,图2中的  $ABFE$  和  $DCGH$ )的条间力  $G$  平行于  $xoy$  平面,其与  $x$  轴的倾角  $\beta$  为常量,这一假定相当于二维领域中的 Spencer 法<sup>[7]</sup>;

b)作用在列界面(平行于  $xoy$  平面的界面,图2中  $ADHE$  和  $BCGF$ )的作用力  $Q$  为水平方向,与  $z$  轴平行;

c)作用在底滑面的剪切力  $T$  与  $xoy$  平面的夹角为  $\rho$ ,规定剪切力的  $z$  轴分量为正时  $\rho$  为正值。

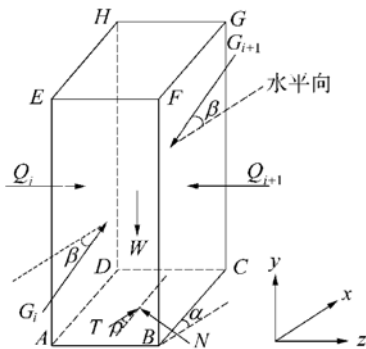


图2 作用在具有垂直界面的条柱上的力

Fig.2 Forces applied on a column with vertical interfaces

假定同一列条柱( $z =$  常量)的  $\rho$  值相同,对不同  $z$  坐标的条柱,假定  $\rho$  的一个分布形状: ①  $\rho = k =$  常量(图3(a)); ②在  $xoy$  平面的左、右两侧假定  $\rho$  的方向相反,并线性分布(图3(b)),假定此分布形状为

$$\left. \begin{aligned} \rho_R &= \kappa & z &\geq 0 \\ \rho_L &= -\eta \kappa & z < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

假定②中含有一个系数  $\eta$  此值反映左、右侧  $\rho$  变化的不对称特性,当滑体的几何形状和物理指标完全对称时,相应假定①的  $\kappa$  应为零,相应假定②的  $\eta$  应为1。和二维领域一样,笔者期待着在合理性条件限制下(参见2.2节),不同的分布形状假定将不会导致安全系数的重大差别。

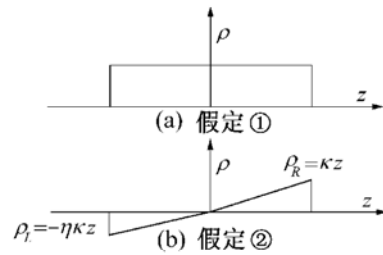


图3 底滑面的剪切力  $T$  与  $xoy$  平面的夹角  $\rho$  的分布形状  
Fig.3 The distribution of the shear forces  $T$  applied on the column base

设  $n_x, n_y, n_z$  为底滑面法线的方向导数,  $m_x, m_y, m_z$  为切向力  $T_i$  的方向导数,这个方向导数在确定了  $\rho$  值后即为已知。因为

$$m_z = \sin \rho \quad (4)$$

根据

$$\left. \begin{aligned} m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 &= 1 \\ m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

可以得到  $m_x, m_y$  (在  $m_x$  的两个解中,  $m_x < 0$  为不合理解,予以删除)。

### 2.2 静力平衡方程式求解步骤

建立力和力矩平衡方程解题步骤如下(见图4)。

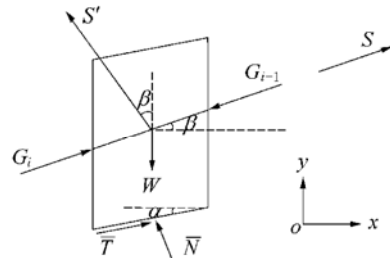


图4 作用在条柱上的力在  $S$  轴的投影

Fig.4 Projection of the forces of a column on direction  $S$

(1)分析作用在某一条柱上的力,求解底滑面的法向力  $N$

由于假定了行界面土条侧向力平行于  $xoy$  平面,列界面土条侧向力与  $z$  轴平行,在  $xoy$  平面上没有分力,因此可以方便地通过  $xoy$  平面上的力学平衡条件来求解  $N$ 。考虑到左、右两侧的  $G$  (其方向以  $S$  代表)均与  $x$  轴夹一个  $\beta$  角,求解  $N$  的一个方便的方法是将作用在土条上的力投影到垂直于  $S$  的轴  $S'$  上,这样就回避了  $G_i$  和  $G_{i+1}$  这两个未知力,将  $N_i$  求得。

在  $S'$  方向的条柱的平衡方程式为

$$-W_i \cos \beta + N_i (-n_x \sin \beta + n_y \cos \beta) + T_i (-m_x \sin \beta + m_y \cos \beta) = 0 \quad (6)$$

根据摩尔-库仑准则

$$T_i = (N_i - uA_i) \tan \varphi_e + c_e A_i \quad (7)$$

即可求解条底法向力  $N_i$ , 即

$$N_i = \frac{W_i \cos \beta + (uA_i \tan \varphi_e - c_e A_i) (-m_x \sin \beta + m_y \cos \beta)}{-n_x \sin \beta + n_y \cos \beta + \tan \varphi_e (-m_x \sin \beta + m_y \cos \beta)} \quad (8)$$

式中  $A_i$  为底滑面的面积;  $u$  为作用于滑面上的孔隙水压力。

(2) 建立整个滑坡体的静力平衡方程和绕  $z$  轴的力矩平衡方程式

计算  $N_i$  时, 已满足了每个条柱  $S'$  方向的静力平衡条件. 因此, 建立与  $S'$  垂直的  $S$  方向的整体平衡方程式

$$S = \sum N_i (n_x \cos \beta + n_y \sin \beta)_i + T_i (m_x \cos \beta + m_y \sin \beta)_i - W_i \sin \beta = 0 \quad (9)$$

建立  $z$  方向的整体平衡方程式

$$\sum (N_i n_z + T_i m_z) = 0 \quad (10)$$

同时建立绕  $z$  轴的整体力矩平衡方程式(以逆时针为正)

$$\sum [-W_i x - N_i n_{xy} + N_i n_{yx} - T_i m_{xy} + T_i m_{yx}] = 0 \quad (11)$$

由于整体静力平衡在坐标系的三个轴上均已满足, 因此, 建立式(11)时可绕任一与  $z$  轴平行的轴取矩。

在建立  $S'$ ,  $S$  方向和  $z$  方向的静力平衡方程式(6), (9), (10)时, 最方便的方法是要求各个力矢量与投影方向的点积之和为零。已知  $S$  方向导数  $(\cos \beta, \sin \beta, 0)$ ,  $W$  方向导数  $(0, -1, 0)$ ,  $N$  方向导数  $(n_x, n_y, n_z)$ ,  $T$  方向导数  $(m_x, m_y, m_z)$ ,  $S'$  方向导数  $(-\sin \beta, \cos \beta, 0)$ , 据此可以方便地建立这些静力平衡方程式。

(3) 应用牛顿-勒普生法迭代求解安全系数

联立方程(9), (10)和(11)中有 3 个未知数, 即  $F$ ,  $\beta$  和  $\rho$ , 可用牛顿-勒普生法求解。假定  $F$ ,  $\beta$  和  $\rho$  的初值  $F_0$ ,  $\beta_0$  和  $\rho_0$ , 得到一个非零的  $\Delta S$ ,  $\Delta M$ ,  $\Delta Z$ 。使  $\Delta S$ ,  $\Delta M$ ,  $\Delta Z$  接近零的  $F_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\rho_1$  可由下式求得(此时  $i=0$ ):

$$\begin{cases} \Delta F = F_{i+1} - F_i = -K_F/D \\ \Delta \beta = \beta_{i+1} - \beta_i = -K_\beta/D \\ \Delta \rho = \rho_{i+1} - \rho_i = -K_\rho/D \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{其中 } D = \begin{vmatrix} \frac{\partial S}{\partial F} & \frac{\partial S}{\partial \beta} & \frac{\partial S}{\partial \rho} \\ \frac{\partial M}{\partial F} & \frac{\partial M}{\partial \beta} & \frac{\partial M}{\partial \rho} \\ \frac{\partial Z}{\partial F} & \frac{\partial Z}{\partial \beta} & \frac{\partial Z}{\partial \rho} \end{vmatrix}; K_F = \begin{vmatrix} \Delta S & \frac{\partial S}{\partial \beta} & \frac{\partial S}{\partial \rho} \\ \Delta M & \frac{\partial M}{\partial \beta} & \frac{\partial M}{\partial \rho} \\ \Delta Z & \frac{\partial Z}{\partial \beta} & \frac{\partial Z}{\partial \rho} \end{vmatrix};$$

$$K_\beta = \begin{vmatrix} \frac{\partial S}{\partial F} & \Delta S & \frac{\partial S}{\partial \rho} \\ \frac{\partial M}{\partial F} & \Delta M & \frac{\partial M}{\partial \rho} \\ \frac{\partial Z}{\partial F} & \Delta Z & \frac{\partial Z}{\partial \rho} \end{vmatrix}; K_\rho = \begin{vmatrix} \frac{\partial S}{\partial F} & \frac{\partial S}{\partial \beta} & \Delta S \\ \frac{\partial M}{\partial F} & \frac{\partial M}{\partial \beta} & \Delta M \\ \frac{\partial Z}{\partial F} & \frac{\partial Z}{\partial \beta} & \Delta Z \end{vmatrix}。$$

通过迭代, 最终满足收敛条件。在计算中, 要求  $\Delta F$ ,  $\Delta \beta$ ,  $\Delta \rho$  均小于 0.001( $\beta$  和  $\rho$  以弧度计)。

(4) 合理性条件限制

在二维领域, Morgenstern & Price (1965), Janbu (1973) 等曾指出, 对不同的条间力分布形状的假定应

受到物理合理性条件的限制; 在滑面和条块界面, 均不应有拉应力; 同时, 界面的抗剪安全系数应大于整体安全系数。在三维领域, 也可提出类似的条件, 来限制对条柱界面的假定, 一般来说, 可以要求每个界柱的底面法向应力大于零, 即

$$N_i - uA \geq 0 \quad (13)$$

(5) 空间滑裂面的构筑和确定临界滑裂面的方法

有关三维空间滑裂面的构筑以及搜索临界滑裂面的方法, 已在另文介绍<sup>[6,8]</sup>, 但以下的考题将通过实例说明其应用效果。

### 3 考 题

#### 3.1 考题 1 椭球体滑面算例

Zhang Xing 曾发表文章<sup>[9]</sup>, 对一系列具有简单体形的椭球滑面的三维安全系数提供了解答, 择其中一套参数如图 5 所示。

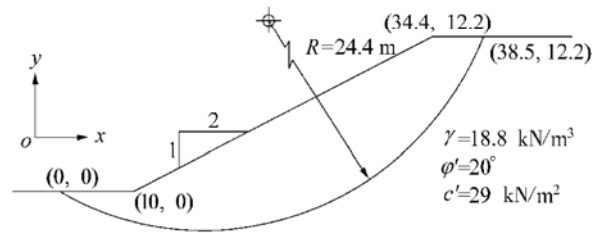


图 5 椭球体滑面算例

Fig. 5 An illustrative example with an ellipsoid failure surface

计算时, 按原例的要求在对称轴平面用一圆弧模拟滑裂面, 在  $z$  方向, 则以椭圆面形成滑面。

表 1 为采用  $\rho$  的分布形状 ①(图 3(a)) 的计算迭代过程。可见, 当输入  $F$ ,  $\beta$ ,  $\rho$  的初值分别为 2.284,  $5.0^\circ$  和  $5.0^\circ$  后, 获得很大的不平衡力和力矩。经过 3 次迭代后, 安全系数收敛为 2.187, 不平衡力和力矩均减少到基本为零的数值。由于本例具有一左右对称的滑体,  $\rho$  最终收敛为零。此例 Zhang Xing 给出的解答  $F = 2.122$ , 两者较为接近。此例若采用  $\rho$  的分布形状 ②(图 3(b)), 取  $\eta = 1$ , 安全系数为 2.188。

表 1 Zhang Xing 算例的计算迭代收敛过程

Table 1 The iteration process of an example offered by Zhang Xing

迭代次数	$F$	$\beta / (^\circ)$	$\rho / (^\circ)$	不平衡力 $S/\text{kN}$	不平衡力矩 $M/(\text{kN}\cdot\text{m})$	不平衡力 $Z/\text{kN}$
初值	2.284	5.00	5.00	-9166.1	98701.9	6727.4
1	2.164	12.42	-0.25	-391.9	23620.0	-351.6
2	2.187	14.85	0	12.9	165.0	-2.7
3	2.187	14.87	0	0.5	-0.2	0.3

#### 3.2 考题 2 楔形体算例

岩石力学中的楔形体稳定是一个典型的三维极限平衡分析问题。一些学者在开发三维边坡稳定时, 都将此作为考察对象。对于简单的块体, 其求解方法在

教科书中已有详细介绍<sup>[10]</sup>。本例考察一个如图6所示的楔体,其几何形体和物理参数如表2所示,其中楔形体坡高64.89 m,岩石容重26 kN/m<sup>3</sup>,计算分左、右底滑面强度参数相同和不相同两种情况。在对称例题中,取 $c=50\text{ kN/m}^2$ , $\varphi=20^\circ$ ;材料不对称例题中,右结构面强度指标不变,左结构面采用 $c=30\text{ kN/m}^2$ , $\varphi=10^\circ$ 。

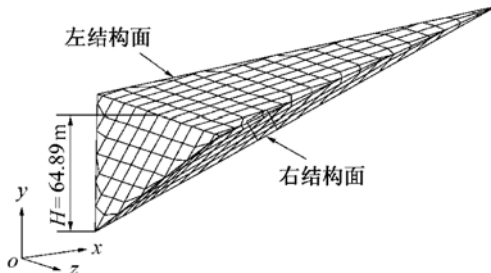


图6 楔形体滑面算例

Fig. 6 An example with wedge failure surface

表2 楔形体例题的几何、物理参数

Table 2 Parameters of geometry and geotechnical properties for the example with wedge failure surface

部位	倾向/(°)	倾角/(°)
左结构面	115	45
右结构面	245	45
顶面	180	10
坡面	180	60

对材料对称的情况,采用 $\rho$ 的分布形状①程序和教科书给出完全相同的计算结果, $F=1.556$ , $\rho$ 收敛为零。此例采用分布形状②, $\eta$ 取1,安全系数的解答仍为1.556, $\rho$ 和 $\kappa$ 收敛为零,与教科书方法隐含的假定一致。

考虑楔体左、右滑面取不同材料指标情况,采用分布形状①时,得到安全系数为1.180,教科书答案也为1.180。采用第二种形状函数时,计算结果如表3所示,相应 $\eta=0.4\sim 1.2$ ,安全系数 $F=1.167\sim 1.143$ ,说明不同的 $\eta$ 值对计算结果的影响不大。

表3 材料指标左右不相同楔形体计算例题

Table 3 Calculated results for the asymmetric wedge

$\eta$	计算结果	
	$\kappa$	$F$
1.2	0.428	1.143
1.1	0.404	1.147
1.0	0.380	1.151
0.8	0.340	1.158
0.6	0.306	1.163
0.4	0.278	1.167

## 4 应用实例

### 4.1 天生桥二级水电站厂房后坡

天生桥二级水电站厂房后坡削坡过程中,556 m高程以上出现大体积山体位移,称为“下山包滑坡”。根据滑坡体上的早期钻孔和后期抗滑桩竖井资料揭露

以及滑面在地表的剪出线,准确地编制了滑面等高线图,据此将滑体切出11个控制剖面。在三维计算中,取其典型剖面,在 $xoy$ 面右侧输入5个剖面,左侧输入3个剖面(见图7),滑体物理力学指标如表4示。根据基本垂直的节理条件,最终形成如图8的三维透视图。此例题考虑了地下水位,得安全系数 $F=0.824$ 。曾对剖面1至9逐个进行二维分析<sup>[8]</sup>,加权平均获得的整体安全系数为0.885。

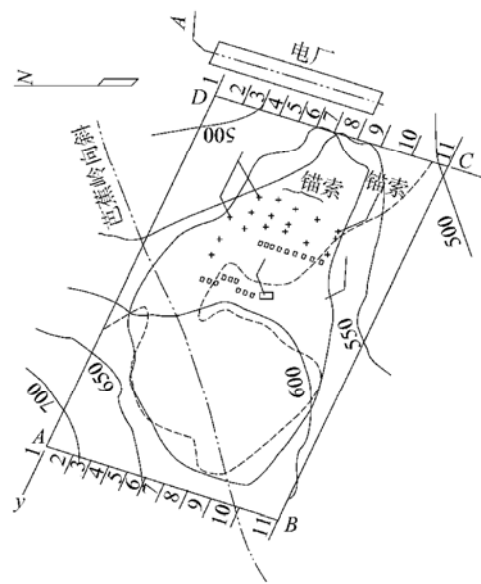


图7 天生桥二级滑坡

Fig. 7 Landslide analysis of Tianshengqiao Project

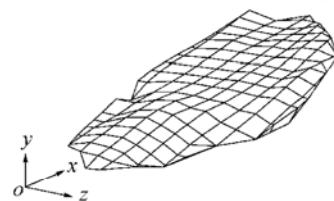


图8 天生桥二级滑面算例

Fig. 8 A plan view of the Tianshengqiao landslide

表4 滑坡体及软弱夹层材料参数表

Table 4 Parameters for the landslide materials of Tianshengqiao Project

部位	滑坡体前部			滑坡体后部		
	$c/\text{MPa}$	$\tan \varphi$	$\gamma/(\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$	$c/\text{MPa}$	$\tan \varphi$	$\gamma/(\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$
软弱夹层	0.01	0.14	2.25	0.015	0.17	2.25
滑坡体	0.20	0.26	2.30	0.020	0.26	2.30

### 4.2 洪家渡水电站溢洪道进口边坡稳定分析

该工程由于开挖导流洞的需要,在进口处将形成一个开挖高度达100 m的边坡,其中直立段为30 m,进口的开挖宽度为28 m。如果采用常规的二维分析方法,安全系数较小,但洞口开挖通常仅有限宽度。本计算工作试图了解应用三维稳定分析,其安全系数有多少提高。

图9为常规的二维计算结果,用三个结点 $A'$ , $B'$ , $C'$ 构筑一条光滑的曲线,采用Spencer法计算其安全系数,滑面的抗剪强度采用 $\varphi=30^\circ$ , $c=500\text{ kPa}$ 。因本例

岩体的抗剪强度指标中有较大的  $c$  值, 因此, 在滑裂面顶部设置了 15 m 深的拉力缝。对图中初始滑裂面, 安全系数为 1.84, 采用最优化方法获得的临界滑裂面如图 ABC 面所示, 在设定的参数条件下, 安全系数为 1.425。

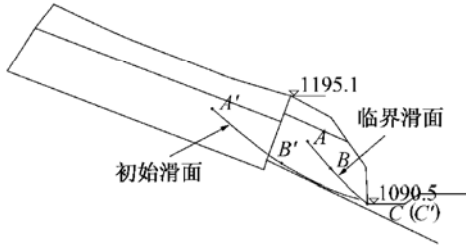


图 9 洪家渡算例二维计算成果

Fig. 9 2-D analysis for Hongjiadu intake structure slope

三维计算时, 初始滑裂面在 0 断面的形状与二维时相同, 安全系数为 2.640。使用最优化方法, 最终获得了如图 10 所示的临界滑裂面, 相应的安全系数为 2.076。优化后, 控制点各项参数的变化如表 5 所示, 表中各参数的物理意义见文献[8]。

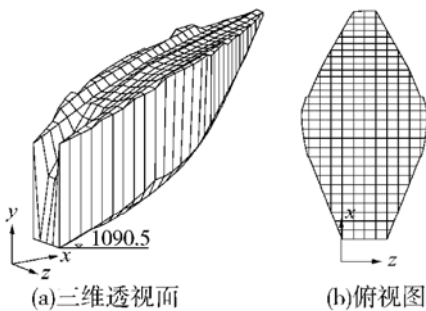


图 10 洪家渡算例三维临界滑裂面

Fig. 10 3-D analysis for Hongjiadu intake structure slope

表 5 控制点各项参数初始与优化后对比

Table 5 Comparisons of the original and optimized parameters for the controlling points

控制点	初始值				优化值			
	$x$	$y$	$\zeta$	$B$	$x$	$y$	$\zeta$	$B$
C	101.4	-9.8	0.5	14.0	101.4	-9.8	0.965	14.0
B	187.0	25.0	0.8	7.0	187.0	36.2	0.997	11.7
A	249.0	100.0	0.8	0.5	252.3	111.7	0.839	0.5

$x, y$  为控制点的坐标, 单位: m。

## 5 讨论和结论

(1) 和其他边坡稳定分析三维极限平衡方法比较, 本文方法在以下方面有所改进: ①滑坡体三个方向的静力平衡都得到了满足, 同时, 还增加了一个整体力矩平衡条件; ②行界面的条间力不再假定为水平; ③条底的剪力方向不假定为平行于  $xoy$  平面; ④没有对滑裂面的形状和边坡的几何、物理特性作任何假定。程序可用于解决工程实际问题; ⑤最终形成了一个三元非线性联立方程, 和二维 Spencer 法相比, 只增加了一个

方程式, 相应也增加了一个未知量, 即条底剪力方向  $\rho$ , 整个运算过程简便, 实际应用情况说明, 数值收敛性能良好。

(2) 本法可以回归到二维 Spencer 法, 也可把它理解为 Spencer 法在三维条件下的扩展。

(3) 和以往方法相比, 引入的假定明显偏少, 但由于忽略了条间力的一些剪切分量, 同时又假定所有条块的  $\beta$  为同一数值, 同一列的  $\rho$  值也为同一数值, 故仍属近似算法。由于条间侧面剪力被假定为零, 计算成果可能偏小, 属下限解。和二维领域的许多简化方法一样, 这一方法需要在实际应用考核过程中确定其合理性和可行性。文献[6]讨论了理论体系更为严格的一种三维边坡稳定分析的上限解法, 实际应用时, 可同时采用这两个方法。两文列举的和其他的一些考题和实际算例说明, 这两个方法通常可以把安全系数限定在一个较小的上、下限区间中, 基本上获得安全系数严格意义上的解。

## 参考文献:

- [1] Duncan J M. State of the art: limit equilibrium and finite element analysis of slopes[J]. Journal of Geotechnical engineering, 1996, 22(7): 577~ 596.
- [2] Lam L, Fredlund D G. A general limit equilibrium model for three-dimensional slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, 30: 905~ 919.
- [3] Hungr O, Salgado F M, Byrne P M. Evaluation of a three-dimensional method of slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1989, 26: 679~ 686.
- [4] Chen R H, Chameau J L. Three-dimensional limit equilibrium analysis of slopes[J]. Geotechnique, 1983, 33: 31~ 40.
- [5] Leshchinsky D, Baker R, Silver M L. Three-dimensional analysis of slope stability[J]. International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics, 1985, 9: 199~ 223.
- [6] Chen Zuyu, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem( I ): theory and methods [J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2001, 38: 369~ 378.
- [7] Spencer E. A method of analysis of embankments assuming parallel inter-slice forces[J]. Geotechnique, 1967(17): 11~ 26.
- [8] Chen Zuyu, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem( II ): numerical approaches, applications and extensions[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2001, 38: 379~ 397.
- [9] Zhang X. Three-dimensional stability analysis of concave slopes in plan view [J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1998, 114: 658~ 671.
- [10] Hoek E, Bray J W. Rock slope Engineering[M]. London: The Institute of Mining and Metallurgy, 1977.