

桩(土)与承台组合结构罚有限元分析*

Penalty FEM analysis of combined structure of pile (soil) and platform

安关峰¹, 徐斌²

(1. 中国地质大学 工程学院, 湖北 武汉 430074; 2. 上海浦东路桥建设股份有限公司, 上海 201203)

摘要: 采用板模拟承台、实体单元模拟桩与土, 通过建立连接板单元与三维实体单元的罚单元解决了两个不同单元连接问题, 数值检验证明所建罚单元能有效确保不同单元连接处的位移协调问题。在此基础上计算了带台单桩的蠕变沉降、桩身轴力与桩侧摩阻力, 得到了一些有益的结论。

关键词: 板单元; 三维实体单元; 罚单元

中图分类号: TU 433 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2000)06-0686-05

作者简介: 安关峰, 男, 1970 年生, 中国地质大学工程学院在站博士后, 现从事桩基蠕变与隧道长期稳定性研究工作。

AN Guan-feng¹, XU Bin²

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Pudong Road & Bridge Col., Ltd., Shanghai 201203, China)

Abstract: The 3D-FEM software has been developed for pile foundation. The solid element has been employed to simulate soil and pile, and plate element is used to simulate platform of pile foundation. Penalty element is used to guarantee the harmony of displacement on the nodes which belong to not only solid element but also plate element. The numerical check has proved that the built penalty element is quite effective. On the above base, the software has been employed to analyze the creep settlement, axial stress and friction stress of pile foundation, and some useful conclusions have been drawn.

Key words: plate element; solid element; penalty element

1 引言*

在桩基沉降有限元分析中, 不可避免地要遇到桩(土)与承台的连接问题, 大部分处理方式是将它们一起进行实体剖分。本文考虑到桩土与承台的几何特点, 将桩土用实体单元来模拟, 而用板单元模拟承台, 更具体分析了桩(土)和承台的受力特点与变形。

2 板单元

2.1 基本假定

明德林板的线弹性理论有以下基本假定^[1]:

- (1) 与板的厚度相比较, 其挠度 w 是微小的;
- (2) 垂直于板中面的应力可忽略不计;
- (3) 变形前垂直于中面的法线, 在变形后不一定垂直于中面。

2.2 位移插值函数

有限元分析中, 承台被离散为单元。将承台视为厚板时, 承台的变形可由中面挠度 w 及其法线绕 x 轴和 y 轴的转角 θ_x 和 θ_y 表述。单元类型选为 8 结点等参单元(Serendipity 单元, 见图 1)时, 位移插值函数可写为

$$[u] = \sum_{i=1}^n [N_i][d_i] \quad (1)$$

式中 $n=8$, 为单元结点数; $[d_i] = [w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}]^T$,

为单元结点位移向量; $[N_i] = N_i I$, 其中 $[I]$ 为 3×3 阶单位矩阵, N_i 为插值函数, 其计算式为

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \eta_i)(1 + \xi_i)(\xi_i + \eta_i - 1) \quad \text{角结点}$$

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2} (1 + \eta_i)(1 - \eta_i^2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1 + \xi_i)(1 - \xi_i^2) \quad \text{边结点}$$

$[u] = [w, \theta_x, \theta_y]^T$, 为单元任意点位移向量。

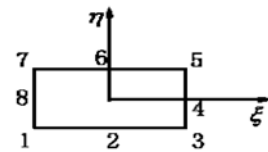


图 1 8 结点等参单元

Fig. 1 8-node isoparameter element

2.3 厚板任意点的位移与内力

对单元所在范围厚板沿板厚任意点的位移有

$$\begin{bmatrix} w \\ u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & -zN_i & 0 \\ 0 & 0 & -zN_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad (2)$$

而与上述位移相应的应变为

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

故有

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} 0 & -z & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -z & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -z & \frac{\partial N_i}{\partial y} & -z & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$= \sum_{i=1}^8 z [B_{fi}] [d_i]$$

其中 $[B_{fi}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$ (5)

同理可得

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^8 z [B_{si}] [d_i] \quad (7)$$

其中 $[B_{si}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}$ (8)

由式(4)和(7)可得

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 z \begin{bmatrix} [B_{fi}] \\ [B_{si}] \end{bmatrix} [d_i] \quad (9)$$

式中 $[\varepsilon] = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$; $[\varepsilon_s] = [\gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T$ 。

由式(9)及明德林板几何方程可得应变合成量(即曲率)的表达式:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_{xy} \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\varepsilon] \\ [\varepsilon_s] \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 [B_i] [d_i] \quad (10)$$

式中 $[\varepsilon] = [X_x \ X_y \ X_{xy}]^T$; $[\varepsilon_s] = [\varphi_x \ \varphi_y]^T$; $[B_i] = [B_{fi} \ B_{si}]^T$ 。

将其代入应力-应变关系矩阵,可得应力合力(即弯矩)的表达式:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] = [D] \left[\sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} [B_{fi}] \\ [B_{si}] \end{bmatrix} [d_i] \right]$$

$$= [D] \left(\sum_{i=1}^8 [B_i] [d_i] \right) \quad (11)$$

2.4 单元刚度矩阵

由虚位移原理,可得板单元刚度矩阵的表达式:

$$[K_{ij}] = \iiint_{\Omega} B_i^T [D] B_j d\Omega$$

$$= \iint \int_{-1}^1 \frac{t^3}{12} [B_{fi}]^T [D_f] [B_{fi}] + t [B_{si}]^T [D_s] [B_{sj}] dx dy \quad (12)$$

式中括号内第一项为弯曲刚度矩阵,第二项为剪切刚度矩阵。令

$$[H] = \frac{t^3}{12} [B_{fi}]^T [D_f] [B_{fi}] + t [B_{si}]^T [D_s] [B_{sj}] \quad (13)$$

则由高斯积分可将式(12)改写为

$$[K_{ij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [H] J d\xi d\eta \quad (14)$$

式中 $|J|$ 为雅可比行列式。

3 三维实体单元

由于 20 结点等参单元边界可很好的拟合曲面边界且计算精度很高^[2],故本文采用之。

3.1 位移插值

设已知单元结点 I 的位移向量 $\delta_i = [u_i, v_i, w_i]^T$, $i = 1 \sim 20$,则单元中任一点的位移分量,可按结点位移分量进行插值计算

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \\ \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i \\ \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中形函数的表达式如下:

$$\begin{bmatrix} N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \times \\ \quad (\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) & \text{角点} \\ \xi = 0, \eta = \pm 1, \zeta = \pm 1 & \text{典型边中点} \\ N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \end{bmatrix}$$

其中 $\xi_0 = \xi \xi$, $\eta_0 = \eta \eta$, $\zeta_0 = \zeta \zeta$ 。

3.2 应变矩阵

单元中应力点(高斯点)的应变向量与结点位移向量的关系为

$$\varepsilon = B \delta \quad (16)$$

式中 $\varepsilon = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{xy}]^T$; $\delta =$

$[u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_n \ v_n \ w_n]$, 其中 n 为单元结点数; $B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_n]$, 其中对应于每个结点,

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

3.3 单元刚度矩阵

根据最小位能原理或虚功原理, 可以推导出单元刚度矩阵的表达式

$$K^e = \int_V B^T DB dx dy dz \quad (18)$$

其中连接结点 i, j 的子矩阵 $K_{ij} = \iiint_V B_i^T B_j dx dy dz$, 根据坐标变换, 右端积分可以在母单元中进行, 其中 $dV = dx dy dz = |J| d\xi d\eta d\zeta$, 且 $K_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$.

对于简单几何形状的子单元(正六面体), 上式可以直接积分运算。实际上子单元的形状比较复杂, 难以用显示表示 $G(\xi, \eta, \zeta)$, 因此必须采用数值积分, 例如高斯三重求积分法。

4 连接条件及罚单元

实体单元与板单元之间连接必须满足变形协调条件。我们把这类协调条件看成是一种约束, 而且罚单元方法保证来实现, 其一般原理简述如下^[3]:

设结构有 m 个约束, 涉及 n 个 ($n > m$) 变量, $\{\delta\} = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]^T$, 而约束条件可表示为

$$[B']\{\delta\} = \{C'\} \quad (19)$$

式中 $[B']$, $\{C'\}$ 是与 $\{\delta\}$ 无关的常数矩阵, 则罚单元矩阵为

$$[K'] = [B']^T [D'] [B'] \quad (20)$$

式中 $[D']$ 为罚矩阵, 通常取 $[D'] = G_0 [I_m]$, $[I_m]$ 为 $m \times m$ 阶单位矩阵, G_0 为罚因子, 一般取为邻近单元矩阵最大对角元素的 $10 \sim 10^3$ 。于是关键问题是如何根据具体的变形协调条件推出矩阵 $[B']$ 。

以 I 点为例, 满足的约束方程为

$$\begin{cases} w'_i - w_i = 0 \\ \frac{L}{2} \theta'_x - u_i = 0 \\ \frac{L}{2} \theta'_y - v_i = 0 \end{cases} \quad (21)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ w'_i \\ \theta'_x \\ \theta'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[B'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

其它结点都可写出类似形式矩阵方程。

将式(23)代入式(20)就可得到所需罚刚度矩阵。将罚单元的刚度矩阵按通常方法组装到总刚度矩阵中去即可。

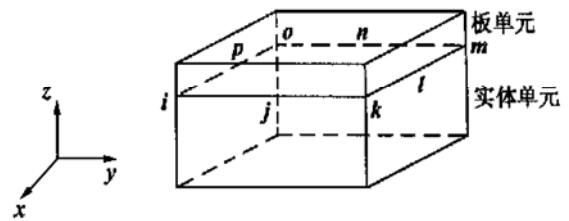


图2 板单元与实体单元连接

Fig. 2 Connection between plate element and solid element

5 时间步长确定

本文中对土体采用非线性弹粘塑性本构关系, 其具体表达式可参见文献[4], 时间步长按经验法计算。采用变步长, 时间步长的大小用一个因子来控制, 它限定最大的等效粘塑性应变增量在总有效应变中所占的部分, 因此

$$\Delta \bar{\epsilon}_{vp}^n = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_{ij}^n)_{vp} (\dot{\epsilon}_{ij}^n)_{vp}} \Delta t_n \leq \bar{\epsilon}^n \quad (24)$$

上述方法中的另一种方案则按照

$$\sqrt{(\dot{\epsilon}_{ij}^n)_{vp}} \Delta t_n \leq \tau \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^n} \quad (25)$$

来限定时间步长, 其中 $\dot{\epsilon}_{ij}^n$ 是总应变的第一不变量, 而 $(\dot{\epsilon}_{ij}^n)_{vp}$ 是粘塑性应变率的第一不变量。对于等参元, 所有应变值只在高斯积分点上计算, 因此, 必须对每一高斯积分点算出满足式(24)或(25)的 Δt_n 来, 并把最小值用于分析。对于显式时间步进法时间增量参

表 1 第一次迭代后垂向位移比较

Table 1 Vertical displacement after 1th iteration

mm

节点号	1491	1492	1493	1494	1495	1496	1497
垂向位移	61.76129869	61.74091663	61.73030884	61.72738889	61.73030882	61.74091659	61.76129862
节点号	1709	1710	1711	1712	1713	1714	1715
垂向位移	61.76129870	61.74091663	61.73030884	61.72738889	61.73030882	61.74091659	61.76129863

表 2 第四次迭代后垂向位移比较

Table 2 Vertical displacement after 4th iteration

mm

节点号	1491	1492	1493	1494	1495	1496	1497
垂向位移	62.21736195	61.94694085	61.81088088	61.77048673	61.80261603	61.92556631	62.19118323
节点号	1709	1710	1712	1713	1714	1715	1716
垂向位移	62.21736198	61.94694087	61.81088089	61.77048674	61.80261604	61.92556633	62.19118327

数 τ 的值在 $0.01 < \tau < 0.15$ 的范围内即能得到精确的结果。对于隐式法 τ 在 10 以内时结果是稳定的。

位移进行比较, 列于表 1, 表 2。

6 桩基沉降计算

6.1 计算几何模型与荷载施加

本文取桩边长 1.0 m, 桩长 18.0 m, 承台 3.0 m × 3.0 m × 0.4 m。考虑桩水平影响范围, 在 X 方向为 14.0 m, 在 Y 方向为 14.0 m, 在 Z 方向取 2 倍桩长, 计 36.0 m。剖分得 1748 节点, 359 单元, 其中板单元 9 个, 接触单元布置在桩侧用以模拟桩土接触, 计 16 个。剖分见图 3。荷载采用均布荷载。

由表 1 和表 2 看出, 罚单元节点垂向位移在小数点后第 8 位后才出现差异, 可见本文所建的罚单元能很好地地保证连接处变形的协调。

(2) 地表位移

图 4 和图 5 分别是单桩地表沉降曲面与带承台单桩地表沉降曲面。可以看出由于承台的影响, 使得带承台单桩地表沉降盆范围比单桩地表沉降盆的范围大。但是桩端沉降值有所减小(见图 6)。另一方面由于承台的存在, 使土体承担部分荷载, 桩身轴力减小(见图 7), 所以带承台单桩能提高桩承载能力。

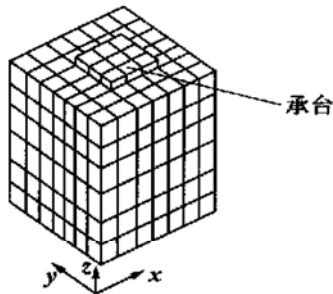


图 3 有限元网格剖分

Fig. 3 FEM netting

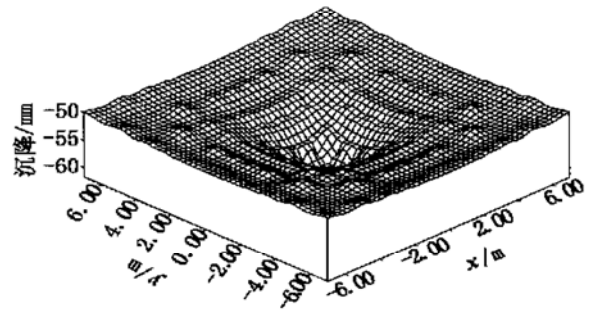


图 4 单桩地表沉降曲面

Fig. 4 Ground surface settlement of single pile

6.2 材料物理参数

土体计算参数^[4] $E_H = 2167 \text{ kPa}$, $\mu = 0.3$, $E_1 = 2597 \text{ kPa}$, $E_2 = 2062 \text{ kPa}$, $\eta_1 = 1070.0 \text{ kPa} \cdot \text{d}$, $\eta_2 = 854.0 \text{ kPa} \cdot \text{d}$, $\eta_M = 7500 \text{ kPa} \cdot \text{d}$, $E_M = 300 \text{ kPa}$, $\rho = 1.8 \text{ kg/m}^3$, $c = 20 \text{ kPa}$, $\varphi = 15.2^\circ$, $l/A_0 = 0$, $l/A_t = 0$ 。

接触面计算参数^[5] $k_s = 700 \text{ kN/m}^3$, $k_t = 700 \text{ kN/m}^3$, $k_n = 5.0 \times 10^5 \text{ kPa}$, $c = 16 \text{ kPa}$, $\varphi = 10^\circ$, $\gamma = 0.000001 \text{ (kPa} \cdot \text{d)}^{-1}$ 。

板与桩体计算参数^[6] $E = 30000000 \text{ kPa}$, $\mu = 0.2$, $c = 5 \text{ MPa}$, $\varphi = 61.04^\circ$ 。

6.3 计算结果分析

(1) 罚单元的有效性

为检验罚单元的效果, 把罚单元两个节点的垂向

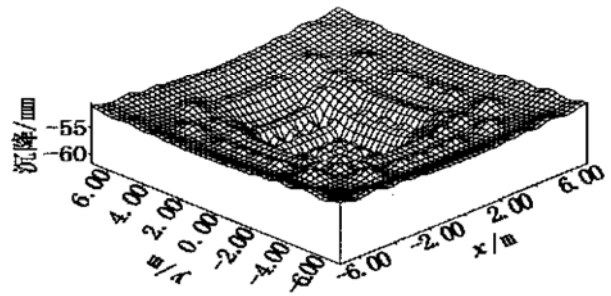


图 5 带承台单桩地表沉降曲面

Fig. 5 Ground surface settlement of single pile with platform

(3) 带承台单桩桩身轴向应力与桩侧摩阻力

图 8(a) 是在低荷载(900 kN)作用下不同深度桩身轴向应力随时间变化曲线。靠近桩顶(-0.2 m)桩身

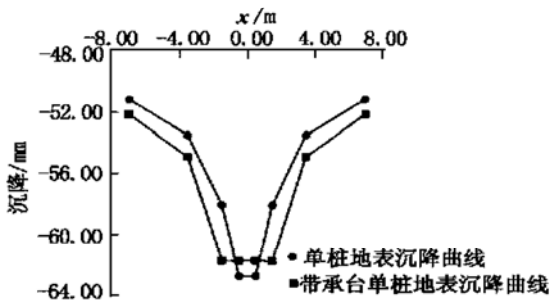


图6 (带承台)单桩地表沉降曲线比较

Fig. 6 Comparison of settlement curves for single pile with and without platform

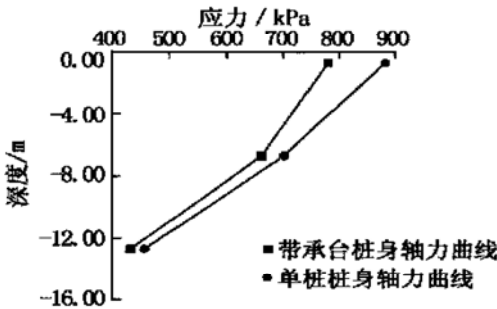
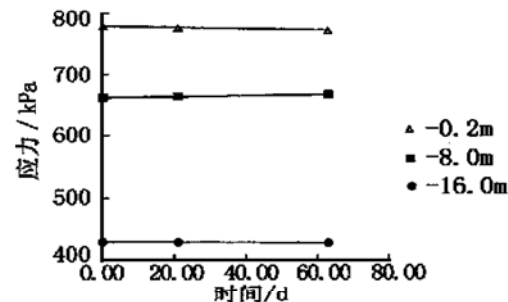
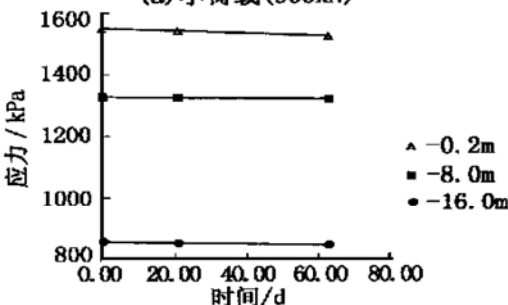


图7 (带承台)单桩桩身轴力比较

Fig. 7 Comparison of axial stress curves for single pile with and without platform



(a)小荷载(900kN)



(b)大荷载(1800kN)

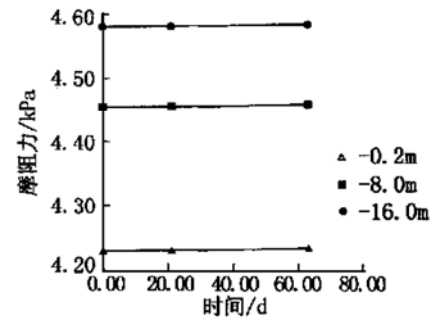
图8 荷载作用下桩不同深度轴力随时间变化曲线

Fig. 8 Axial stress-time curves of pile at different depth

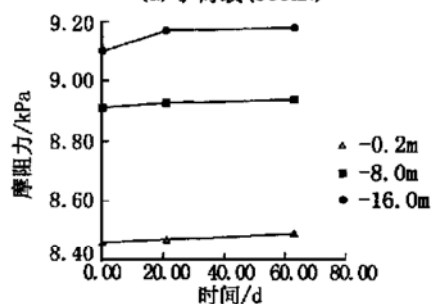
轴向应力随时间减少,在桩身中部(-0.8m)桩身轴向应力随时间增加,在桩端部(-16.0m)桩身轴向应力基本不随时间变化。

图9(a)是在低荷载(900kN)作用下同深度桩侧摩阻力随时间变化曲线。由图可见桩侧摩阻力随时间变化增量值很小。

在高荷载(1800kN)作用下,不同深度桩身轴向应力随时间增长而减小,侧摩阻力随时间而增大,且桩端附近侧摩阻力有较大增值(图8(b),9(b))。



(a)小荷载(900kN)



(b)大荷载(1800kN)

图9 荷载作用下桩不同深度桩侧摩阻力随时间变化曲线

Fig. 9 Friction resistance-time curves of pile at different depth

7 结 论

- (1) 本文建立的连接实体单元与板单元的罚单元是有效的。
- (2) 在荷载较小时,土的蠕变对桩身轴向应力和侧摩阻力的影响较小,大荷载作用下,土的蠕变对桩身轴向应力有较大影响。
- (3) 承台使得土与桩共同承担荷载,提高桩基的承载力,减小桩基沉降。

参考文献:

[1] 欧文 D R I. 辛顿 E. 塑性力学有限元——理论与应用[M]. 曾国平, 刘 忠, 徐家礼, 译. 北京: 兵器工业出版社, 1980.

[2] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用(第二版)[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1998.

[3] 曲圣年. 组合结构有限元分析的罚单元法[J]. 固体力学学报, 1982, 11, (4): 555~ 559.

[4] 孙 钧. 岩土材料流变极其工程应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999. 139; 181.

[5] 高大钊, 李镜培, 郑 云. 软土工程问题的可靠性研究[A]. 软土地基理论与实践[C]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1992.

[6] 史玉成. 上海地区软土流变特性理论分析与工程应用研究[D]. 上海: 同济大学, 1990.