

DOI: 10.11779/CJGE2024S20021

# 埋置移动荷载作用下三维黏弹性半空间的动力响应

李怡君<sup>1</sup>, 胡安峰<sup>2,3</sup>, 李聪<sup>1</sup>, 马玉喜<sup>1</sup>, 徐浩<sup>1</sup>

(1. 武汉轻工大学土木工程与建筑学院, 湖北 武汉 430048; 2. 浙江大学滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310058;

3. 浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室, 浙江 杭州 310058)

**摘要:** 采用积分变换方法对埋置移动荷载作用下三维黏弹性半空间地基振动的衰减规律进行了理论研究。首先, 基于理想弹性介质的动力 Navier 方程, 利用 Helmholtz 分解定理及傅里叶变换方法, 在直角坐标系中求得了变换域内弹性介质动力响应分量的表达式。结合相应的边界条件及连续条件, 得到了埋置移动荷载作用下黏弹性半空间地基动力响应的积分形式解。当荷载埋深为零时, 埋置移动荷载退化为地表移动荷载, 对比发现退化解结果与已有结果吻合较好。最后, 采用 IFFT 法对地基土体动力响应进行数值求解, 分析了移动荷载埋深、速度等因素对地基振动的分布衰减规律以及频谱分布的影响。

**关键词:** 埋置移动荷载; 黏弹性半空间; 动力响应; 振动衰减

中图分类号: TU435

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2024)S2-0145-05

作者简介: 李怡君(1992—), 女, 讲师, 主要从事交通岩土工程及土动力学等方面的研究。E-mail: yijunli@whpu.edu.cn。

## Dynamic response of a visco-elastic half-space subjected to buried moving loads

LI Yijun<sup>1</sup>, HU Anfeng<sup>2,3</sup>, LI Cong<sup>1</sup>, MA Yuxi<sup>1</sup>, XU Hao<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Wuhan Polytechnic University, Wuhan 430023, China; 2. Research Center of Coastal and

Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 3. MOE Key Laboratory of Soft Soils and

Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

**Abstract:** The attenuation of the vibration of a three-dimensional visco-elastic half-space subjected to the embedded moving loads is investigated theoretically. By employing the Fourier integral transform method and the Helmholtz decomposition, the Navier equations for the ideal elastic medium are solved, and the dynamic components in the transformed domain are derived in the Cartesian coordinate. Combined with the boundary conditions and continuity conditions, the analytical solutions to the dynamic response of the viscoelastic half-space due to the embedded moving loads are obtained. When the depth of the moving loads is zero, the results obtained in this study are in good agreement with the published ones. By employing the IFFT method, some numerical examples are selected to discuss the influences of the depth, velocity and viscous damping of the soil on the propagation of the vibration and the amplitude spectra of the displacement.

**Key words:** embedded moving load; viscoelastic half-space; dynamic response; vibration attenuation

## 0 引言

随着城市轨道交通的快速发展, 列车荷载引起的环境振动问题受到越来越多的关注。不少学者对移动荷载作用下地基的动力响应开展了研究。Eason<sup>[1]</sup>通过积分变换法求得了速度小于瑞丽波速的移动点荷载作用下均质弹性半空间位移、应力响应的数值解。Hung 等<sup>[2]</sup>研究了亚音速、跨音速及超音速3种不同速度范围内的移动荷载作用下黏弹性半空间的动力响应规律, 并分析了移动荷载形状分布及加振频率的影响。De 等<sup>[3]</sup>采用传递反射矩阵法求得了成层弹性半空间在移动荷载的动力格林函数。自 Biot<sup>[4-5]</sup>提出饱和多孔介质的动力控制方程后, 多数学者都基于该控制方程对饱和土

体动力响应进行研究。Jin 等<sup>[6]</sup>利用梯形求积公式获得了振动荷载作用下半无限多孔饱和固体中的应力和孔隙水压力数值解。胡安峰等<sup>[7]</sup>利用 Fourier 积分变换求解了下卧基岩饱和半平面在移动线荷载作用下的动力响应。Xu<sup>[8]</sup>等研究了饱和成层土体上无限长 Euler-Bernoulli 梁在移动荷载作用下的动力响应。Cai 等<sup>[9]</sup>研究了移动矩形荷载作用下饱和土体的动力响应。

上述研究中, 移动荷载大多作用在地基表面, 而对地铁等地下构筑物来说, 移动荷载作用在地表以下

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (52179110)

收稿日期: 2024-06-22

一定深度处。Pak<sup>[10]</sup>采用势函数的方法求解了弹性半空间内部点源荷载作用下的动力响应。Senjunctichai等<sup>[11]</sup>求得了二维均质多孔弹性半空间在内部荷载激励作用下的动力格林函数。陈胜立等<sup>[12]</sup>通过Hankel变换方法,求解了埋置点源荷载的轴对称Lame问题。杜秦文等<sup>[13]</sup>采用Hankel积分变换法,得到了埋置点源简谐荷载作用下Gibson土体的动力Green函数。上述文献中的埋置荷载多假定为固定位置动荷载。Metrikine等<sup>[14]</sup>通过建立一个二维弹性层-梁耦合的简化模型,对隧道中列车运行引起的地表振动规律进行了研究。Yuan等<sup>[15]</sup>在Metrikine等<sup>[14]</sup>的基础上,求解了饱和地基-梁模型在移动荷载作用下的振动解析解。上述两个模型均为二维模型,忽略了垂直于荷载移动方向的地基振动。Forrest等<sup>[16]</sup>通过建立筒中筒(PIP)模型,在柱坐标系下对移动点荷载作用下圆形衬砌隧道埋置于弹性全空间中的动力响应情况进行了求解,但未考虑地表边界的影响。本文建立了三维黏弹性半空间地基模型,并通过引入势函数及利用三维傅里叶积分变换及逆变换方法,在笛卡尔坐标系下求解了埋置移动点荷载作用下黏弹性半空间的动力响应积分形式解。最后,通过数值算例分析了埋置荷载移动速度,埋置深度等因素对地表振动传播分布及衰减规律的影响。

## 1 控制方程及其通解

均质各向同性弹性体的控制方程以张量形式可表示为(不计体力):

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) \cdot u_{j,i} = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

式中:  $u_i$  为弹性体的位移,  $i = x, y, z$ ;  $\rho$  为弹性介质的质量密度;  $\lambda, \mu$  为弹性体的 Lamé 常数;  $(\ddot{\cdot})$  为对时间  $t$  的二阶导数。

根据 Helmholtz 分解定理,引入标量势函数  $\phi$ , 矢量势函数  $\psi_j = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ 。对位移场作如下分解:

$$u_i = \phi_{,i} + e_{ijk} \psi_{k,j} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)可得如下关于势函数的表达式:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_p^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3a)$$

$$\nabla^2 \psi_j - \frac{1}{c_s^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} = 0 \quad (3b)$$

式中:  $c_p, c_s$  分别为弹性半空间体的压缩波与剪切波

波速:  $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ,  $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ;  $\nabla^2$  为 Laplace 算子,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}。$$

假定在直角坐标系中矢量势函数满足如下条件:

$$\mu \psi_{j,j} = 0 \quad (3c)$$

定义对  $x, y, t$  的三重 Fourier 变换及逆变换分别为

$$\hat{g}(k_1, k_2, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y, z, t) e^{-ik_1 x} e^{-ik_2 y} e^{-i\omega t} dx dy dt, \quad (4a)$$

$$g(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(k_1, k_2, z, \omega) e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} e^{i\omega t} dk_1 dk_2 d\omega. \quad (4b)$$

将式(3a)~(3c)进行式(4a)中的 Fourier 积分变换可得:

$$\frac{d^2 \hat{\phi}}{dz^2} - B_p^2 \hat{\phi} = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{d^2 \hat{\psi}_j}{dz^2} - B_s^2 \hat{\psi}_j = 0, \quad (5b)$$

$$\frac{d\hat{\psi}_3}{dz} = -(ik_1 \hat{\psi}_1 + ik_2 \hat{\psi}_2) \quad (5c)$$

式中:  $B_p^2 = k_1^2 + k_2^2 - k_p^2$ ;  $B_s^2 = k_1^2 + k_2^2 - k_s^2$ ;

$k_p = \frac{\omega}{c_p}$ ;  $k_s = \frac{\omega}{c_s}$ 。其中  $B_p, B_s$  的实部大于零。

由弹性介质本构方程及傅里叶变换公式可得波数-频率域内位移及应力响应分量表达式为

$$\hat{u}_x = ik_1 \hat{\phi} + ik_2 \hat{\psi}_3 - \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial z}, \quad (6a)$$

$$\hat{u}_y = ik_2 \hat{\phi} - ik_1 \hat{\psi}_3 + \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial z}, \quad (6b)$$

$$\hat{u}_z = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} + ik_1 \hat{\psi}_2 - ik_2 \hat{\psi}_1, \quad (6c)$$

$$\hat{\sigma}_{zz} = \lambda \left( \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} - k_1^2 \hat{\phi} - k_2^2 \hat{\phi} \right) + 2\mu \left( ik_1 \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial z} - ik_2 \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} \right), \quad (6d)$$

$$\hat{\tau}_{xz} = \mu \left( 2ik_1 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} + k_1 k_2 \hat{\psi}_1 - k_1^2 \hat{\psi}_2 - \frac{\partial^2 \hat{\psi}_2}{\partial z^2} + ik_2 \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial z} \right), \quad (6e)$$

$$\hat{\tau}_{zy} = \mu \left( 2ik_2 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} + k_2^2 \hat{\psi}_1 + \frac{\partial^2 \hat{\psi}_1}{\partial z^2} - k_1 k_2 \hat{\psi}_2 - ik_1 \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial z} \right). \quad (6f)$$

## 2 边值问题

图1给出了本文的理论研究模型示意图。沿  $x$  轴

正方向匀速移动的竖向点荷载作用在黏弹性半空间体表面以下深度  $z = h$  处的平面上, 移动荷载表达式为  $F = pe^{i\omega_0 t} \delta(x-ct)\delta(y)$ , 其在变换域内荷载表达式为  $\hat{F} = \frac{p}{\sqrt{2\pi}} \delta(\omega_0 + \omega + ck_1)$ 。其中  $p$  为荷载幅值,  $c$  为荷载移动速度,  $\omega_0$  为荷载自振频率,  $\delta$  为狄拉克函数。考虑荷载由  $x$  轴的负无穷处向正无穷处移动, 当  $t = 0$  时, 荷载恰好移动到坐标原点处。

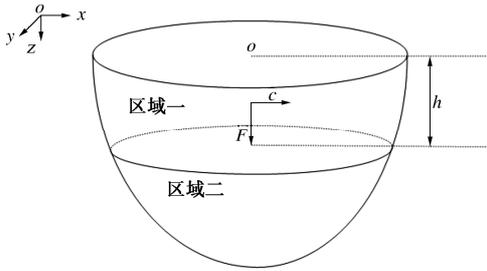


图 1 埋置移动荷载作用于弹性半空间内部示意图

Fig. 1 Diagram of elastic half-space with embedded moving loads

根据波的辐射特性, 将弹性半空间体分为上下两个区域: 区域 1 ( $0 \leq z \leq h$ ) 与区域 2 ( $h \leq z \leq +\infty$ ), 如图 1 所示。则由式 (3a)、(3b) 可解得变换域内势函数可表示为

$$\left. \begin{aligned} & \text{当 } 0 \leq z \leq h \text{ 时,} \\ & \hat{\Phi} = a_1 e^{B_p z} + a_2 e^{-B_p z}, \\ & \hat{\Psi}_1 = a_3 e^{B_s z} + a_4 e^{-B_s z}, \\ & \hat{\Psi}_2 = a_5 e^{B_s z} + a_6 e^{-B_s z}, \\ & \hat{\Psi}_3 = -\frac{ie^{B_s z}}{B_s} (a_3 k_1 + a_5 k_2) + \frac{ie^{-B_s z}}{B_s} (a_4 k_1 + a_6 k_2). \end{aligned} \right\} (7a)$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{当 } h \leq z \leq +\infty \text{ 时,} \\ & \hat{\Phi} = a_7 e^{-B_p z}, \\ & \hat{\Psi}_1 = a_8 e^{-B_s z}, \\ & \hat{\Psi}_2 = a_9 e^{-B_s z}, \\ & \hat{\Psi}_3 = \frac{ie^{-B_s z}}{B_s} (a_8 k_1 + a_9 k_2). \end{aligned} \right\} (7b)$$

式中:  $a_j$  为未知常数,  $j = 1 \sim 9$ 。

由图 1 可看出, 半空间表面的边界条件及荷载作用平面处的连续条件可表示为

$$\left. \begin{aligned} & \text{当 } z = 0 \text{ 时,} \\ & \left. \begin{aligned} \sigma_{zz}(x, y, 0) &= 0, \\ \tau_{xz}(x, y, 0) &= 0, \\ \tau_{yz}(x, y, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (8)$$

当  $z = h$  时,

$$\sigma_{zz}(x, y, h_+) - \sigma_{zz}(x, y, h_-) = F, \quad (9a)$$

$$\tau_{xz}(x, y, h_+) - \tau_{xz}(x, y, h_-) = 0, \quad (9b)$$

$$\tau_{yz}(x, y, h_+) - \tau_{yz}(x, y, h_-) = 0, \quad (9c)$$

$$u_{zz}(x, y, h_+) - u_{zz}(x, y, h_-) = 0, \quad (9d)$$

$$u_{xz}(x, y, h_+) - u_{xz}(x, y, h_-) = 0, \quad (9e)$$

$$u_{yz}(x, y, h_+) - u_{yz}(x, y, h_-) = 0. \quad (9f)$$

观察式 (7) ~ (9) 可看到, 边界条件个数与连续条件个数之和等于未知数个数, 故可进行求解。

对边界条件与连续条件进行傅里叶变换后, 将式 (6a) ~ (6d) 代入, 可得到一组关于未知系数  $a_j$  的线性方程组:  $A_{ij} a_j = f_i$ , 其中矩阵  $A_{ij}$  与  $f_i$  的表达式见附录 1。求得未知系数  $a_j$  后, 代入位移表达式, 即可得到变换域内的位移响应解  $\{u_x, u_y, u_z\}$ 。由 Fourier 逆变换即可求得稳态响应的表达式:

$$\{u_x, u_y, u_z\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega_0 + \omega + ck_1) \hat{u}_x \hat{u}_y \hat{u}_z \cdot e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} e^{i\omega t} dk_1 dk_2 d\omega. \quad (10)$$

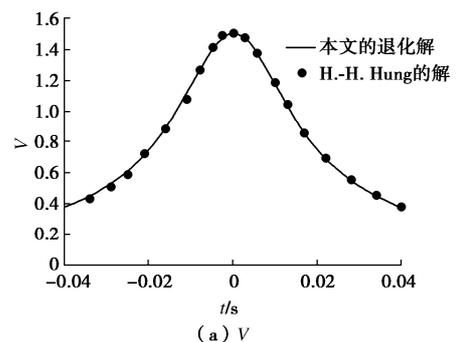
### 3 数值计算与对比验证

为考虑土体的黏滞性, 引入如下黏滞阻尼模型:

$\lambda^* = \lambda(1 + 2i\beta)$ ,  $\mu^* = \mu(1 + 2i\beta)$ , 其中  $\beta$  为土体介质的黏滞阻尼比。由于式 (10) 中的动力响应解为无穷积分形式, 且其被积函数为一个复杂的振荡函数, 故采用 IFFT 方法进行求解。

#### 3.1 对比验证

当  $h=0$  时, 本文解可退化为移动荷载作用在黏弹性半空间表面的动力响应解。Hung 等<sup>[2]</sup>研究了黏弹性半空间在不同类型的地表移动荷载作用下的动力响应。土体参数取值密度  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ , 泊松比  $\nu = 0.25$ , 阻尼比  $\beta = 0.02$ , 横波波速  $c_s = 100 \text{ m/s}$ , 纵波波速  $c_p = 173.2 \text{ m/s}$ , 表面波波速  $c_R = 92 \text{ m/s}$ 。定义观察点  $(x, y, z) = (0, 0, z_0)$  (其中  $z_0 = 1 \text{ m}$ ) 处的无量纲化竖向位移  $V = 2\pi\mu z_0 u_z / p$ , 无量纲化水平纵向位移  $W = 2\pi\mu z_0 u_x / p$ 。图 2 为荷载移动速度  $c = 50 \text{ m/s}$  时, 本文位移响应退化解与 Hung 等<sup>[2]</sup>结果的对比图, 可见两者吻合得较好。



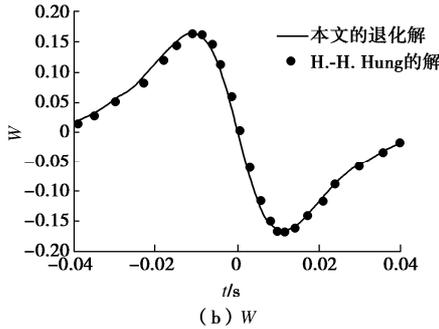


图2 本文退化解与Hung等<sup>[2]</sup>的对比图

Fig. 2 Comparison between degenerated solutions and results of Hung et al<sup>[2]</sup>

3.2 数值算例分析

定义无量纲位移  $u_x^* = u_x \lambda l_0 / p$ ,  $u_z^* = u_z \lambda l_0 / p$ , 其中  $l_0$  为特征长度 ( $l_0 = 10 \text{ m}$ )。土体 Lamé 常数  $\lambda = 2 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ ,  $\mu = 2 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ , 土体密度  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ , 黏滞阻尼比  $\beta = 0.02$ , 移动荷载幅值  $p = 1 \text{ N}$ 。下面分析埋置移动点荷载作用下黏弹性半空间地表的振动情况。

(1) 地表竖向位移响应分布

引入移动坐标系  $x_t = x - ct$ 。图3给出了不同速度的埋置移动荷载作用下, 地表无量纲竖向位移  $u_z^*$  在移动坐标系下的曲线分布图, 其中  $y = 0$ , 移动荷载埋深分别取  $h$  为 10, 15, 20 m。由图3可看到, 地表竖向位移响应关于  $x_t = 0$  基本呈轴对称分布, 且荷载埋深越深, 振动沿水平方向衰减越快, 振动影响范围越小, 地表振动幅值越小。此外, 对比图3(a), (b)可发现, 荷载速度越大, 地表最大竖向位移幅值也越大。

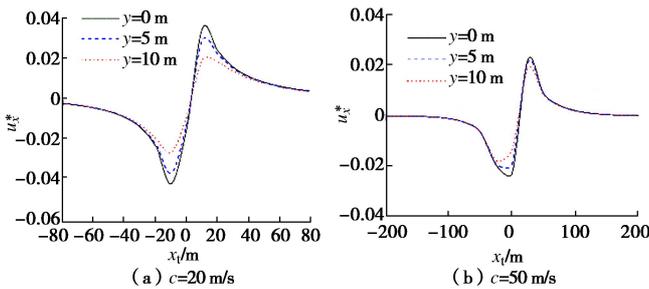


图3 地表竖向位移  $u_z^*$

Fig. 3 Vertical displacements of surface  $u_z^*$

(2) 地表纵向位移响应分布

在埋置移动荷载作用下, 地表不仅会产生垂直方向的振动, 也会产生水平方向的动力响应。图4为当荷载埋深  $h = 10 \text{ m}$  时, 地表  $x$  方向的纵向水平位移响应沿移动坐标  $x_t$  的分布图。由图4可看到埋置移动点荷载作用下, 地表纵向水平位移响应曲线关于移动坐标轴呈反对称分布, 且垂直于荷载移动方向, 距离荷载作用位置越远, 即  $y$  值越大, 纵向水平位移越小; 对比图4(a), (b)可看出, 随荷载速度增大, 纵向水平位移幅值降低。同时, 对比图3, 4可看出, 同一

埋置荷载作用下, 地表土体竖向位移响应幅值远大于纵向水平位移响应幅值, 这与实测地面振动规律吻合<sup>[17]</sup>。

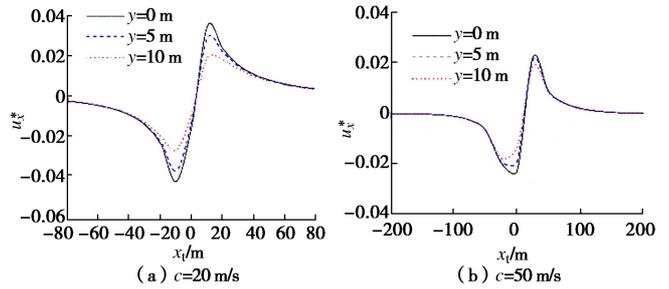


图4 地表纵向位移  $u_x^*$

Fig. 4 Longitudinal displacements of surface  $u_x^*$

(3) 地表位移响应的频谱分析

由式(10)可得原点(0,0,0)处的竖向位移响应表达式为

$$u_z(0,0,0,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_z(k_1, k_2, 0, -ct - \omega_0) \cdot e^{ik_1(x-ct-\omega_0)} e^{ik_2 y} dk_1 dk_2 \quad (11)$$

则该点处的竖向振动频谱可表示为

$$u_z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_z(0,0,0,t) e^{-i2\pi ft} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_z\left(\frac{2\pi f_0 - 2\pi f}{c}, k_2, 0, 2\pi f\right) dk_2 \quad (12)$$

同理可得原点处的水平位移频谱表达式  $u_x(f)$ 。

图5给出了两种不同速度的常值移动荷载 ( $h = 10 \text{ m}$ ) 作用下, 地表原点处竖向位移与水平纵向位移响应的频谱图。可看到, 当荷载速度较小时, 位移频谱主要分布在频率较低的范围, 且竖向位移与水平位移几乎在同一频率达到峰值。当荷载速度变大时, 位移频谱曲线的频率分布范围变大, 位移幅值也增大, 位移峰值所对应的频率也越大。

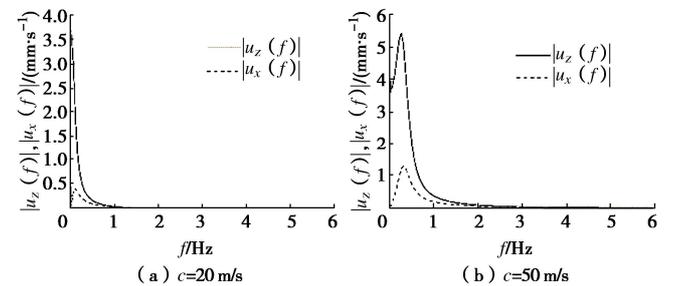


图5 地表位移频谱图

Fig. 5 Displacement spectra of surface

4 结 论

采用傅里叶变换及 Helmholtz 分解的方法对埋置移动荷载作用下弹性半空间地基的动力响应进行理论求解, 并通过数值计算, 分析了荷载埋深、速度等因

素对地表位移响应的影响, 得到 3 点结论。

(1) 移动荷载埋深越深, 地表水平位移与竖向位移响应均越小; 荷载移动速度越大, 地表竖向位移响应幅值越大, 纵向水平位移反而越小。

(2) 垂直于荷载移动方向, 距离荷载作用位置越远, 地表水平位移响应越小。

(3) 埋置荷载移动速度越大, 位移响应频谱分布范围越大, 位移幅值峰值对应的频率也越大。

#### 参考文献:

- [1] EASON G. The stresses produced in a semi-infinite solid by a moving surface force[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1965, **2**(6): 581-609.
- [2] HUNG H H, YANG Y B. Elastic waves in visco-elastic half-space generated by various vehicle loads[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2001, **21**(1): 1-17.
- [3] DE BARROS F C P, LUCO J E. Response of a layered viscoelastic half-space to a moving point load[J]. *Wave Motion*, 1994, **19**(2): 189-210.
- [4] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. higher frequency range[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, **28**(2): 179-191.
- [5] BIOT M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. *Journal of Applied Physics*, 1962, **33**(4): 1482-1498.
- [6] JIN B, YUE Z Q, THAM L G. Stresses and excess pore pressure induced in saturated poroelastic halfspace by moving line load[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2004, **24**(1): 25-33.
- [7] 胡安峰, 孙波, 谢康和. 下卧基岩饱和地基在移动荷载作用下的动力响应[J]. *振动与冲击*, 2012, **31**(4): 151-156. (HU Anfeng, SUN Bo, XIE Kanghe. Dynamic response of saturated subgrade with rock substratum subjected to moving loads[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(4): 151-156. (in Chinese))
- [8] XU B, LU J F, WANG J H. Dynamic response of an infinite beam overlying a layered poroelastic half-space to moving loads[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **306**(1/2): 91-110.
- [9] CAI Y Q, SUN H L, XU C J. Steady state responses of poroelastic half-space soil medium to a moving rectangular load[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(22/23): 7183-7196.
- [10] PAK R Y S. Asymmetric wave propagation in an elastic half-space by a method of potentials[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1987, **54**(1): 121-126.
- [11] SENJUNTICHAJ T, RAJAPAKSE R K N D. Dynamic Green's functions of homogeneous poroelastic half-plane[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1994, **120**(11): 2381-2404.
- [12] 陈胜立, 张建民, 陈龙珠. 饱和地基中埋置点源荷载的动力 Green 函数[J]. *岩土工程学报*, 2001, **23**(4): 423-426. (CHEN Shengli, ZHANG Jianmin, CHEN Longzhu. Dynamic Green's functions of saturated soils subjected to the internal excitation[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2001, **23**(4): 423-426. (in Chinese))
- [13] 杜秦文, 朱向荣, 丁伯阳. 埋置点源简谐荷载作用下 Gibson 土体动力 Green 函数[J]. *工程力学*, 2007, **24**(2): 45-49. (DU Qinwen, ZHU Xiangrong, DING Boyang. Dynamic Green's function for Gibson soil subjected to internal excitation[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**(2): 45-49. (in Chinese))
- [14] METRIKINE A V, VROUWENVELDER A C W M. Surface ground vibration due to a moving train in a tunnel: two-dimensional model[J]. *Journal of Sound Vibration*, 2000, **234**(1): 43-66.
- [15] YUAN Z H, BOSTRÖM A, CAI Y Q. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space[J]. *Journal of Sound Vibration*, 2017, **387**: 177-193.
- [16] FORREST J A, HUNT H E M. A three-dimensional tunnel model for calculation of train-induced ground vibration[J]. *Journal of Sound Vibration*, 2006, **294**(4/5): 678-705.
- [17] ZOU C, WANG Y M, WANG P, et al. Measurement of ground and nearby building vibration and noise induced by trains in a metro depot[J]. *The Science of the Total Environment*, 2015, **536**: 761-773.

(编校: 胡海霞)