

流体饱和两相多孔介质动力反应分析的显式有限元法

Dynamic analysis of fluid-saturated porous media by using explicit finite element method

赵成刚, 王进廷, 史培新, 李伟华
(北方交通大学 土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘要: 根据 Biot 流体饱和两相多孔介质波动方程, 采用解耦技术, 提出了分析流体饱和两相多孔介质中动力反应的显式有限元法。根据所推公式, 编制了计算程序并进行了实例计算。计算结果与解析解对比, 两者符合非常好, 表明本文方法是处理流体饱和两相多孔介质动力问题的一种非常有效方法。

关键词: 流体饱和两相多孔介质; 显式有限元法; Biot 动力方程; 局部透射人工边界

中图分类号: O 357. 3; TU 435 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000- 4548(2001)02- 0178- 05

作者简介: 赵成刚, 男, 1955 年生, 博士后, 教授, 博士生导师。主要从事土动力学和地震工程学的研究。

ZHAO Cheng-gang, WANG Jir-ting, SHI Pei-xin, LI Wei-hua

(School of Civil Engineering and Architecture, Northern Jiao-tong University, Beijing 100044, China)

Abstract: An explicit finite element method for dynamic analysis of fluid-saturated porous media is developed. The formulae for the explicit finite element method are given. By using this method, computation effort and memory space can be reduced considerably. The present method is compared with analytical methods, and the degree of accuracy is satisfactory. It is shown that the method developed in this paper is a very effective method for dynamic analysis of fluid-saturated porous media.

Key words: fluid-saturated porous media; explicit finite element method; Biot dynamic equation; local transmitting artificial boundary

1 引言

在人类开发和利用地下资源、探索地球内部构造过程中, 以及在研究动力或地震作用下土体中结构物的反应或场地破坏等工程问题中都会涉及到两相饱和和多孔介质。Biot 于 1956 年建立了流体饱和两相多孔介质的波动方程^[1], 由于波动方程是固相与液相耦合的二阶偏微分方程组, 它很复杂, 只有在极少数特定边界条件下才能求得解析解。绝大多数饱和多孔介质波动问题都是采用数值方法求解, 特别是采用有限元法^[2]。目前用于求解饱和多孔介质波动问题的有限元方法基本都是隐式法^[3], 或隐-显式方法^[4]。当这些方法为时域解时, 存在如下缺点, 即在每一计算时间步长中都要解一联立线性方程组。当求解问题的自由度较少时, 采用这些方法求解还可适用, 一旦问题复杂或自由度很多时, 其计算工作量将很大, 因此极大地限制了它的应用和发展, 目前还极少看到它在工程上应用的文章, 在处理非线性问题时更加不便。为克服上述缺点提出了求解 Biot 饱和多孔介质波动方程的显式有限元解法。该方法的特点是: 采用了解耦技术, 因而只求单刚而不组成总刚矩阵, 不需求解联立方程组, 并且某点的运动量仅与周围几个节点有关, 而与其它节点无关。因而具有节省内存空间和提高计算速度等优点。

该方法与局部透射人工边界相结合^[6], 形成了可以分析饱和多孔介质波动问题的具有解耦特征的完整而有效方法, 可以方便地编制程序并进行计算。工程应用表明, 对 1600 个节点的流体饱和多孔介质动力问题进行数值计算, 分 3000 步进行动力计算, 在主频为 200 的 586 微机上处理时间仅为 270 s。该方法还可以方便地用于处理非线性问题, 这一问题将另文加以论述。

2 波动方程

Biot 给出的流体饱和两相多孔介质波动方程为^[1]

$$\begin{cases} N \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla[(A + N)e + Q\epsilon] = (\rho_{11}\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{12}\ddot{\mathbf{U}}) + b(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{U}) \\ \nabla[Qe + R\epsilon] = (\rho_{12}\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{22}\ddot{\mathbf{U}}) - b(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{U}) \end{cases} \quad (1)$$

式中 \mathbf{u} 和 \mathbf{U} 分别为固相和液相位移; $e = \nabla \cdot \mathbf{u}$; $\epsilon = \nabla \cdot \mathbf{U}$; $\rho_{11} = \rho_1 + \rho_a$; $\rho_{22} = \rho_2 + \rho_a$; $\rho_{12} = -\rho_a$, 其中 $\rho_1 = (1 - n)\rho_s$, $\rho_2 = n\rho_l$, ρ_s 为固相质量密度, ρ_l 为液相质量密度, ρ_a 为液固两相耦合质量密度(该质量密度难以测定, 在有限元分析中常取 $\rho_a = 0$); b 是与渗流有关的系数, $b = \zeta n^2/k$, ζ 为流体滞变系数, n 为孔隙率, k 为渗透系数; 系数 N, A, R, Q 均由实验计算给出。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59780044)

收稿日期: 2000- 07- 24

3 显式有限元方程的建立

考虑二维情况, 并按饱和流体多孔介质动力有限元的通常处理方法^[3], 取 $\rho_a = 0$.

3.1 用矩阵形式表示波动方程

定义如下矩阵:

$$L^T = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \end{vmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{vmatrix} U_x \\ U_y \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \end{vmatrix} = L^T \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (3)$$

$$\nabla e = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \end{vmatrix} = L^T \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (4)$$

同理

$$\nabla \varepsilon = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) = L^T \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{L} \mathbf{U} \quad (5)$$

把式(2)~(5)代入方程(1), 得到用矩阵形式表达的流体饱和两相多孔介质波动方程为

$$L^T D_1 L \mathbf{u} + L^T D_2 L \mathbf{U} = \rho_{11} \ddot{\mathbf{u}} + b(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{U}) \quad (6)$$

$$L^T D_2 L \mathbf{u} + L^T D_3 L \mathbf{U} = \rho_{22} \dot{\mathbf{U}} - b(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{U})$$

其中 $D_1 = \begin{vmatrix} A + 2N & A & 0 \\ A & A + 2N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} Q & Q & 0 \\ Q & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$

$$D_3 = \begin{vmatrix} R & R & 0 \\ R & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3.2 建立有限元方程的列式

应用 GALERKIN 法对式(6)进行离散, 共划分成 m 个单元. 设 N 为单元位移形函数矩阵, 则

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}^e = N \mathbf{u}_e; & \mathbf{U}^e = N \mathbf{U}_e \\ \mathbf{f}_u^e = N \mathbf{f}_u; & \mathbf{f}_U^e = N \mathbf{f}_U \end{vmatrix} \quad (7)$$

式中 $\mathbf{u}_e, \mathbf{U}_e$ 分别为单元 e 的节点固相和液相位移; $\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_U$ 分别为作用在单元 e 的节点固相和液相外力; $\mathbf{u}^e, \mathbf{U}^e$ 分别为与单元 e 有关的节点固相和液相位移; $\mathbf{f}_u^e, \mathbf{f}_U^e$ 分别为与单元 e 有关的节点固相和液相外力.

根据文献[5]直接写出 GALERKIN 弱式得

$$\begin{vmatrix} \sum_e \int_{\Omega} N^T \rho_{11} \dot{\mathbf{u}}_e dx dy + \sum_e \int_{\Omega} N^T b N (\dot{\mathbf{u}}_e - \mathbf{U}_e) dx dy + \\ \sum_e \int_{\Omega} \mathbf{B}^T D_1 \mathbf{B} \mathbf{u}_e dx dy + \sum_e \int_{\Omega} \mathbf{B}^T D_2 \mathbf{B} \mathbf{U}_e dx dy = \sum_e \int_{\Gamma} N^T \mathbf{f}_u^e d\Gamma \\ \sum_e \int_{\Omega} N^T \rho_{22} \dot{\mathbf{U}}_e dx dy - \sum_e \int_{\Omega} N^T b N (\dot{\mathbf{u}}_e - \mathbf{U}_e) dx dy + \\ \sum_e \int_{\Omega} \mathbf{B}^T D_2 \mathbf{B} \mathbf{u}_e dx dy + \sum_e \int_{\Omega} \mathbf{B}^T D_3 \mathbf{B} \mathbf{U}_e dx dy = \sum_e \int_{\Gamma} N^T \mathbf{f}_U^e d\Gamma \end{vmatrix} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{B} = \mathbf{L} N$.

3.3 划分网格

将平面区域 Ω 剖分成 m 个线性四边形单元, 共有 k 个节点. 把整体坐标转化为局部坐标后, 在二维平面取任一单元局部坐标系, 如图 1 所示.

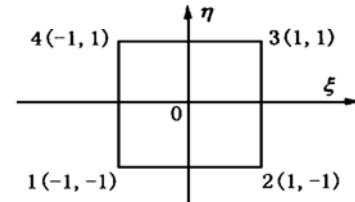


图 1 局部坐标系

Fig. 1 Local coordinate system

式(7)中 e 单元 4 个节点固相和液相位移可表示为

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_e^T = [u_1^T, u_2^T, u_3^T, u_4^T] \\ \mathbf{u}_i^T = [u_{ix}, u_{iy}] \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ \mathbf{U}_e^T = [U_1^T, U_2^T, U_3^T, U_4^T] \\ \mathbf{U}_i^T = [U_{ix}, U_{iy}] \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{vmatrix} \quad (9)$$

式中 u_{ix}, U_{ix} 和 u_{iy}, U_{iy} 分别为 e 单元中第 i 节点 x 方向和 y 方向的固相和液相位移.

式(7)中的 e 单元的固相和液相边界力可表示为

$$\begin{vmatrix} \mathbf{f}_u^T = [f_{u_1}^T, f_{u_2}^T, f_{u_3}^T, f_{u_4}^T] \\ \mathbf{f}_{u_i}^T = [f_{u_{ix}}, f_{u_{iy}}] \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ \mathbf{f}_U^T = [f_{U_1}^T, f_{U_2}^T, f_{U_3}^T, f_{U_4}^T] \\ \mathbf{f}_{U_i}^T = [f_{U_{ix}}, f_{U_{iy}}] \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{vmatrix} \quad (10)$$

式中 $f_{u_{ix}}, f_{U_{ix}}$ 和 $f_{u_{iy}}, f_{U_{iy}}$ 分别为 e 单元中第 i 节点 x 方向和 y 方向的固相和液相外力.

在有限元中某一节点的物理量可以用周围邻近节点的物理量表示, 即只有相邻节点对该节点有贡献. 考虑已剖分完毕的某一系统中的某一节点, 令该节点为节点 1. 图 2 给出了节点 1 和与它直接相邻的节点所构成的局部节点系. 此节点系包含 9 个节点, 节点编号用下标表示. 这表明所考虑的系统中的任一节点都可令其为节点 1, 其相邻节点都可按图 2 表示, 计算都是按节点的顺序, 相对单独进行.

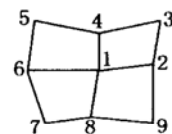


图 2 局部节点系

Fig. 2 Local node system

在图 2 所示的局部节点系中, 节点的编号 i 和图中 4 个单元中的某一单元 e 的节点编号 j 之间可以规定某种对应关系 $i = i(j)$. 因此有

$$u_i = u_{i(j)} = u_j^e; \quad U_i = U_{i(j)} = U_j^f \quad (11)$$

这里规定,图2局部节点系中的节点1,也是其中任一单元e的节点1,即图2中每一单元都以节点1做为第一节点。采用解耦技术得出式(8)中关于节点1的方程为

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{u1j}^L \dot{u}_j^L + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{1j}^L (\dot{u}_j^L - \dot{U}_j^L) + \\ & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{uu1j}^L u_j^L + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{uU1j}^L U_j^L = \sum_{L=1}^4 f_{u1}^L \\ & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{U1j}^L \dot{U}_j^L - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{1j}^L (\dot{u}_j^L - \dot{U}_j^L) + \\ & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{Uu1j}^L u_j^L + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UU1j}^L U_j^L = \sum_{L=1}^4 f_{U1}^L \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中 L 代表不同单元对节点1的影响,因只有节点1周围4个单元对其具有影响,而其它单元没有影响,所以只给出4个单元的计算结果;j代表同一单元内4个节点的影响。式(12)与式(8)完全等价,只不过表达的形式不同。方程式(12)是针对每一节点(即节点1)而建立的局部节点动力方程,而不象一般的有限元方法建立的整体方程(即式(8)),其目的是可以建立类似有限差分的显式有限元方法,因而无需建立整体联立方程组。

为简化计算作如下假定:同一单元内惯性力的变化可以忽略不计,即假定单元内惯性力为常量。根据这一假定有下式成立:

$$\ddot{u}_j^e = \ddot{u}_1; \quad \ddot{U}_j^f = \ddot{U}_1 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{u1j}^L \ddot{u}_j^L = \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{u1j}^L \ddot{u}_1 = M_{u1} \ddot{u}_1 \\ & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{U1j}^L \ddot{U}_j^L = \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{U1j}^L \ddot{U}_1 = M_{U1} \ddot{U}_1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} & M_{uj}^L = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_{11} N_i N_j |J| d\xi d\eta \\ & M_{Uj}^L = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_{22} N_i N_j |J| d\xi d\eta \\ & C_{ij}^L = \iint_{\Omega} b N_i N_j dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 b N_i N_j |J| d\xi d\eta \\ & K_{uuj}^L = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_j |J| d\xi d\eta \\ & K_{uUj}^L = K_{Uuj}^L = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_j |J| d\xi d\eta \\ & K_{Uuj}^L = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_3 \mathbf{B}_j |J| d\xi d\eta \\ & f_{u1}^L = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_1 \tilde{\mathbf{T}}_s dr; f_{U1}^L = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_1 \left[\begin{matrix} n\pi \\ n\pi \end{matrix} \right] dr; \tilde{\mathbf{T}}_s = \left[\begin{matrix} \tilde{T}_x \\ \tilde{T}_y \end{matrix} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中 \tilde{T}_x, \tilde{T}_y 分别为L单元边界固相x方向和y方向的分布外力; π 为边界孔隙水压力。

式(12)是由式(8)采用解耦技术经推导而得到的

关于节点1的有限元列式。

3.4 推导内部节点动力反应表达式

采用有限元法处理无限域问题时,必须引入人工边界,因此有限元网格中的节点就被分为两类节点,即人工边界节点和内部节点,人工边界节点运动量的表达式可由内部节点的运动量表示。

当时间步数为p时(时间等于pΔt),把式(14)代入式(12),得

$$\left. \begin{aligned} & M_{u1} \dot{u}_1^p + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{1j}^L (\dot{u}_j^{L,p} - \dot{U}_j^{L,p}) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{uu1j}^L u_j^{L,p} + \\ & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{uU1j}^L U_j^{L,p} = \sum_{L=1}^4 f_{u1}^{L,p} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} & M_{U1} \dot{U}_1^p - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{1j}^L (\dot{u}_j^{L,p} - \dot{U}_j^{L,p}) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{Uu1j}^L u_j^{L,p} + \\ & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UU1j}^L U_j^{L,p} = \sum_{L=1}^4 f_{U1}^{L,p} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

当时间步数为p+1时(时间等于(p+1)Δt),将式(14)代入式(12),得到 $\sum_{L=1}^4 f_{u1}^{L,p+1}$ 和 $\sum_{L=1}^4 f_{U1}^{L,p+1}$ 的表达式,与式(16) (17) 叠加,得

$$\left. \begin{aligned} & M_{u1} (\dot{u}_1^{p+1} + \dot{u}_1^p) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{1j}^L (\dot{u}_j^{L,p+1} + \dot{u}_j^{L,p}) - \\ & (U_j^{L,p+1} + U_j^{L,p}) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{uu1j}^L (u_j^{L,p+1} + u_j^{L,p}) + \\ & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{uU1j}^L (U_j^{L,p+1} + U_j^{L,p}) = \sum_{L=1}^4 (f_{u1}^{L,p+1} + f_{u1}^{L,p}) \\ & M_{U1} (\dot{U}_1^{p+1} + \dot{U}_1^p) - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{1j}^L (\dot{u}_j^{L,p+1} + \dot{u}_j^{L,p}) - \\ & (U_j^{L,p+1} + U_j^{L,p}) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{Uu1j}^L (u_j^{L,p+1} + u_j^{L,p}) + \\ & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UU1j}^L (U_j^{L,p+1} + U_j^{L,p}) = \sum_{L=1}^4 (f_{U1}^{L,p+1} + f_{U1}^{L,p}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

由关于时间的中心差分法可知

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{W}_i^p = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{W}_i^{p+1} - \mathbf{W}_i^{p-1}) \\ & \dot{\mathbf{W}}_i^p = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{W}_i^{p+1} - 2\mathbf{W}_i^p + \mathbf{W}_i^{p-1}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中 Δt 为时间步长;p 为步数。由式(19)可得

$$\dot{\mathbf{W}}_i^p = \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{W}_i^{p+1} - \mathbf{W}_i^p) - \frac{2}{\Delta t} \mathbf{W}_i^p \quad (20)$$

式中 $\mathbf{W}_i^q, \dot{\mathbf{W}}_i^q$ 分别为节点i在q时刻的位移、速度和加速度。为简化表达, $\mathbf{W} = \mathbf{u}, \mathbf{U}$ (W既可表示固相位移 \mathbf{u} ,也可表示液相位移 \mathbf{U})。q = p - 1, p, p + 1 (q和p均表示时间步数)。

把式(20)代入式(18),令节点1为节点i,得

$$\begin{aligned}
 u_i^{p+1} &= u_i^p + \Delta t \dot{u}_i^p - \frac{\Delta t^2}{2} M_{ui}^{-1} \left| \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L \cdot \right. \\
 &\quad \left. (\dot{u}_j^{L,p} - \dot{U}_j^{L,p}) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{uu\bar{ij}}^L u_j^{L,p} + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{L=1}^4 \sum_{i=1}^4 K_{u\bar{U}\bar{ij}}^L U_j^{L,p} - \sum_{L=1}^4 f_{ui}^{L,p} \right| \\
 U_i^{p+1} &= U_i^p + \Delta t \dot{U}_i^p - \frac{\Delta t^2}{2} M_{Ui}^{-1} \left| - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L \cdot \right. \\
 &\quad \left. (\dot{u}_j^{L,p} - \dot{U}_j^{L,p}) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{u\bar{U}\bar{ij}}^L u_j^{L,p} + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{\bar{U}\bar{U}\bar{ij}}^L U_j^{L,p} - \sum_{L=1}^4 f_{\bar{U}i}^{L,p} \right|
 \end{aligned} \quad (21)$$

Newmark 常平均加速度法采用了如下假定:

$$\frac{\dot{W}_i^{p+1} + \dot{W}_i^p}{2} = \frac{W_i^{p+1} - W_i^p}{\Delta t} \quad (22)$$

$$W_i^{p+1} = W_i^p + \Delta t \dot{W}_i^p + \frac{1}{4} \Delta t^2 (\dot{W}_i^{p+1} + \dot{W}_i^p) \quad (23)$$

由式(22)和(23), 可得

$$\frac{W_i^{p+1} + W_i^p}{2} = \frac{W_i^{p+1} - W_i^p}{\Delta t} \quad (24)$$

式(22) ~ (24) 中符号的意义与式(19) ~ (20) 相同. 把式(22)和式(24)代入式(12), 就可以得到速度表达式为

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_i^{p+1} &= \dot{u}_i^p - M_{ui}^{-1} \left| \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L \right| (u_j^{L,p+1} - u_j^{L,p}) - \\
 &\quad \left. (U_j^{L,p+1} - U_j^{L,p}) \right| + \frac{\Delta t}{2} \left| \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{uu\bar{ij}}^L \cdot \right. \\
 &\quad \left. (\dot{u}_j^{L,p+1} + \dot{u}_j^{L,p}) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{u\bar{U}\bar{ij}}^L (\dot{U}_j^{L,p+1} + \right. \\
 &\quad \left. \dot{U}_j^{L,p}) - \sum_{L=1}^4 (f_{ui}^{L,p+1} + f_{ui}^{L,p}) \right| \\
 \dot{U}_i^{p+1} &= \dot{U}_i^p - M_{Ui}^{-1} \left| \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L \right| - (u_j^{L,p+1} - u_j^{L,p}) + \\
 &\quad \left. (U_j^{L,p+1} - U_j^{L,p}) \right| + \frac{\Delta t}{2} \left| \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{u\bar{U}\bar{ij}}^L \cdot \right. \\
 &\quad \left. (\dot{u}_j^{L,p+1} + \dot{u}_j^{L,p}) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{\bar{U}\bar{U}\bar{ij}}^L (\dot{U}_j^{L,p+1} + \right. \\
 &\quad \left. \dot{U}_j^{L,p}) - \sum_{L=1}^4 (f_{\bar{U}i}^{L,p+1} + f_{\bar{U}i}^{L,p}) \right|
 \end{aligned} \quad (25)$$

由式(22)可解得加速度的表达式为

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_i^{p+1} &= -\ddot{u}_i^p + 2 \frac{\dot{u}_i^{p+1} - \dot{u}_i^p}{\Delta t} \\
 \ddot{U}_i^{p+1} &= -\ddot{U}_i^p + 2 \frac{\dot{U}_i^{p+1} - \dot{U}_i^p}{\Delta t}
 \end{aligned} \quad (26)$$

式(21)和式(25) (26) 组成了一个求解 Biot 流体

饱和两相多孔介质波动方程式(1) 的自起步有限元的显式差分格式. 由式(21) 可以看出, u_i^{p+1} 和 U_i^{p+1} 可以用前一步 p 的运动量求解; 然后式(25) 中的 \dot{u}_i^{p+1} 和 \dot{U}_i^{p+1} 可以由 u_i^{p+1} 和 U_i^{p+1} 以及前一步 p 的运动量求解; 最后, 式(26) 中的 \ddot{u}_i^{p+1} 和 \ddot{U}_i^{p+1} 可以由 \dot{u}_i^{p+1} 和 \dot{U}_i^{p+1} 以及前一步 p 的加速度求解. 因而, 根据式(21)、(25) (26) 就可以利用前一时刻的反应求得此一时刻点的动力反应.

4 人工边界

根据 Biot 动力理论可知饱和多孔介质中存在三种波(P_I, P_{II} 和 S 波), 每一种波都以其固有的波速向前传播. 也就是说, 无论是液相还是固相, 对某一特定的波来说(例如 P_I 波), 都是以同一波速沿同一方向向前传播. 但固相位移与液相位移具有固定的关系. 基于文献[6] 中所提供的单相介质多次透射人工边界, 提出饱和多孔介质的固相位移和液相位移分别以同一波速通过人工边界, 在固相和液相分别应用文献[6] 给出的多次透射人工边界, 求出边界节点上固相和液相的散射位移场.

5 计算步骤

利用建立的显式有限元解法, 计算动力反应的步骤总结如下:

- (1) 引入人工边界, 给出计算区域.
- (2) 输入初始位移场或作用力场.
- (3) 将计算区划为有限元网格, 用有限元节点系代替连续介质区.
- (4) 计算准备. ①形成集中于每一节点的质量; ②形成每一节点的计算刚度和阻尼; ③令 $p = 0$ 和 $p = 0$ 时刻以前的若干时刻的节点位移为零.
- (5) 计算 $p, p + 1$ 时刻的节点外力.
- (6) 计算 $p + 1$ 时刻的动力反应. ①用式(21) 计算每一内部节点 $t + \Delta t(p + 1)$ 步时刻的位移反应, 利用 $u_s = u - u_1$ (u_1 为入射位移场), 可得人工边界散射位移场, 计算人工边界上 $p + 1$ 时刻的散射位移, 然后利用 $u = u_s + u_1$ 可计算出人工边界上的总位移场; ②用式(25) 计算每一内部节点 $t + \Delta t(p + 1)$ 步时刻的速度反应, 与步骤(6) 中 ①同理可得人工边界上的总速度场; ③用式(26) 计算每一内部节点 $t + \Delta t(p + 1)$ 步时刻的加速度反应, 与步骤(6) 中 ①同理可得人工边界上的总加速度场.
- (7) 循环步骤(5) (6), 计算区域网格上所有节点在不同时刻的动力反应.

表1 材料特性参数总合表

Table 1 Basic properties of material

A/Pa	N/Pa	n	$\rho_s / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$\rho_f / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	Q/Pa	R/Pa	$k / (\text{cm} \cdot \text{s}^{-1})$
2.38×10^7	1.25×10^7	0.333	3101	2977	3060	1.54×10^9	1.54×10^9	0.004883

6 算例

力学模型为一半无限空间, 在自由表面作用满布均匀阶梯荷载, 即荷载在零时刻前幅值为零, 大于零时刻, 幅值恒为 σ_0 , 孔隙水压 $\pi(0, t)$ 在自由边界上恒为零, 即排水边界。计算参数见表 1。利用本文方法, 引入人工边界并离散后, 可得到图 3 所示模型。其横向取 19 m, 竖向取 49 m, $\Delta x = 1 \text{ m}$, $\Delta y = 1 \text{ m}$, 共划分 931 个单元, 1000 个节点。数值计算结果与解析解作了比较, 见图 4 和图 5。

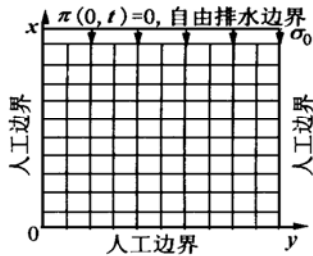


图3 有限元网格划分示意图

Fig. 3 The finite element model

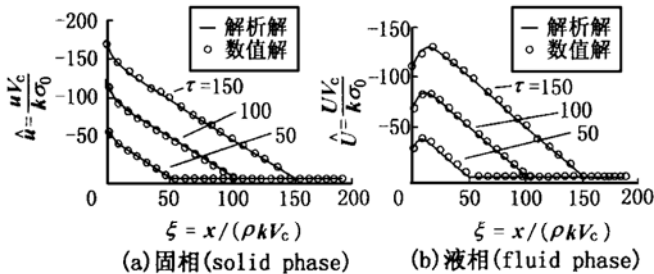


图4 不同时刻动力反应

Fig. 4 Dynamic response at different time

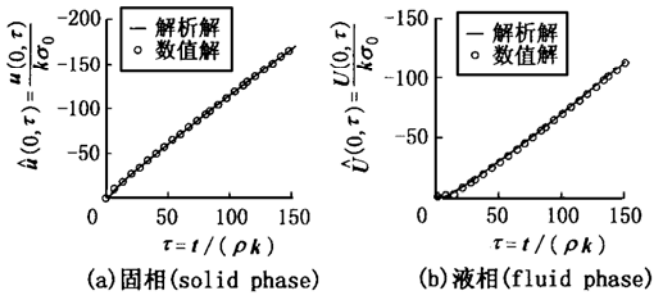


图5 自由面位移比较

Fig. 5 The displacement on free surface

图 4 中以 $\xi = x / (\rho k V_c)$ (ρ 为流体饱和两相多孔介质的总密度, k 为渗透率, V_c 为流体与固体系统内如能以某种方式阻止流体与固体之间发生相对运动的条件下的膨胀波速度) 为横坐标, 以位移乘以 $V_c / (k \sigma_0)$ 为纵坐标绘制了 $\tau = t / (\rho k)$ 在 $\tau = 50, 100, 150$ 三时刻的位移数值解和解析解。图 5 绘制了自由表面固相和液相位移的数值解和解析解。从图中可看出两者符合较好, 表明本文方法具有较高的计算精度。

7 结 语

导出了流体饱和两相多孔介质动力反应分析的一种高效显式有限元方法的计算公式。给出了在表面阶梯荷载作用下, 该方法与解析解的对比计算分析。计算表明, 本文所述方法具有节省计算内存和计算速度快的优点, 为对流体饱和两相介质动力反应进行数值模拟提供了一种有效方法。但是也存在数值计算的稳定性问题, 关于这一方法的数值稳定性以及它的工程应用, 限于篇幅, 将另文加以讨论。

参考文献:

- [1] Biot M A. Theory of propagation of elastic wave in fluid-saturated porous solid[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1956, 28(2): 168~ 178.
- [2] 赵成刚, 等. 固体-流体多相孔隙介质中的波动理论及其数值模拟进展[J]. 力学进展, 1998, 28(1): 83~ 92.
- [3] Zienkiewicz O C, et al. Dynamic behavior of saturated porous media, the generalized Boit formulation and its numerical solution [J]. Int J Numer Anal Methods Geomech, 1984(8): 71~ 96.
- [4] Prevost J H. Wave propagation in fluid-saturated porous media: An efficient finite element procedure [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1985, 4(4): 183~ 201.
- [5] Zienkiewicz O C, et al. 有限元与近似法[M]. 北京: 人民交通出版社, 1989.
- [6] Liao Z P, Wong H L. A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1984, 3(4): 176~ 183.
- [7] Simon B R et al, An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids[J]. Int J Numer Anal Methods Geomech, 1984(8): 381~ 398.