

基于 Taylor 展开随机有限元法的裂隙岩体 随机渗流分析

Stochastic seepage analysis of jointed rock masses by usage of Taylor series stochastic finite element method

盛金昌, 速宝玉, 魏保义
(河海大学 水电学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 基于等效连续介质模型, 应用 Taylor 展开法分析裂隙岩体渗透性的随机性与裂隙基本几何参数随机性的关系, 然后用一阶 Taylor 展开随机有限元法分析裂隙岩体渗流场的随机性。数值分析表明: 隙宽的随机性对渗流场的影响最大, 裂隙的迹长次之, 间距的影响最小。

关键词: 裂隙岩体; 随机渗流; 随机有限元法

中图分类号: O 357.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2001)04-0485-04

作者简介: 盛金昌, 1969 年生, 男, 博士, 讲师, 从事岩体水力学、渗流控制优化分析及岩石力学等方面的研究工作。

SHENG Jin-chang, SU Bao-yu, WEI Bao-yi

(College of Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: On the basis of the model of equivalent continuous medium, the stochastic relationship of permeability of jointed rock masses with that of basic geometric parameters of joints is first analyzed by usage of Taylor series, then stochastic seepage analysis of jointed rock masses is formulated by stochastic finite element method of first order Taylor series. The numerical results show that the randomness of the width of fissure has a greater effect on seepage field than that of the trace and the spacing of fissure.

Key words: jointed rock masses; stochastic seepage; stochastic finite element method

1 引言*

裂隙岩体的水流运动取决于岩体中发育的大量的裂隙、节理和断层等不连续结构面, 因此如何描述裂隙系统的几何和物理参数(如裂隙大小、位置、产状、密度和隙宽等)就成了研究裂隙岩体水力学的关键。以往裂隙岩体渗流分析基本上都是基于传统的“确定性”模型。由于裂隙的分布非常复杂, 其几何、物理参数存在空间上的不确定性和随机性, 用确定性渗流理论来分析所得的结果就可能与实际情况有很大的出入^[1,2], 这几乎成为制约裂隙岩体渗流理论进一步发展的重要因素之一。为了克服上述困难, 必须分析裂隙岩体渗透性的随机性, 建立裂隙岩体的随机渗流理论模型并发展相应的数值分析方法。

裂隙岩体随机渗流理论有着很重要的应用价值, 在岩土工程中, 可靠性研究有了长足的进步, 但该领域中涉及到随机渗流这个对稳定安全至关重要的因素却相对滞后。考虑渗流场随机性的可靠性分析将使分析结果更客观、更明确。另外在核废料埋藏及溶质运移问题上, 可以与裂隙网络模型相结合, 建立随机裂隙网络渗流模型, 能更可靠地预报裂隙岩体的渗流状态。随机渗流模型在水利工程上可直接应用, 如分析坝基扬压力

分布的随机性, 估计流量、流率的概率分布规律。

国外在 80 年代初开始重视随机性对裂隙岩体地下水流的影响, 目前在这方面的研究比较活跃。Sagar 和 A. Runchal(1982)^[3] 讨论了裂隙系统基本参数的不确定性对岩体渗透性的影响, 文中采用二阶 Taylor 展开法来分析裂隙的基本参数随机性对岩体渗透张量的影响程度, 讨论了渗透张量的主对角分量的均值、标准差和裂隙开度的标准差的变化关系, 同时指出在流量计算中, 除了用等效渗透系统的均值计算的量外, 还有一个相当大的不确定性的量。国内这方面的研究多集中在基于不连续网络渗流模型的 Monte-Carlo 法^[1,2,4,5], 该方法精度很高, 解的统计信息丰富, 但重复模拟次数多, 计算效率低, 当裂隙较多且计算域较大时, 计算量巨大, 因此在工程应用上受到限制。本文采用等效连续介质模型, 同时考虑裂隙基本参数的随机性, 以便能在工程数值分析中应用。

2 等效连续介质模型渗透随机性的表述

描述裂隙系统的基本参数有^[6]: 裂隙大小(用迹

* 收稿日期: 2000-07-12

长 l_i 表示, 若把裂隙看成圆盘形, 用半径 r 表示); 裂隙的产状(用倾向 θ 和倾角 φ 表示); 裂隙的密度 ρ (单位体积裂隙的条数); 隙宽或水力开度 b 等。以上参数一般是相关的。若裂隙分组后, 其相关性一般较低, 但通常隙宽和裂隙大小之间存在强烈的正相关。

等效连续介质一般用渗透张量表示岩体的渗透性。设表征体积单元存在, 按流速体积均匀化方法, 将裂隙系统概化为具有各向异性渗透性的连续介质, 其渗透张量为^[7]

$$k_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{g}{v} \pi r_{(k)}^2 \lambda_{(k)} \rho_{(k)} b_{(k)}^3 | \delta_{ij} - n_{(k)i} n_{(k)j} | \quad (1)$$

式中 g 为重力加速度; v 为运动粘性系数; r 为裂隙圆盘半径; λ 为反映裂隙连通性及不同组裂隙相交次数的一个无量纲系数, $0 \leq \lambda \leq 1/12$, 当裂隙无限贯通时, $\lambda = 1/12$; ρ 为第 k 组裂隙的体密度, $\rho = m_{(k)}/V$, $m_{(k)}$ 为体积 V 中第 k 组裂隙的个数; t 为隙宽; $n_{(k)i}$, $n_{(k)j}$ 为第 k 组裂隙的单位法矢量的分量。

在确定性分析中, 式(1)中的裂隙系统的基本参数(r, \bar{n}, ρ, b)都是确定性的量。从随机理论来看, 确定性分析中一般使用的是这些变量的统计均值, 它们都应看成随机变量(从场的角度来看都是随机场), 这样, 由这些随机变量确定的渗透张量就是一个随机渗透张量。

把裂隙系统参数 (r, \bar{n}, ρ, b) 计为基本随机变量 $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$, 这样渗透张量 k_{ij} 可表为

$$k_{ij} = k_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (2)$$

根据大量的工程实测资料, 一般渗透系数呈正态对数分布。这里设渗透张量 k_{ij} 的各分量皆为正态对数分布。令 $X_1 = \ln k_{xx}, X_2 = \ln k_{yy}, X_3 = \ln k_{zz}, X_4 = \ln k_{xy}, X_5 = \ln k_{yz}, X_6 = \ln k_{zx}$, 这样 $X_1 \sim X_6$ 为正态分布 $X_1 \sim X_6$ 可表示为

$$X_i = X_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (3)$$

对 $X_1 \sim X_6$ 进行 Taylor 展开, 取到二阶项有,

$$X_i = X_i(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) + \sum_{l=1}^n (\alpha_l - \bar{\alpha}_l) \frac{\partial X_i}{\partial \alpha_l} \Big|_{\alpha_l = \bar{\alpha}_l} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (\alpha_p - \bar{\alpha}_p)(\alpha_q - \bar{\alpha}_q) \frac{\partial^2 X_i}{\partial \alpha_p \partial \alpha_q} \Big|_{\alpha_p = \bar{\alpha}_p, \alpha_q = \bar{\alpha}_q} \quad (4)$$

求 X_i 的均值、方差和协方差:

(1) 均值

$$E(X) \approx \bar{X} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha_l \partial \alpha_m} \Big|_{\alpha_l = \bar{\alpha}_l, \alpha_m = \bar{\alpha}_m} \cdot \text{Cov}(\alpha_l, \alpha_m) \quad (5)$$

(2) 方差

$$\text{Var}(X) \approx \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{\partial X}{\partial \alpha_l} \Big|_{\alpha_l = \bar{\alpha}_l} \frac{\partial X}{\partial \alpha_m} \Big|_{\alpha_m = \bar{\alpha}_m} \cdot \text{Cov}(\alpha_l, \alpha_m) \quad (6)$$

(3) 协方差

$$\text{Cov}(X_i, X_j) \approx \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial \alpha_l} \Big|_{\alpha_l = \bar{\alpha}_l} \cdot \frac{\partial X_j}{\partial \alpha_m} \Big|_{\alpha_m = \bar{\alpha}_m} \cdot \text{Cov}(\alpha_l, \alpha_m) \quad (7)$$

式中, $\frac{\partial X_i}{\partial \alpha_l}, \frac{\partial^2 X_i}{\partial \alpha_l \partial \alpha_m}$ 由下式计算:

$$\frac{\partial X_i}{\partial \alpha_l} = \frac{\partial(\ln k'_{ij})}{\partial \alpha_l} = \frac{1}{k'_{ij}} \frac{\partial k'_{ij}}{\partial \alpha_l} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial \alpha_l \partial \alpha_m} = - \frac{1}{k'^2_{ij}} \frac{\partial k'_{ij}}{\partial \alpha_l} \frac{\partial k'_{ij}}{\partial \alpha_m} + \frac{1}{k'_{ij}} \frac{\partial^2 k'_{ij}}{\partial \alpha_l \partial \alpha_m} \quad (9)$$

式中, 记 $k'_{11} = k_{xx}, k'_{22} = k_{yy}, k'_{33} = k_{zz}, k'_{44} = k_{xy}, k'_{55} = k_{yz}, k'_{66} = k_{zx}$ 。带“-”的表示随机变量的期望值, $E(\cdot)$ 表示取期望值, $\sigma_i^2, \text{Cov}(\alpha_p, \alpha_q)$ 分别为

$$\sigma_i^2 = \text{Var}(\alpha_i) = E((\alpha_i - \bar{\alpha}_i)^2) \quad (10)$$

$$\text{Cov}(\alpha_p, \alpha_q) = E((\alpha_p - \bar{\alpha}_p)(\alpha_q - \bar{\alpha}_q)) \quad (11)$$

3 基于 Taylor 展开随机有限元法的裂隙岩体随机渗流分析

由于岩体裂隙几何参数的随机性, 导致岩体渗透张量的随机性, 从而引起场内各点的水头值、渗透坡降以及自由面位置等的不确定性。这里从渗流基本原理出发建立随机渗流模型, 然后用 Taylor 展开随机有限元法进行随机渗流分析。设水流为层流, 流体运动速度与水头之间满足达西定律。当渗透张量 $k_{ij}(x, y, z)$ 为随机函数时, 水头 $h(x, y, z)$ 、流速 $V(x, y, z)$ 也为随机函数。下面给出随机渗流控制方程^[8]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j}) = - S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (12)$$

式中 h 为水头值; k_{ij}, S_s 不再是以往“确定性的”量, 而是随机变量(从场的角度看是一个随机场), 若 S_s 随机性较小, 可近似把其当作确定量, 对于稳定渗流, $S_s = 0$ 。

式(12)即为稳定随机渗流控制方程, 方程在形式上和确定性渗流无甚区别, 但其变量和系数皆为随机函数, 求解过程复杂得多。对式(12)的求解也需一定的边界条件, 即

$$\text{已知水头边界: } h(x, y, z) = h_0(x, y, z) \quad (13)$$

$$\text{已知流量边界: } k_n(x, y, z) \cdot \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial n} = q_0(x, y, z) \quad (14)$$

$$\text{混合边界: } h(x, y, z) + \alpha \cdot \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial n} = \beta \quad (15)$$

这里, $h_0(x, y, z), q_0(x, y, z), \alpha, \beta$ 为已知的随机函数

或随机变量。

对随机变量的描述,最好的形式是用它的多维联合分析函数或概率密度函数,然而随机微分方程到目前为止,除极少数理想情况外,尚无法求得精确解。对于复杂边界,一般求联合分析函数或联合概率密度函数相当困难。通常采用的是近似解析和数值解法。本文采用比较实用的 Taylor 展开法随机有限元(TSFEM)。下面给出其基本思路。

对式(12)进行有限元离散,经推导整理可得

$$[K]\{P\} = \{F\} \quad (16)$$

式中 $[K]$ 为总体渗透矩阵; $\{P\}$ 为结点水压力列向量; $\{F\}$ 为结点等效流量列向量。

以渗透张量 k_{ij} 的对数作为基本随机变量,将水压力 $\{P\}$ 在基本随机变量的均值点 $\bar{X} = \{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n\}^T$ 处进行二阶 Taylor 展开,分析计算均值和方差可以得到

$$E(P) \approx \bar{P} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 P}{\partial X_i \partial X_j} \Big|_{X=\bar{X}} \cdot \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (17)$$

$$\text{Var}(P) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial P}{\partial X_i} \Big|_{X=\bar{X}} \cdot \frac{\partial P}{\partial X_j} \Big|_{X=\bar{X}} \cdot \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (18)$$

水压力的任意两个分量 P_i 和 P_j 的协方差为

$$\text{Cov}(P_i, P_j) \approx \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial X_l} \Big|_{X=\bar{X}} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial X_m} \Big|_{X=\bar{X}} \cdot \text{Cov}(X_l, X_m) \quad (19)$$

式(17), (18)中 $\frac{\partial P}{\partial X_i}, \frac{\partial^2 P}{\partial X_i \partial X_j}$ 由下式计算:

$$\frac{\partial P}{\partial X_i} = K^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} - \frac{\partial K}{\partial X_i} P \right) \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X_i \partial X_j} = K^{-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j} - \frac{\partial K}{\partial X_j} \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{\partial K}{\partial X_i} \frac{\partial P}{\partial X_j} - \frac{\partial^2 K}{\partial X_i \partial X_j} P \right) \quad (21)$$

Taylor 展开随机有限元法推导简单明了,尤其是一次 Taylor 展开。但由于一次 TSFEM 忽略了二阶以上高阶项,使 TSFEM 对随机变量的变异性有所限制。一次 TSFEM 一般要求随机变量的变异系数小于 0.2 或 0.3。二阶 TSFEM 对随机变异性大小的限制有所放宽,但其工作量急剧增大。对于裂隙岩体,目前还难以考虑裂隙系统的几何参数的空间分布情况。

4 算例分析

取某一混凝土重力坝及坝基的一个断面进行计算,尺寸如图 1 所示。坝高 80.0 m,底宽为 320.0 m。

坝上游水位为 80.0 m,下游水位为 0.0 m。假设基岩中发育有水平和竖直方向的两组正交裂隙,计算中,假设各组裂隙的初始隙宽、间距和迹长等几何变量为基本随机变量,其它几何参数为确定性变量。裂隙系统的基本几何参数见表 1,各基本随机变量的均方差 Var 均取为 0.2。坝体假设为不透水。

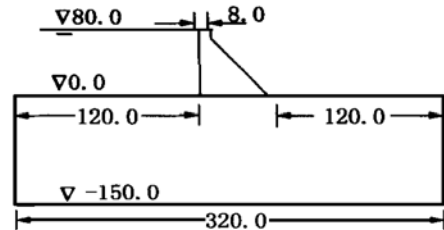


图 1 坝体及地基剖面图

Fig. 1 The profile of dam and its foundation

表 1 裂隙系统的几何参数的均值

Table 1 The mean of geometrical parameters of joint sets

裂隙	初始隙宽/mm	间距 L / m	迹长/m
水平裂隙	0.1	0.5	1.0
垂直裂隙	0.1	0.5	1.0

假设岩基为均匀材料,从随机角度来看,各点的渗透系数为全相关的,因此可取裂隙系统的基本几何参数 (r, n, ρ, b) 为基本随机变量。图 2(a)~(d) 为各随机变量的 $\text{Var} = 0.2$ 时的渗流场标准差分布图。从图上可以看出,由于是单一材料,因此渗流场标准差的分布相同,坝基底下的场压力的标准差为 0,基岩中渗流场的标准差的分布呈现出中间和上表面小,左下角和右下角大的特点,这与实际情况是相符的,因为对于单一材料,不管其渗透系数如何变化,坝基中点下面垂直线上的水头值是不变的,因此基岩中间部位的标准差为零,如果材料不均匀,各点的渗透系数各不相同,即把岩体的渗透系数作为一随机场来考虑,那么其标准差的分布就不是这样,文献[9]给出了多孔介质情况下渗透系数作为一随机场来考虑时该算例的结果。另外,虽然标准差的分布相同,但其大小却不相同,其中隙宽的随机性对渗流场的影响最大,裂隙的迹长次之,间距的影响最小,分别见图 2(c), (a), (b)。若几种参数的随机性一起考虑,则渗流场的随机性更大,见图 2(d)。

5 结 语

基于连续介质模型建立了裂隙岩体的随机渗流理论模型,并用 Taylor 展开进行相应的数值分析方法。首先分析了裂隙岩体渗透性与裂隙系统基本几何参数随机性的关系,然后用一阶 Taylor 展开随机有限元法分析裂隙岩体渗流场的随机性。最后的数值分析表

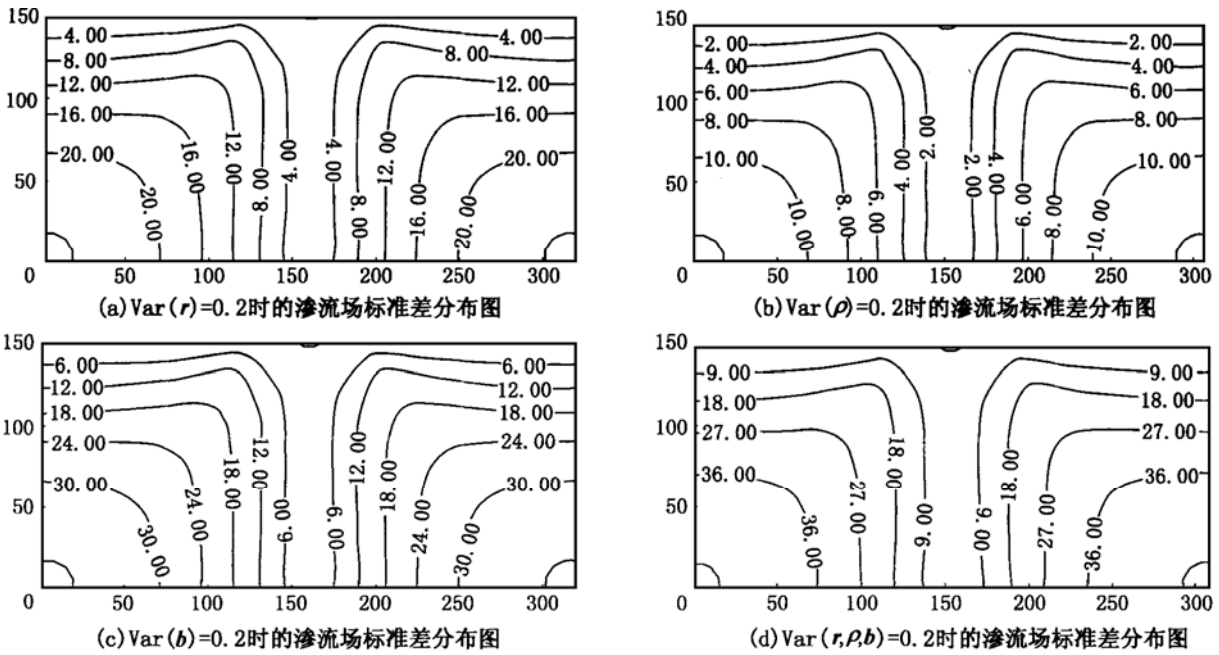


图 2 各随机变量随机性对渗流场标准差分布的影响

Fig. 2 The influence of stochastic variables on stochastic seepage field

明: 隙宽的随机性对渗流场的影响最大, 裂隙的迹长次之, 间距的影响最小, 若几种参数的随机性一起考虑, 则渗流场的随机性更大。计算分析中未考虑裂隙基本参数之间的相关性对渗流场随机性的影响, 另外还有其它因素也未考虑, 这将是今后的进一步的研究工作。

参考文献:

[1] 曹敦履. 裂隙岩石渗流的数学模型[R]. 武汉: 长江科学院, 1988. 146~ 149.
 [2] 扬静熙. 裂隙岩体渗流研究的若干问题[A]. 第四届全国渗流力学学术讨论会论文汇编[C]. 北京: 中国水利出版社, 1993. 169~ 175.
 [3] Sagar B, Rinchal A. Permeability of fractured rock: effect of fracture size and data uncertainties[J]. Water Resour Res, 1982, 18(2): 266~ 274.

[4] 曹敦履. 裂隙岩石渗流的 Monte-Carlo 模拟[J]. 长江科学院院报, 1989, (N): 68~ 74.
 [5] 陈征宙, 韦杰, 刘定恩, 等. 随机断裂网络的 Monte-Carlo 模拟研究[J]. 南京大学学报(自然科学), 1999, 35(6): 683~ 689.
 [6] Pinnaduwa H S, Kulatilake W. State-of-the-art in stochastic joint geometry modeling[A]. Cundall P A, et al. Key Questions in Rock Mechanics: Proceedings of the 29th US Symposium[C]. Rotterdam: A A Balkema, 1988. 215~ 229.
 [7] 杨延毅, 周维垣. 裂隙岩体的渗流- 损伤耦合分析模型及其工程应用[J]. 水利学报, 1991, (5): 18~ 27.
 [8] 刘俊生. 尾矿坝随机渗流研究及其在可靠度分析中的应用[D]. 南京: 河海大学, 1995.
 [9] Smith L, Freeze R A. Stochastic analysis of steady state ground-water flow in a bounded domain: two-dimension simulation[J]. Water Resour Res, 1979, 15(6): 1543~ 1559.