

DOI:

# 适用于黏土砂土统一本构模型的状态参量

姚仰平<sup>\*1</sup>, 孙昊政<sup>1</sup>

(1. 北京航空航天大学交通科学与工程学院, 北京 100191)

**摘要:** 构建黏土砂土统一本构模型的关键在于状态参量。本文基于状态参量这一核心区别, 对比剖析了 MIT-S1 和 CSUH 两个黏土和砂土统一本构模型。对比结果表明, MIT-S1 模型状态参量不能合理作用于硬化参量, 以 LCC 为参考线定义状态参量  $\delta_p$  难以准确刻画砂土剪胀性, 且黏土砂土的状态参量不统一; CSUH 模型将黏土 NCL 拓展为砂土 NCL, 所定义的状态参量  $\xi$  能够动态统一的表示黏土和砂土不同密实状态量, 准确刻画土的基本特性, 并基于特征状态应力比  $M_c$  和潜在强度  $M_Y$  合理作用于硬化参量, 在应力应变关系的描述上更简洁, 有优势。同时对比两个模型黏土和砂土试验的预测结果, 进一步验证了以  $\xi$  作为状态参量的 CSUH 模型在描述黏土砂土应力应变关系上的准确性。

**关键词:** 黏土; 砂土; MIT-S1 模型; CSUH 模型; 状态参量

中图分类号: TU441

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2024)01-

**作者简介:** 姚仰平(1960—), 男, 教授, 博士生导师, “973”首席科学家, 主要从事岩土本构模型理论研究方面的科研工作。E-mail: ypyao@buaa.edu.cn。

## State parameters applicable to the unified model of clays and sands

YAO Yangping<sup>1</sup>, SUN Haozheng<sup>1</sup>

(1. School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** The state parameter is the key of the unified constitutive model of clays and sands. Based on state parameters, MIT-S1 and CSUH unified constitutive models of clays and sands are compared and analyzed in this paper. Through comparison, The state parameter of the MIT-S1 model cannot be reasonably applied to the hardening parameters. It is difficult to accurately characterize the dilatancy of sand by using LCC as the reference line to define the state parameter  $\delta_p$ . Additionally, the state parameters are not unified. The CSUH model extends clay NCL into sand, and the defined state parameter  $\xi$  can dynamically and unified represent different compactness states of clays and sands, accurately describe the basic properties of soil and act reasonably on the hardening parameter by  $M_c$  and  $M_Y$ . Therefore, the model is more concise and advantageous in describing the stress-strain relationship. By comparing the clays and sands test data and the prediction results of the two unified models, it is further verified that the accuracy of the CSUH model in describing the stress-strain relationship of clays and sands.

**Key words:** Clay; sand; MIT-S1 model; CSUH model; state parameters

## 0 引言

建立一个能够简捷、准确、统一描述黏土和砂土等各类岩土材料应力-应变关系的本构模型具有重要的理论意义和工程实际意义。剑桥学派奠基人 Wroth 和 Houlsby<sup>[1]</sup>曾在第 11 届世界土力学与岩土工程大会综述报告中指出, 在单一模型框架下建立一个适用所有土类的本构模型是令人期待的, 也是研究学者们所追求的目标。

从 20 世纪 90 年代至今, 国内外已经开展了大量关于黏土和砂土统一本构模型的研究工作, 在国际上知名且应用广泛的统一模型主要有 Pestana 等<sup>[2]</sup>所提出的 MIT-S1 模型和 Yao 等<sup>[3]</sup>所提出的 CSUH 模型。MIT-S1 模型以黏土和砂土共有的一条极限压缩线

LCC 为参考线, 定义屈服面硬化参量  $\alpha$  与当前孔隙比  $e$  在 LCC 上所对应的应力  $p_b$  之比为状态参量  $\delta_p$ , 基于界面理论实现了对不同密实度的黏土和砂土应力应变关系的统一描述。然而 MIT-S1 模型所定义的状态参量  $\delta_p$  不能合理地动态统一表示黏土和砂土的不同密实状态量, 在描述砂土剪胀性上存在缺陷。CSUH 模型统一了黏土和砂土的正常固结压缩线 NCL, 以其当前应力比对应的各向异性压缩线 ACL 为动态参考线, 定义相对孔隙比  $\xi$  为状态参量, 能够动态统一表示黏土和砂土的密实状态量, 准确刻画土的三个基

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51979001, 52238007)

收稿日期:

\*通信作者 (E-mail: ypyao@buaa.edu.cn)

本特性, 模型能够更为便捷准确地统一描述黏土和砂土的应力应变关系。

本文将通过对比剖析 MIT-S1 和 CSUH 模型统一描述黏土和砂土应力应变关系的方法原理, 重点分析状态参量这一核心区别, 讨论状态参量  $\delta_p$  和  $\zeta$  对模型描述应力应变特性的作用机制, 刻画黏土砂土基本特性的能力, 以及其表示黏土、砂土不同密实状态量的统一性。论证采用相对孔隙比  $\zeta$  作为状态参量构建黏土和砂土统一本构模型的合理性和优越性。最后基于两个模型黏土砂土试验数据的预测对比, 验证 CSUH 模型统一预测黏土砂土应力应变关系的精确性。

## 1 MIT-S1 黏土和砂土统一模型

MIT-S1 模型是在 MIT-E3 超固结黏土模型基础上建立的黏土和砂土统一的本构模型, 并考虑了土的各种复杂力学特性, 比如土的各向异性、小应变非线性弹性等。为方便两个模型对比, 根据 MIT-S1 模型对参数的定义将各向异性参数  $b$ 、 $\psi$  取值为 0, 将模型退化为各向同性模型进行分析介绍<sup>[2]</sup>。

MIT-S1 模型提出的黏土和砂土统一的屈服面表达式为:

$$f = p^2 \left[ \eta^2 - c^2 \left( 1 - \left( \frac{p}{\alpha} \right)^{m'} \right) \right] = 0 \quad (1)$$

式中:  $p$  为平均正应力,  $\eta$  为应力比。如图 1 所示, 屈服方程中硬化参量  $\alpha$  控制屈服面的大小;  $m'$  和  $c$  控制屈服面的形状,  $m'$  为材料常数,  $c$  可以表示为当前当孔隙比  $e$  和应力比  $\eta$  的函数,  $c$  的表达式在附录给出。

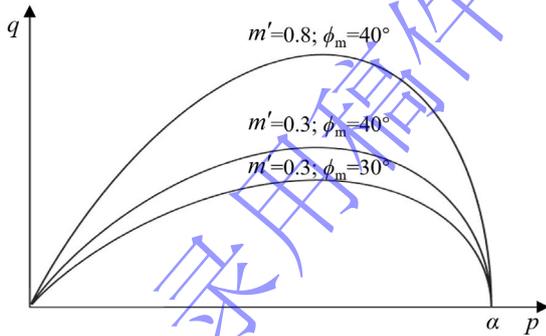


图 1 MIT-S1 模型屈服面  
Fig. 1 Yield surface of MIT-S1 model

为定义砂土的状态参量, Pestana 等<sup>[4]</sup>通过大量的试验数据验证了任意密实度的砂土的等向压缩线 ICL 都趋近于一条极限压缩渐近线 LCC。任意超固结程度黏土的等向压缩线也都趋近于正常固结压缩线 NCL, 黏土 NCL 也被称为黏土的 LCC, 且砂土和黏土的 LCC 同为直线, 如图 2 所示。MIT-S1 模型基于黏土和砂土的这个共性, 选择了共有的 LCC 为参考线, 并建立了黏土和砂土参考线的统一表达式:

$$\ln e_{LCC} = \lambda (\ln p_{ref} - \ln p) \quad (2)$$

式中:  $\lambda$  为 LCC 的斜率,  $p_{ref}$  为  $e=1$  时在 LCC 上所对应的平均正应力。

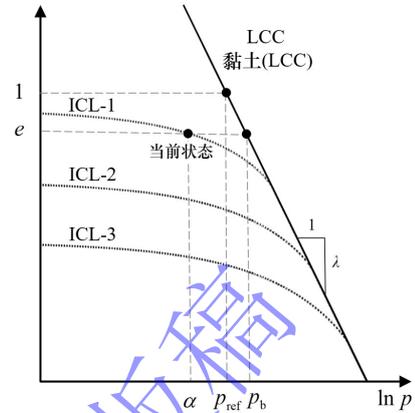


图 2 黏土和砂土统一的 LCC 示意图  
Fig. 2 Unified LCC of clays and sands

MIT-S1 模型以当前屈服面硬化参量  $\alpha$  与当前孔隙比  $e$  在 LCC 上投影水平坐标值  $p_b$  的比值定义了状态参量  $\delta_p$ ,  $\delta_p$  的表达式为:

$$\delta_p = 1 - \frac{\alpha}{p_b} \quad (3)$$

$$p_b = p_{ref} \left( \frac{1}{e} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (4)$$

通过将式(3)移项, 取对数形式, 并与式(1)和(4)联立得到:

$$\ln(1 - \delta_p) = \frac{\ln e - \lambda (\ln p_{ref} - \ln p) - \frac{\lambda}{m'} \ln \left( 1 - \frac{\eta^2}{c^2} \right)}{\lambda} \quad (5)$$

通过上式可见, MIT-S1 模型还赋予了参考线 LCC 随应力比  $\eta$  动态变化的规律, 状态参量  $\delta_p$  也可以表示为相对孔隙比  $\Delta e$  的形式, 如图 3 所示。

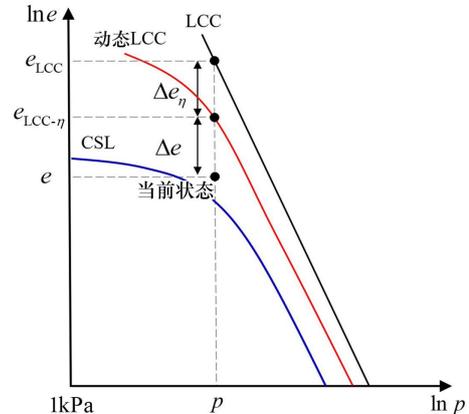


图 3 MIT-S1 模型参考线 LCC 动态变化规律  
Fig. 3 Dynamic evolution law of reference line LCC in MIT-S1 model

加载过程中参考线 LCC 动态变化量为:

$$\Delta e_\eta = -\frac{\lambda}{m'} \ln \left( 1 - \frac{\eta^2}{c^2} \right) \quad (6)$$

基于 LCC 方程式(2), 能够得到动态参考线表达式为:

$$\ln e_{\text{LCC-}\eta} = \lambda (\ln p_{\text{ref}} - \ln p) + \frac{\lambda}{m'} \ln \left( 1 - \frac{\eta^2}{c^2} \right) \quad (7)$$

当前状态点与动态参考线 LCC 的垂直距离有:

$$\Delta e = \ln e_{\text{LCC-}\eta} - \ln e \quad (8)$$

因此, 以相对孔隙比  $\Delta e$  表示的状态参量  $\delta_p$  为:

$$\delta_p = 1 - \exp \left( \frac{-\Delta e}{\lambda} \right) \quad (9)$$

对于黏土砂土压硬性的描述, MIT-S1 模型通过引入状态参量  $\delta_p$ , 在  $\ln e - \ln p$  空间内定义了不同密实度砂土和正常固结黏土的等向压缩关系, 塑性体积应变增量为:

$$d\varepsilon_v^p = \frac{e}{1+e} (\lambda - \kappa) (1 - \delta_p^\theta) \frac{dp}{p} \quad (10)$$

式中:  $\kappa$  为压缩试验弹性卸载的斜率;  $\theta$  是  $\delta_p^\theta$  的指数, 为控制压缩线曲率的参数,  $\theta$  越大, 当前状态参量  $\delta_p$  下的压缩线的曲率越大。

基于式(10), MIT-S1 模型还考虑了塑性剪应变  $\varepsilon_d^p$  对屈服面硬化的贡献, 提出的硬化参量  $\alpha$  的增量数学表达式为:

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{(1+e)}{e(\lambda - \kappa)(1 - \delta_p^\theta)} \left( d\varepsilon_v^p + \delta_p^\theta \frac{\partial f}{\partial q} \frac{d\varepsilon_d^p}{p} \right) \quad (11)$$

模型塑性流动方向表达式为:

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \begin{cases} (M^2 - \eta^2) \frac{p}{\alpha} (1 - \delta_p^m), & \eta^2 \leq M^2 \\ (M^2 - \eta^2) \frac{p}{\alpha}, & \eta^2 \geq M^2 \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{\partial g}{\partial q} = x\eta \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{c^2 |\eta|}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial q} \quad (13)$$

对于从正常固结卸载到超固结状态的土再加载应力-应变关系的计算, MIT-S1 模型引入了边界理论。MIT-S1 模型中发生初次塑性屈服的应力状态点所在的屈服面为第一屈服面, 当前应力状态点所在的屈服面为当前加载面, 当前状态位于边界内表示土体为超固结。本文上标“1”、“0”分别表示边界面、第一屈服面相关的量。

MIT-S1 模型通过屈服面之间的映射关系  $l_1$  表示超固结程度,  $l_1$  的表达式为:

$$l_1 = \frac{\alpha^1 - \alpha}{\alpha^1 - \alpha^0} \quad (14)$$

当前应力状态的塑性势函数和塑性模量  $A$  通过对边界面、第一屈服面上的塑性势函数和塑性模量进行插值获得。插值计算关系可见附录。

## 2 CSUH 黏土和砂土统一模型

CSUH 模型是在超固结黏土的统一硬化(unified hardening, UH) 本构模型基础上, 创新发展而来的黏土和砂土统一的本构模型。

为对黏土和砂土的不同密实状态量进行统一描述, Yao 等<sup>[5]</sup>基于黏土 NCL 的定义, 创新地提出在砂土所有等向压缩线中存在唯一一条等向压缩线, 为不发生剪胀的最密砂土等向压缩线, 由于其物理意义与黏土 NCL 线相同, 故特别将该条压缩线称为砂土的 NCL。通过在黏土 NCL 表达式中引入砂土物理参数  $p_s$ , 在物理意义和数学表达式上统一了黏土和砂土的 NCL。黏土和砂土 NCL 的统一表达式可以表示为:

$$e_{\text{NCL}} = Z - \lambda \ln \left( \frac{p + p_s}{1 + p_s} \right) \quad (15)$$

式中:  $Z$  是砂土 NCL 上  $p=1\text{kPa}$  时所对应的孔隙比。

CSUH 模型定义  $p_s$  为砂土压缩的破碎应力, 即压缩曲线曲率最大点对应的平均正应力, 如图 4 所示。当  $p < p_s$  少量颗粒发生破碎, 变形较小, 压缩线斜率较缓; 当  $p > p_s$  颗粒破碎现象较明显, 变形较大, 压缩线斜率较陡。对于黏土, 颗粒不发生破碎,  $p_s=0$ , 式(15)退回为黏土的 NCL 方程。破碎应力  $p_s$  的表达式为:

$$p_s = \exp \left( \frac{N - Z}{\lambda} \right) - 1 \quad (16)$$

CSUH 模型又在 NCL 的基础上考虑了当前应力状态对参考线的影响, 提出以当前应力比  $\eta$  对应的各向异性压缩线 ACL 为动态参考线, 如图 4 所示。

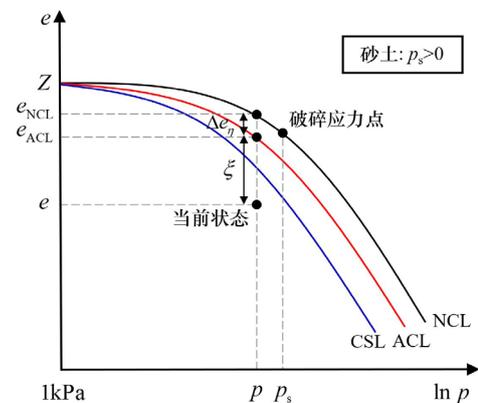


图 4 CSUH 模型参考线 ACL 动态演化规律  
Fig. 4 Dynamic evolution law of reference line ACL in CSUH model

通过从 NCL 上等  $p$  剪切可以得到 ACL 随应力比

$\eta$  的动态变化量为:

$$\Delta e_\eta = (\lambda - \kappa) \ln \left[ \frac{\left( \frac{M^2 + \eta^2}{M^2 - \chi \eta^2} \right) p + p_s}{p + p_s} \right] \quad (17)$$

黏土和砂土统一的 ACL 表达式为:

$$e_{ACL} = Z - \lambda \ln \left( \frac{p + p_s}{1 + p_s} \right) - (\lambda - \kappa) \ln \left[ \frac{\left( \frac{M^2 + \eta^2}{M^2 - \chi \eta^2} \right) p + p_s}{p + p_s} \right] \quad (18)$$

CSUH 模型定义当前状态点与 ACL 之间的相对孔隙比  $\xi$  为状态参量, 如图 4 所示。  $\xi$  的表达式为:

$$\xi = e_{ACL} - e \quad (19)$$

CSUH 模型在修正剑桥模型屈服方程的基础上引入了参数  $\chi$ , 将椭圆屈服面修正为水滴屈服面, 如图 5 所示。正常固结黏土和砂土统一的屈服面表达式为:

$$f = \ln \left[ \left( 1 + \frac{(1 + \chi)q^2}{M^2 p^2 - \chi q^2} \right) p + p_s \right] - \ln(p_{x0} + p_s) - \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p = 0 \quad (20)$$

式中:  $p_{x0}$  为初始固结压力;  $\chi$  为临界状态参数, 控制 NCL 与 CSL 之间的竖向距离, 取值范围为 0 到 1; 当  $\chi=0$ ,  $p_s=0$  时本式退回为修正剑桥模型屈服面。

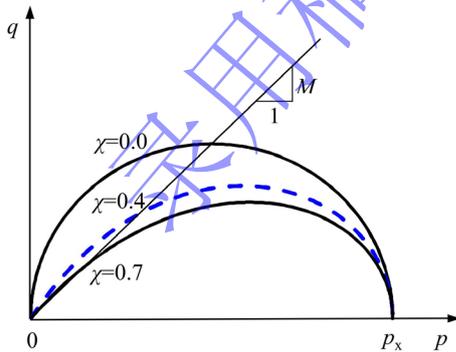


图 5 CSUH 模型屈服面

Fig. 5 Yield surface of CSUH model

采用 Yao 提出的统一硬化参量  $H$  替换式(20)中的塑性体积应变  $\varepsilon_v^p$ , 即可得到任意密实状态黏土和砂土的屈服函数, 统一硬化参量  $H$  的表达式为<sup>[5]</sup>:

$$H = \int \frac{M_Y^4 - \eta^4}{M_c^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p \quad (21)$$

$$M_c = M \cdot \exp(-m\xi) \quad (22)$$

$$M_Y = 6 \left[ \sqrt{\frac{12(3-M)}{M^2} \exp\left(-\frac{\xi}{\lambda - \kappa}\right) + 1} + 1 \right]^{-1} \quad (23)$$

式中:  $M_c$  为特征状态应力比;  $M_Y$  为潜在峰值应力比;  $m$  为剪胀性参数。

CSUH 模型塑性势面函数表达式为:

$$g = \ln \frac{p}{p_y} + \ln \left( 1 + \frac{q^2}{M_c^2 p^2} \right) = 0 \quad (24)$$

### 3 统一模型状态参量对比分析

统一模型描述黏土砂土应力应变特性的好坏优劣主要在于统筹兼顾地把握这两种土的压硬性、剪胀性、摩擦性<sup>[6]</sup>。而要想准确刻画土的基本特性就得抓住土在加载过程中体积的动态变化, 定义相应的状态参量, 准确统一地表示黏土和砂土的不同密实状态量。

通过上述对 MIT-S1 模型和 CSUH 模型的介绍, 可以看出两者在模型构造、计算原理等方面存在诸多不同, 但它们的核心区别还是状态参量对模型的作用机制和定义的不同。因此下面将从状态参量的角度来对两个模型的异同进行分析评价。

#### 3.1 状态参量对应力-应变特性的影响

不同密实状态的黏土和砂土在剪切过程中表现出的应力-应变特性是不同的。例如, 在等  $p$  和等  $\sigma_3$  路径下, 正常固结黏土和松砂应力-应变曲线表现为剪缩和单调硬化; 而超固结黏土和密砂, 其应力应变特性常表现先剪缩后剪胀, 先硬化后软化。为描述上述过程, MIT-S1 和 CSUH 模型都构造了状态参量相关的硬化参量。

由式(11)可见, MIT-S1 模型以塑性体积应变  $\varepsilon_v^p$  和塑性剪应变  $\varepsilon_d^p$  的组合作为硬化参量, 并引入了状态参量  $\delta_p$  作为系数控制塑性剪切应变的贡献程度, 使得硬化参量能够反映不同密实状态土不同程度的剪胀剪缩, 硬化软化特性。当  $d\alpha > 0$ ,  $\eta < M$  时, 有  $d\varepsilon_v^p > 0$ ,  $d\varepsilon_d^p > 0$ , MIT-S1 模型屈服面外扩, 发生剪缩硬化; 根据式(12), MIT-S1 模型从剪缩到发生剪胀的拐点, 也就是特征状态应力比为  $\eta = M$ , 此时  $d\varepsilon_v^p = 0$ , 由于  $d\varepsilon_d^p > 0$ , 有  $d\alpha > 0$ , 使得屈服面得以继续外扩, 开始发生剪胀硬化( $\eta > M$ )。当硬化至  $d\alpha = 0$  时, 有  $\eta > M$ ,  $d\varepsilon_v^p < 0$ ,  $d\varepsilon_d^p > 0$ , MIT-S1 模型存在某一个应力比使得式(25)为 0, 此时  $\eta$  达到峰值强度点, 屈服面从外扩转为内缩, 开始剪胀软化。当  $d\alpha < 0$  时,  $d\varepsilon_v^p < 0$ ,  $d\varepsilon_d^p > 0$ , 有式(25) < 0, 屈服面内缩, 发生剪胀软化直至临界破坏。

$$dU = d\varepsilon_v^p + \delta_p^{\theta} \frac{\partial f / \partial q}{p} d\varepsilon_d^p \quad (25)$$

对于 CSUH 模型, 由式(21)可见, 模型通过在硬化参量中引入了状态参量  $\zeta$  相关的  $M_c$ 、 $M_Y$  作为系数来反映土的剪胀剪缩, 硬化软化特性。

CSUH 模型的硬化、软化过程, 如图 6 所示。当  $dH > 0$ ,  $\eta < M_c$  时,  $(M_Y^4 - \eta^4) / (M_c^4 - \eta^4) > 0$ ,  $d\varepsilon_v^p > 0$ , CSUH 模型屈服面外扩, 发生剪缩硬化; CSUH 模型从剪缩到剪胀的特征状态应力比为  $\eta = M_c$ , 此时  $M_c^4 - \eta^4 = 0$ ,  $d\varepsilon_v^p = 0$ , 有  $dH > 0$ , 开始发生剪胀硬化。当硬化至  $dH = 0$  时,  $d\varepsilon_v^p < 0$ , 有峰值强度达到  $\eta = M_Y$ ,  $(M_Y^4 - \eta^4) / (M_c^4 - \eta^4) = 0$ , 屈服面从外扩转为内缩, 开始剪胀软化。当  $dH < 0$  时,  $(M_Y^4 - \eta^4) / (M_c^4 - \eta^4) > 0$ ,  $d\varepsilon_v^p < 0$ , 屈服面内缩, 发生剪胀软化直至临界破坏。

$$dH = \frac{M_Y^4 - \eta^4}{M_c^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p \quad (26)$$

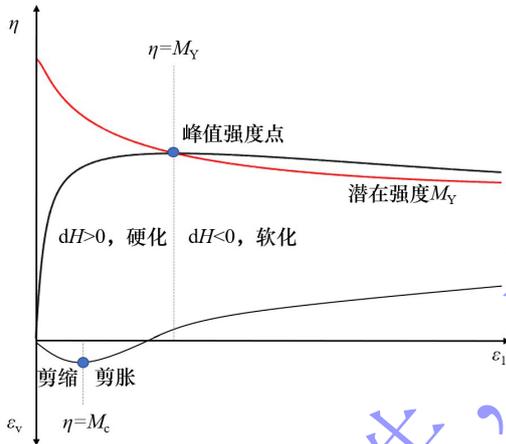


图 6  $H$  和  $M_Y$  随  $\eta$  的演化规律

Fig. 6 Evolution law of  $H$  and  $M_Y$  with  $\eta$

由上可见, MIT-S1 模型和 CSUH 模型虽然都能描述土应力应变曲线的剪胀剪缩, 硬化软化特性, 但其在实现方法上有所不同。MIT-S1 模型相变的特征状态应力比恒定义为临界状态应力比  $M$ , 大量研究表明砂土的相变与当前状态密切相关<sup>[7-9]</sup>, 而非一定值。且由式(25)可以看出硬化参量  $\alpha$  没有合理考虑不同状态土的强度特性对土硬化的影响, 对于峰值强度点的预测具有很大随意性。而 CSUH 模型硬化参量  $H$  中的  $M_c$  是基于土的状态参量的相转换参量,  $M_Y$  是基于伏斯列夫强度规律的潜在强度。CSUH 模型基于试验和可靠的理论<sup>[10]</sup>, 考虑了不同密实状态土的强度特性, 因此能够准确地预测峰值强度点, 更为合理地描述土的剪缩剪胀, 硬化软化。

### 3.2 状态参量的参考线

通过 3.1 节, 了解到状态参量  $\delta_p$ 、 $\zeta$  是如何作用于硬化参量, 以描述不同密实状态土的应力-应变特性。下面将从两个模型对  $\delta_p$ 、 $\zeta$  的定义出发, 对其刻画黏

土、砂土基本特性的能力进行分析讨论。

在参考线的选择方面。由图 3 和图 4 可知, MIT-S1 模型和 CSUH 模型都分别提出了随应力比  $\eta$  变化而变化的动态参考线。当  $\eta = 0$  时, MIT-S1 动态参考线能够退化为 LCC, CSUH 模型动态参考线 ACL 能够退回为 NCL, 状态参量都能够合理描述土的压缩特性; 当  $\eta = M$ , 发生临界破坏时, 两者参考线都转化为 CSL, 状态参量都反映了土的临界状态特性; 当  $0 < \eta < M$  时, 参考线在两者之间动态变化, 状态参量都反映了在剪切过程中一般应力水平对土应力应变特性的影响。由上可知, 两个模型所选择的参考线具有相似的动态变化规律, 其参考线最显著区别是初始状态 ( $\eta = 0$ ) 参考线的不同。

两个模型在计算相比正常固结黏土更为密实的超固结黏土应力应变关系时, 对于初始参考线选择是一致的, 都是以黏土的 NCL 为参考线。基于 NCL 定义黏土状态参量能够准确刻画黏土的三个基本特性, 并在大量的超固结黏土本构模型(如 UH 模型、下加载面模型、MIT-E3 模型<sup>[10-12]</sup>等)中成功应用。

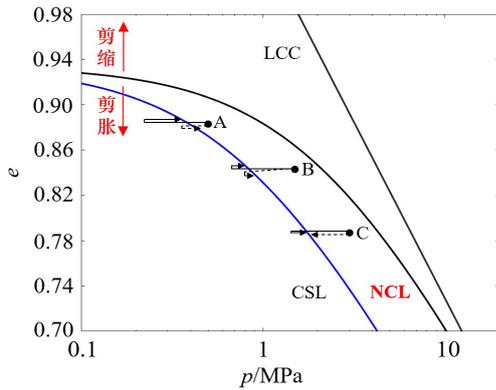
而对于不同初始密实程度的砂土应力应变关系的计算, MIT-S1 模型选择了砂土和黏土在  $\ln e - \ln p$  空间内共有且形式上同为直线的 LCC 为初始参考线, 在形式和数学表达上实现了参考线的统一。CSUH 模型将黏土 NCL 的概念拓展到砂土, 以砂土 NCL 作为初始参考线。虽然所提出的砂土 NCL 为曲线, 参考线形式虽不统一, 但通过在黏土 NCL 方程中引入参数  $p_s$ , 同样也实现了黏土和砂土参考线数学表达上的统一。

尽管两个模型都在参考线的数学表达式上实现了黏土和砂土的统一, 但参考线 LCC 对于黏土和砂土的物理意义并不统一。LCC 对于砂土来说只是无数条压缩曲线的数学渐近线, 虽然砂土以 LCC 为参考线定义状态参量能够较好地刻画砂土的压硬性, 但 LCC 实际上并不存在, 自身也没有物理意义, 无法像黏土 LCC(NCL)准确划分土发生剪胀剪缩的界限, 初始状态位于 LCC 下方的砂土可能只发生剪缩也可能会发生剪胀, 如图 7(a)所示。

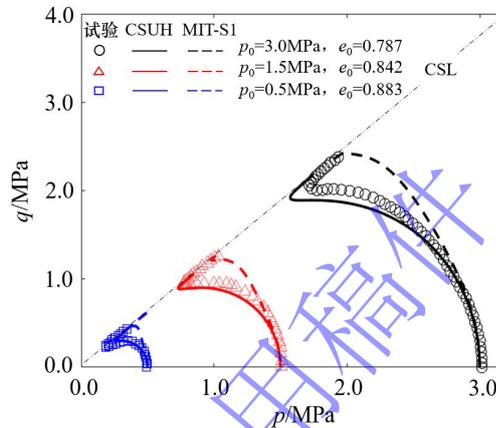
以 Toyoura 砂不排水试验为例, 在图 7(a)中三个初始状态点 A、B、C 均位于参考线 LCC 和 NCL 下方, 且在图 7(b)中其不排水剪切应力路径试验数据均发生了明显的相变。然而, 采用各向同性的 MIT-S1 模型对于初始状态点 A、B、C 不排水试验进行预测, 计算结果显示 A 点不排水应力路径发生了较为明显的相变, B 点仅发生一点相变, C 点基本不发生相变, 这与实验结果不符。因此, 基于参考线 LCC 定义的状态参量  $\delta_p$  无法合理刻画砂土的剪胀性, 不能准确描述砂

土在剪切过程中产生的剪胀量。

CSUH 模型与之不同,参考线砂土 NCL 能够明确划分砂土发生剪胀剪缩的界限,与  $\delta_p$  相比,以砂土 NCL 为参考线定义的状态参量  $\xi$  能够定性定量的描述砂土的剪胀性。当  $\xi > 0$ , 表明砂土当前状态处于疏松状态, 剪切过程中只会发生剪缩,  $|\xi|$  越大, 剪缩性越强。当  $\xi < 0$ , 表明砂土当前状态处于密实状态, 剪切将会发生剪胀,  $|\xi|$  越大, 剪胀性越强<sup>[13]</sup>。如图 7(b) 所示, 与 MIT-S1 模型预测结果相比, 以  $\xi$  为状态参量的 CSUH 模型能够更好的预测三个初始状态 A、B、C 在不排水试验中的剪胀性。



(a) 砂土的初始状态以及参考线



(b) MIT-S1 和 CSUH 模型不排水试验预测结果

图 7 砂土参考线 LCC 和 NCL 描述剪胀性的区别

Fig. 7 The difference between reference line LCC and NCL in describing the shear dilatancy of sands

### 3.3 黏土砂土状态参量的统一性

黏土和砂土统一本构模型统一的意义是在同一个模型框架下仅通过改变模型的土性参数即可实现黏土、砂土的应力应变关系的准确计算。通过分析发现, 当采用 MIT-S1 模型状态参量  $\delta_p$  去进行黏土应力应变关系计算时, 出现了不适用的问题。在不排水路径加载下, 正常固结状态黏土剪切前的初始状态 ( $\eta=0$ ) 在 NCL 上, 有  $\delta_p=0$ 。剪切过程中硬化参量  $\alpha$  硬化, 数值增加, 而孔隙比  $e$  不变,  $p_b$  保持不变, 将会出现  $\delta_p < 0$  的情况, 此时的硬化参量增量方程式(11)不

符合正常固结黏土的压硬性规律, 因此状态参量  $\delta_p$  不能合理描述黏土不排水条件下的应力应变关系。

Pestana 和 Whittle 为了在 MIT-S1 模型的基础上进一步描述不同超固结程度黏土的应力应变特性, 又在 MIT-S1 模型中引入了边界理论, 通过当前加载面和第一加载面、边界面之间的映射关系  $l_1$  式(14)表示黏土的超固结程度, 并作用于模型的塑性势函数  $g$  和塑性模量  $A$ , 以实现对超固结黏土应力应变关系的计算, 如图 8 所示。然而, 这造成 MIT-S1 模型状态参量的表达式不能统一地表示黏土砂土的不同密实状态量, 不能对黏土和砂土的应力应变关系进行统一描述。

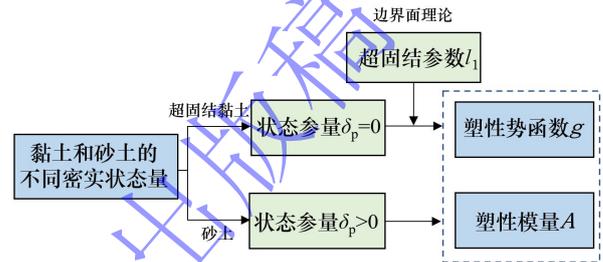


图 8 状态参量  $\delta_p$  在 MIT-S1 模型中的作用机制

Fig. 8 The mechanism of state parameter  $\delta_p$  in MIT-S1 model

以模型计算  $\eta=0$  的等向压缩路径为例, 推导得到 MIT-S1 模型对不同密实度砂土和不同超固结程度黏土的塑性体积应变增量计算公式为:

$$d\varepsilon_v^p = \frac{e(1-\delta_p^0)(1-l_1)(\lambda-\kappa)p \cdot dp}{(1+e)p^{12}} \quad (27)$$

对于砂土塑性体积应变的计算, MIT-S1 模型当前加载面为边界面, 映射关系  $l_1$  为 0, 采用状态参量  $\delta_p$  表示砂土的不同密实状态量, 式(27)转化为式(10)计算不同密实状态砂土的等向压缩塑性体变; 对于黏土, MIT-S1 模型则是令状态参量  $\delta_p$  恒为 0, 仅通过采用边界面映射关系  $l_1$  计算不同超固结程度黏土的等向压缩塑性体变。由上可以看出, MIT-S1 模型实质上采用了两套状态参量来描述黏土和砂土的应力应变特性, 并需要针对黏土和砂土的不同对模型进行调整计算。

对于塑性剪应变增量的计算, 由于 MIT-S1 模型状态参量的不统一, 使得模型的剪胀方程的表达上也没有统一, 如式(28)、(29)所示。

MIT-S1 模型砂土的剪胀方程为:

$$d = \begin{cases} \frac{(M^2 - \eta^2) \frac{p}{\alpha} (1 - \delta_p)^{m'}}{\chi \frac{\partial g}{\partial p} \eta + \frac{c^2 |\eta|}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial q}}, & \eta^2 \leq M^2 \\ \frac{(M^2 - \eta^2) \frac{p}{\alpha}}{\chi \frac{\partial g}{\partial p} \eta + \frac{c^2 |\eta|}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial q}}, & \eta^2 \geq M^2 \end{cases} \quad (28)$$

MIT-S1 模型黏土的剪胀方程为:

$$d = \frac{(M^2 - \eta^{12}) \frac{p^1}{\alpha^1} (1 - l_1) - 2l_1 |\eta^1| \left| \frac{q^1}{\alpha^1} \right|}{\chi \frac{\partial g^1}{\partial p} \eta^1 + \frac{c^2 |\eta^1|}{\alpha^1} \frac{\partial f^1}{\partial q}} \quad (29)$$

由此可见模型在黏土砂土屈服面方程表达式上实现了统一, 但由于没有实现砂土黏土状态参量的统一表达, 使得塑性模量  $A$  和塑性势函数  $g$  的表达上没有统一, 黏土和砂土塑性应变增量的计算公式也没有统一, 因此 MIT-S1 模型并没有完全实现不同密实状态黏土和砂土应力应变关系的统一计算。

与 MIT-S1 模型相比, CSUH 模型砂土参考线 ACL 为曲线, 可直接用相对孔隙比  $\zeta$  表示砂土的密实状态量, 如图 4 所示。黏土参考线 ACL 为直线, 当前状态与参考线水平距离  $\ln OCR$  和垂直距离  $\zeta$  可以通过三角形几何关系进行互换, 如图 9 所示。

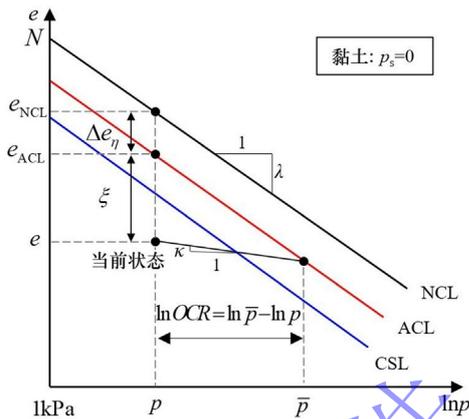


图 9 状态参量  $\zeta$  和  $OCR$  的换算关系  
Fig. 9 Conversion relationship between state parameters  $\zeta$  and  $OCR$

黏土的状态参量  $\zeta$  和超固结度  $OCR$  的换算关系表达式为:

$$OCR = \exp\left(\frac{\zeta}{\lambda - \kappa}\right) \quad (30)$$

$\zeta$  和  $OCR$  均能反映黏土的超固结程度,  $\zeta$  作为状态参量能够统一表示黏土和砂土的不同密实状态量。

如图 10 所示, 统一表示黏土和砂土不同密实状态量的状态参量  $\zeta$ , 通过作用于状态相关的  $M_Y$ 、 $M_c$ 、 $H$  方程表达式, 使得模型能准确刻画黏土砂土的三个基本特性<sup>[6]</sup>。基于此, CSUH 模型能够在统一的模型框

架和统一的计算公式下仅通过调整模型参数便能实现黏土和砂土应力应变关系的统一计算。

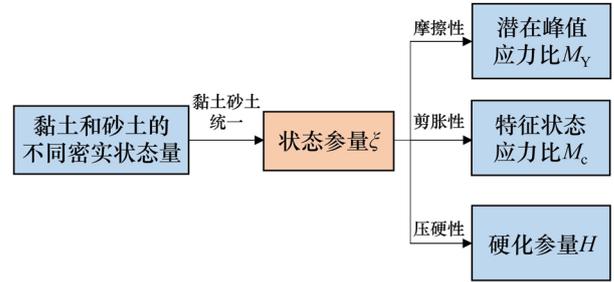


图 10 状态参量  $\zeta$  在 CSUH 模型中的作用机制  
Fig. 10 The mechanism of state parameter  $\zeta$  in CSUH model

在等向压缩条件下 CSUH 模型计算不同密实度砂土和不同超固结程度黏土的塑性体积应变增量计算公式是统一的, 表达式为:

$$d\varepsilon_v^p = \frac{M_c^4}{M_Y^4} \cdot \left( \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \right) \frac{dp}{p + p_s} \quad (31)$$

结合式(22)、(23)可知, CSUH 模型通过一个状态参量  $\zeta$ , 便能够统一计算黏土砂土不同密实状态下的等向压缩塑性体变。对于塑性剪应变增量的计算, 黏土砂土的剪胀方程也能够统一表达, 如式(32)所示。

$$d = \frac{M_c^2 - \eta^2}{2\eta} \quad (32)$$

### 4 模型算例

本节分别采用 MIT-S1 和 CSUH 模型对 Toyoura 砂(编号 S1)、Lower Cromer Till 黏土(编号 C1)的三轴不排水和排水试验进行预测对比, 以验证基于状态参量  $\zeta$  的 CSUH 模型计算结果的准确性。MIT-S1 模型采用了 16 个土性参数计算土的应力应变关系, 如表 1 所示。CSUH 模型所需参数更少, 仅采用了 8 个土性参数, 如表 2 所示。虽然两个模型对压缩参数  $\lambda$  定义相同, 但由于 MIT-S1 和 CSUH 模型分别采用了  $\ln e - \ln p$  和  $e - \ln p$  空间坐标系来描述土的等向压缩路径, 因此两个模型对于相同土的压缩参数  $\lambda$ , 其值是不同的。

表 1 MIT-S1 模型参数

Table 1 MIT-S1 model parameters

	$\phi_{cs}$	$\phi_{mr}$	$n$	$m'$	$\lambda$	$\theta$	$D$	$r$	$h$	$C_b$	$v_0$	$\omega$	$\omega_s$	$p_{ref}$	$K_{0NC}$	$\Psi$
S1	31°	28.5°	2.45	0.55	0.370	0.2	0	0	0	750	0.233	1	2.5	5500	0.49	50
C1	30°	42°	0	0.65	0.167	0	0.04	0.8	6.0	450	0.225	0.6	8	1.418	0.5	20

表2 CSUH 模型参数

Table 2 CSUH model parameters

	$M$	$\lambda$	$\kappa$	$\nu$	$N$	$Z$	$\chi$	$m$
S1	1.25	0.135	0.04	0.3	1.973	0.934	0.4	1.8
C1	1.16	0.064	0.015	0.1	0.775	0.775	0.25	5

4.1 Toyoura 砂

(1)三轴压缩不排水

图 11 为初始孔隙比  $e_0=0.756$  的 Toyoura 砂在不同围压条件下的三轴压缩不排水试验结果，以及 MIT-S1、CSUH 两个模型预测结果。由图 11 可以看出两个模型预测结果与试验数据基本吻合，都能够很好地描述砂土不排水条件下的应力应变关系。但在图 11(b)砂土不排水应力路径的预测中，MIT-S1 模型预测的不排水路径相变拐点均位于  $\eta=M$  处，与试验结果不符，这是因为 MIT-S1 模型剪胀方程式(28)定义恒定在  $\eta=M$  时发生相变。CSUH 模型考虑了当前状态对特征状态应力比  $M_c$  的影响，定义了状态相关的剪胀方程式(32)，预测结果在  $\eta=M_c$  时发生相变。因此与 MIT-S1 模型相比，CSUH 模型能够准确预测砂土相变的拐点，所预测的不排水路径与试验结果更为相符。

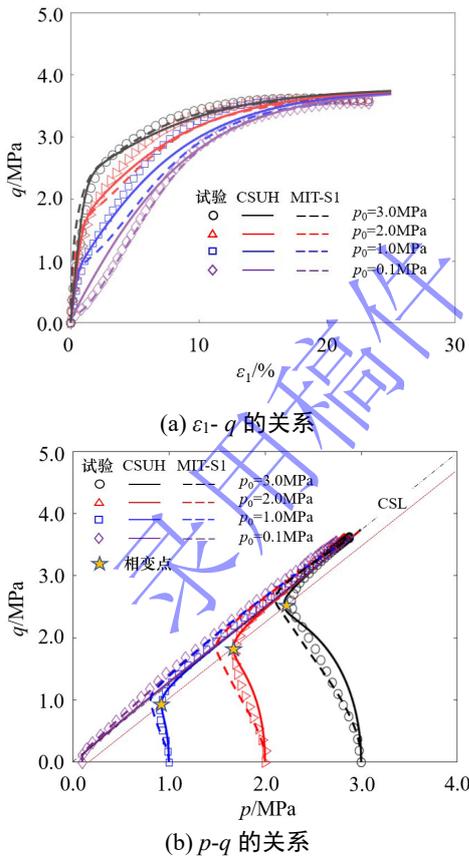


图 11  $e_0=0.756$  的 Toyoura 砂三轴压缩不排水试验结果和模型预测结果<sup>[14]</sup>

Fig. 11 The undrained triaxial compression test results and model simulation results of Toyoura sand with  $e_0=0.756$

(2)三轴压缩排水

图 12 为不同初始孔隙比的 Toyoura 砂在初始围压

$p_0=500$ kPa 下的三轴压缩排水试验结果，以及两个模型预测结果。由图 12 可见，MIT-S1 模型预测剪缩体积变形普遍偏小，CSUH 模型预测曲线与试验结果更吻合。通过对模型预测曲线与试验数据进行 MRE 误差分析<sup>[15]</sup>，MIT-S1 模型整体预测曲线误差为 0.21，CSUH 模型整体预测曲线误差为 0.12。相比之下，CSUH 模型预测误差更小，结果更加精确。分析其原因在于，MIT-S1 模型以 LCC 作为判断剪胀剪缩的参考线定义状态参量  $\delta_p$ ，过高估计了砂土的剪胀量，使得预测结果剪缩变形偏小，强度偏硬，偏危险；CSUH 模型以 NCL 作为判断剪胀剪缩的参考线定义状态参量  $\zeta$ ，合理刻画了砂土剪胀性，能够准确描述剪切过程中的体积变化，预测结果与试验基本吻合。

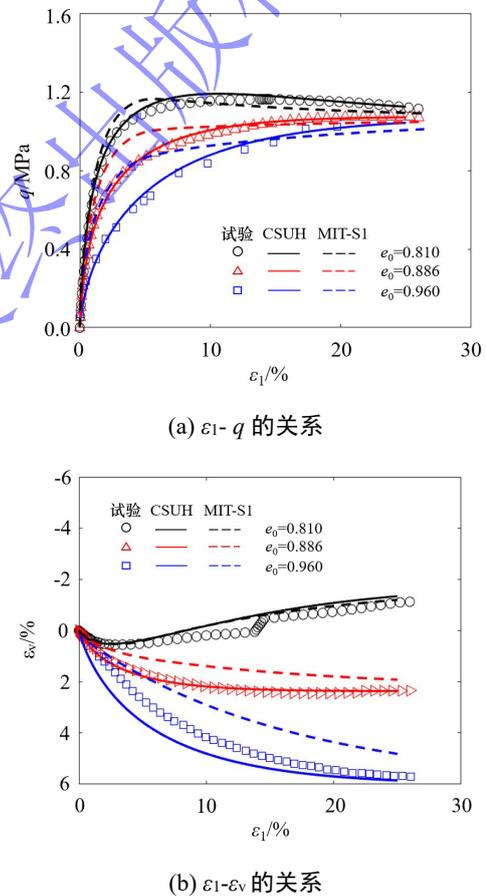


图 12 Toyoura 砂在  $p_0=500$ kPa 下的三轴压缩排水试验结果和模型预测结果<sup>[16]</sup>

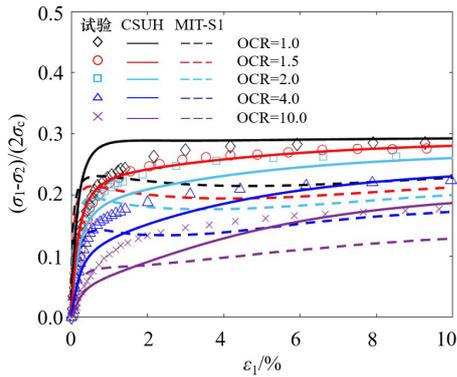
Fig. 12 The drained triaxial compression test results and model simulation results of Toyoura sand at  $p_0=500$ kPa

4.2 Lower Cromer Till 黏土

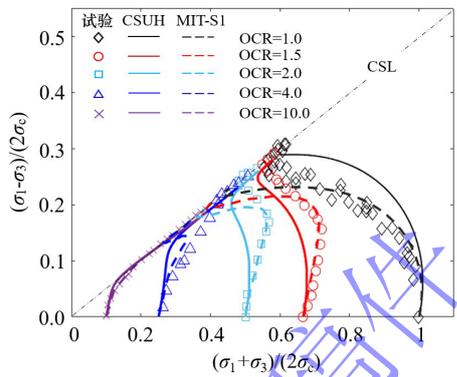
(1)三轴压缩不排水

图 13 为不同超固结度的 Lower Cromer Till 黏土三轴压缩不排水试验结果，以及 MIT-S1、CSUH 两个模型预测结果。由图 13 可见，MIT-S1 模型预测曲线与试验结果吻合的较差，预测强度要明显低于试验数据，通过对  $\varepsilon_1$ - $q$  曲线进行 MRE 误差分析，MIT-S1 模型预测曲线误差为 0.55。预测曲线误差为 0.21。相比

之下, MIT-S1 模型预测误差较大, CSUH 模型预测误差更小, 结果更精确。分析其原因在于, 正常固结黏土的不排水应力路径更偏向于椭圆型屈服面, MIT-S1 模型将砂土水滴型屈服面直接应用到黏土, 屈服面形状不能很好的适应正常固结黏土的不排水路径, 导致预测的不排水应力路径与试验数据之间产生偏离。而 CSUH 模型屈服面能够通过调节参数  $\chi$ , 从水滴型屈服过渡到椭圆型屈服面, 屈服面能够很好的适应砂土和黏土。



(a)  $\epsilon_1 - q$  的关系



(b)  $p - q$  的关系

图 13 Lower Cromer Till 粘土的三轴压缩不排水试验结果和模型预测结果<sup>[17]</sup>

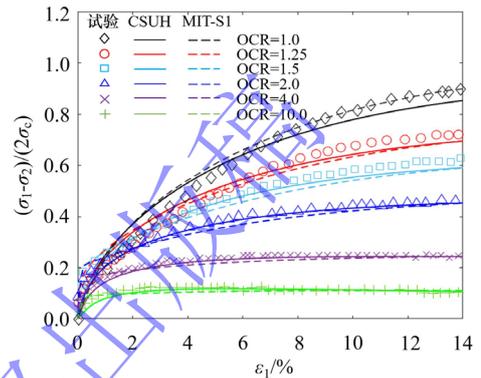
Fig. 13 The undrained triaxial compression test results and model simulation results of Lower Cromer Till clay

(2) 三轴压缩排水

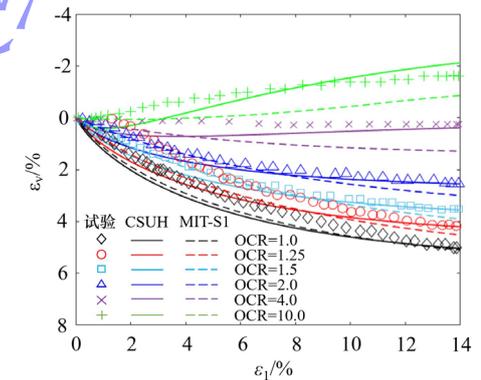
图 14 为不同超固结度的 Lower Cromer Till 黏土三轴压缩排水试验结果, 以及 CSUH、MIT-S1 两个模型预测结果。由图 14 可见, 两个模型预测结果与试验数据基本吻合, 都能较好地描述不同密实程度的黏土排水剪切条件下的应力-应变特性。

综上, 通过两个模型对黏土砂土试验结果的预测对比, 能够发现由于 CSUH 模型所定义的状态参量  $\zeta$  能够准确统一把握黏土和砂土两种土类的基本特性, 并通过  $M_c$ 、 $M_Y$  简单合理地作用于模型之中, 这使得模型能够在构造简单, 仅采用 8 个模型参数的前提下,

模型预测结果做到与试验结果基本吻合。而 MIT-S1 模型所定义的状态参量  $\delta_p$  不能准确刻画砂土的剪胀性, 对不同土类基本力学特性的共性定量描述还存在局限, 所以只有通过增加模型参数, 采用多达 16 个模型参数来考虑土的各种复杂力学特性(各向异性和小应变非线性弹性), 以弥补这个不足。但即便是这样也不能较好地统一描述不同土类的应力应变特性, 相比之下 MIT-S1 模型的预测精度也要低于 CSUH 模型。



(a)  $\epsilon_1 - q$  的关系



(b)  $\epsilon_1 - \epsilon_v$  的关系

图 14 Lower Cromer Till 粘土的三轴压缩排水试验结果和模型预测结果<sup>[17]</sup>

Fig. 14 The drained triaxial compression test results and model simulation results of Lower Cromer Till clay

### 5 结 论

本文对比了 MIT-S1 和 CSUH 模型状态参量之间的区别, 分析验证了以  $\zeta$  作为状态参量的 CSUH 模型的优越性, 并得到以下结论:

(1) 基于  $\delta_p$  的硬化参量  $\alpha$  没有考虑当前状态对相变的影响, 也没有考虑不同状态土的强度特性对土剪切硬化的影响。而  $\zeta$  通过状态相关的  $M_c$  和基于伏斯列夫强度规律的  $M_Y$  影响不同状态土的硬化参量  $H$ , 能够准确预测相变转换点和峰值强度点, 在描述不同状态土的剪缩剪胀, 硬化软化时, 更为合理准确。

(2) MIT-S1 模型以砂土 LCC 为初始参考线, 但

LCC 不能作为砂土剪缩和发生剪胀的分界线, 所定义的  $\delta_p$  不能准确刻画砂土的剪胀性。而 CSUH 模型以砂土 NCL 为初始参考线所定义的状态参量  $\zeta$  能够准确地定性定量刻画砂土的剪胀性。

(3) MIT-S1 模型采用了两套不同表达的状态参量, 不能完全统一描述黏土砂土的应力应变关系。CSUH 模型统一了状态参量  $\zeta$  的表达式, 能够统一表示黏土砂土不同密实状态量。相比之下 CSUH 模型真正实现了黏土砂土的统一。

### 参考文献:

- [1] WROTH C P, HOULSBY G T. Soil mechanics-property characterization and analysis procedures [C]// Proceedings of 11th International Conference Soil Mechanics and Foundation Engineering, ISSMFE, San Francisco, 1985, 1: 1-55.
- [2] PESTANA J M, WHITTLE A J. Formulation of a unified constitutive model for clays and sands[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1999, 23(12): 1215-1243.
- [3] YAO Y P, LIU L, LUO T, et al. Unified hardening (UH) model for clays and sands[J]. Computers and Geotechnics, 2019, 110: 326-343.
- [4] PESTANA J M, WHITTLE A J. Compression model for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 1995, 43(4): 611-631.
- [5] Yao Y P, He G, Liu L, et al. A basic constitutive model for sands[J]. Acta Geotechnica, 2022, 17(5): 2021-2027.
- [6] 姚仰平. 土的统一硬化本构理论及其工程应用[J]. 中国科学: 技术科学, 2024, 54(02): 179-195. (Yao Yang-ping. Unified hardening (UH) constitutive theory for soils and its engineering application[J]. Sci Sin Tech, 2024, 54(02): 179-195. (in Chinese))
- [7] MANZARI MT, DAFALIAS Y F. A critical state two-surface plasticity model for sands[J]. Géotechnique, 1997, 47(2): 255-272.
- [8] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, 5(4): 49-460.
- [9] 蔡正银, 李相菘. 砂土的剪胀理论及其本构模型的发展[J]. 岩土工程学报, 2007(08): 1122-1128. (CAI Zheng-yin, LI Xiang-song. Development of dilatancy theory and constitutive model of sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(8): 13-19. (in Chinese))
- [10] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays[J]. Géotechnique, 2009, 59(5):

451-469.

- [11] HASHIGUCHI K. Subloading surface model in unconventional plasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 1989, 25(8): 917-945.
- [12] WHITTLE A J, KAVVADAS M. Formulation of the MIT-E3 constitutive model for overconsolidated clays. [J]. Journal of Geotechnical Engineering 1994, 120(1):173-198.
- [13] 姚仰平, 陈凯. 砂土的密度相关状态参量的划分及分析[J]. 土木工程学报, 2023, 56(09): 116-124. (YAO Yang-ping, CHEN Kai. Classification and analysis of density-dependent state parameters for sand[J]. China Civil Engineering Journal, 2023, 56(9): 116-124. (in Chinese).)
- [14] PESTANA J M, WHITTLE A J, SALVATI L A. Evaluation of a constitutive model for clays and sands: Part I - Sand behaviour[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, 26: 1097-1121.
- [15] Zhu B L, Chen Z Y. Calibrating and validating a soil constitutive model through conventional triaxial tests: an in-depth study on CSUH model[J]. Acta Geotechnica, 2022, 17(8): 3407-3420.
- [16] ISHIHARA K. Liquefaction and flow failure during earthquakes[J]. Geotechnique, 1993, 43(3): 351- 451.
- [17] PESTANA J M, WHITTLE A J, GENS A. Evaluation of a constitutive model for clays and sands: Part II - clay behaviour[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, 26: 1123-1146.

### 附录 A

$c$  的表达式为:

$$c^2 = c_a^2 + \left(3 - \frac{c_a^2}{2}\right) J_{3\eta}, \quad c_a^2 = \frac{8 \sin^2 \phi_m}{3 + \sin^2 \phi_m}, \quad J_{3\eta} = \frac{\sqrt{6}}{18} \eta^3$$

$$\cotan \phi_m = \cotan \left(45^\circ + \frac{\phi_{cs}}{2}\right) + \left[ \cotan \phi_{mr} - \cotan \left(45^\circ + \frac{\phi_{cs}}{2}\right) \right] (e)^n$$

MIT-S1 模型定义临界状态破坏准则为:

$$h = M^2 - \eta^2 = 0,$$

$$M^2 = M_a^2 + \left(3 - \frac{M_a^2}{2}\right) J_{3\eta}, \quad M_a^2 = \frac{8 \sin^2 \phi_{cs}}{3 + \sin^2 \phi_{cs}}$$

MIT-S1 模型边界面插值关系:

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{\partial g^1}{\partial p} (1 - l_1) + \frac{\partial g^0}{\partial p} l_1, \quad A = \langle A^1 \rangle + A^0 \frac{l_1}{1 - l_1} \left(1 - \frac{\eta^{12}}{c^2}\right)^{1/2}$$

式中:  $\phi_{mr}$  为孔隙比  $e=1$  对应的最大摩擦角,  $\phi_{cs}$  为临界状态摩擦角,  $n$  为材料常数控制最大摩擦角  $\phi_m$  随当前孔隙比  $e$  变化的速率。