基于超对偶数微分的无约束应力更新算法

路德春*[1]，石安毓[1]，周鑫[2]，杜修力[1]
（1. 北京工业大学岩土与地下工程研究所，北京 100124；2. 清华大学土木工程系，北京 100084）

摘　要：加卸载判断和繁琐的解析求导运算一直是制约先进弹塑性模型数值应用的瓶颈问题。研究提出一种基于超对偶数微分方法的无约束应力隐式更新算法，有效解决了上述计算难点。针对加卸载判断问题，新算法利用光滑函数代替弹塑性本构方程组中的 *Karush-Kuhn-Tucker* 条件，将受不等式约束的非线性应力积分方程组问题，转化为无约束的最小化问题，计算时无需加卸载判断。针对导数计算问题，新算法利用超对偶数微分方法代替解析求导，获得光滑函数的 1 阶导数以及塑性势函数的 1 阶和 2 阶导数，用于构造非线性计算的迭代公式，以保证局部应力更新迭代和全局平衡迭代的二次收敛速度。数值算例表明，相较于其它数值微分方法，超对偶数微分方法不受截断误差和减法消去误差影响，计算结果等同于解析求导。最后，基于所提算法编写了光滑莫尔库伦塑性模型的 UMAT 子程序，并通过 3 个典型边值问题的数值分析，验证了算法的有效性和收敛性速度。

关键词：应力更新算法；塑性模型；超对偶数数值微分；一致性切线刚度矩阵；有限元法
中图分类号：TU452　　　**文献标识码**：A
作者简介：路德春(1977－　　　　)，男，教授，博士，主要从事岩土与城市地下工程等方面的教学和科研。E-mail: dechun@bjut.edu.cn。

An unconstrained stress update algorithm based on the hyper dual step derivative approximation

LU De-chun*[1], SHI An-yu[1], ZHOU Xin[2], DU Xiu-li[1]
(1. Institute of Geotechnical and Underground Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 2. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The loading/unloading judgment and analytical derivative operations have been the bottlenecks restricting numerical application of elastoplastic models. This work presents an unconstrained implicit stress update algorithm based on the hyper dual step derivative approximation, which solves the above calculation difficulties. Contrapose the problem of loading/unloading judgment, in the new algorithm, the nonlinear stress integral equations with inequality constraints are transformed into an unconstrained minimization problem by using the smooth function to replace the *Karush-Kuhn-Tucker* conditions. Thus, there is no need for loading/unloading judgement during the calculation. To solve the problem of derivative evaluation, the algorithm uses the hyper dual step derivative approximation instead of the analytical derivative to obtain the 1st derivative of smooth function and the 1st and 2nd derivatives of plastic potential function, which are used to construct iterative formulas for nonlinear calculation, ensuring the quadratic convergence speed of local stress update iterations and global equilibrium iterations. Numerical examples demonstrate that, compared with other numerical differentiation methods, the hyper dual step derivative approximation is free from truncation errors and subtraction cancellation errors, and its computational results are almost equivalent to analytical derivation. Finally, based on the proposed algorithm, a UMAT subroutine of smooth Mohr-Coulomb plastic model is programmed. The effectiveness and convergence speed are verified through numerical analyses of three typical boundary value problems.

Key words: stress update algorithm; plastic model; hyper dual number numerical differentiation; consistent tangent stiffness matrix; finite element method.

0 引　　言

弹塑性应力应变关系[1,2]通常用微分的形式来描述，在边值问题的数值计算中，需要结合特定积分策

基金项目：国家自然科学基金项目（52025084）；国家重点研发计划课题（2023YFC3009301）；中国科协青年人才托举工程项目（2023QNRC001）；中国博士后科学基金面上资助项目（2022M721884）
收稿日期：2024-02-19
*通讯作者（E-mail: dechun@bjut.edu.cn）

略，将其转换成代数方程进行求解。本构模型的数值算法也被称为应力更新算法或者本构积分算法[3]。基于选择的积分策略，应力更新算法可划分为显式和隐式两类。常用的显式积分策略有向前欧拉法、改进欧拉法[4]、指数映射法[5, 6]以及龙格-库塔法[7]，隐式的积分策略包括向后欧拉法[8]、广义中点积分[9]、广义梯形积分[10]等。由于隐式应力更新算法一般是无条件稳定的[11, 12]，并且不存在显式算法的误差累积，在弹塑性模型的数值计算中得到了广泛应用。

弹塑性模型的隐式计算，其核心任务是求解受加卸载不等式约束的非线性应力积分方程组。返回映射应力更新策略是处理加卸载不等式的常用计算框架，它首先假设在当前荷载步下，材料只发生弹性变形，并根据弹性虎克定律计算得到试探应力点。如果试探应力点在屈服面内部，说明假设正确，当前荷载步是弹性加载，否则便是塑性加载，需要采用塑性修正将应力点拉回到真实的屈服面上。返回映射策略已经被众多经典的应力更新算法所采用，例如最近投影点算法[13]、切平面算法[14]、半隐式算法[15]等。然而，由于这种计算范式需要进行加卸载判断，增加了弹塑性计算的复杂性。从数值优化的角度，国内外学者尝试将弹塑性问题中的不等式约束转换成等式约束，避免计算时的判断步骤。例如，Krabbenhoft 等[16]利用结合罚函数的原始-对偶内点法，将弹塑性有限元问题转换为等价的二阶锥规划问题求解，并探讨了该算法对于理想塑性、软化塑性以及多屈服面塑性等问题的有效性。以修正剑桥模型为例，Zhou 等[17]利用光滑函数等价代替 *Karush-Kuhn-Tucker*（*KKT*）条件，将非光滑的弹塑性问题转换成无约束的最小化问题，发展了一种无约束应力更新策略，计算时不用加卸载判断，为弹塑性模型的数值实现建立了更简洁的计算框架。

另一方面，非线性应力积分方程组一般需要迭代求解，该过程需要方程组的导数构造迭代公式。当本构模型较为复杂时，手动的解析求导会愈发困难，且容易出错[18]。鉴于此，研究者们陆续采用数值微分方法代替繁琐的解析求导。如向前差分方法（forward difference method，FDM）、中心差分方法（central difference method，CDM）、复数微分方法（complex step derivative approximation，CSDA）和超对偶数微分方法（hyper dual step derivative approximation，HDSDA）。Pérez 等[18]将 FDM 和 CDM 用于弹塑性模型的隐式计算，并指出数值的切线算子可以保证全局和局部迭代计算时的二次收敛速度。Choi 和 Yoon[19]利用 CDM 改进了经典的隐式返回映射应力更新算法，并求解了相关联和非关联流动的各向异性塑性模型。Zhou 等[20]利用 CSDA 计算一致性切线刚度矩阵，提出了一种隐式应力更新算法，并用于塑性损伤模型的数值实现。数值微分方法可有效降低复杂模型的实现难度。然而误差分析[20]指出，FDM、CDM、CSDA 的微分结果会受到数值误差的影响，主要包括截断误差和减法消去误差。随着扰动值减小，前者逐渐减小而后者则会不断增大，使用这些方法时需要小心选择扰动值。HDSDA 是一种近年来新提出的高精度数值微分方法，其微分结果不受上述两种数值误差的影响，等同于解析导数，但该方法在弹塑性模型中的应用，尚未得到足够重视。

本文首先以莫尔库伦塑性模型为例，回顾了弹塑性模型的隐式应力积分格式。接着，通过无约束应力更新策略将其转换为无约束最小化问题，并采用线搜索方法进行迭代求解。进一步，利用 HDSDA 代替解析求导，获得了高精度的数值雅克比矩阵和一致性切线刚度矩阵。基于所提算法与 ABAQUS 软件平台，编写了莫尔库伦塑性模型的 UMAT 子程序。最后，通过对悬臂式基坑开挖、条形基础承载力预测等边值问题的数值模拟，检验了所提算法的正确性和有效性。

1 光滑的莫尔库伦塑性模型

本章简要概述了经典的莫尔库伦塑性模型，该模型具有清晰的物理含义和广泛的应用场景，因此选择其作为本文所提算法的应用对象。

1.1 屈服函数

莫尔库伦屈服准则可表示为应力不变量的函数：

$$f = R_{mc}(\theta)q + Mp - K \tag{1}$$

式中，p 和 q 分别代表平均应力和广义剪应力。

$$p = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{1},\ q = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{s}:\mathbf{s}} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}$ 为 2 阶应力张量，$\mathbf{1}$ 为 2 阶单位张量，$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{1}$ 是偏应力张量。本文规定以拉为正，以压为负。参数 M 和 K 由黏聚力 c 和内摩擦角 φ 确定：

$$M = \frac{6\sin\varphi}{(3-\sin\varphi)\sqrt{3}},\ K = \frac{6c\cos\varphi}{(3-\sin\varphi)\sqrt{3}} \tag{3}$$

式中，黏聚力 c 被用作硬化函数，表示为：

$$c = c_0 + H_{\mathrm{p}}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{p}} \tag{4}$$

式中，c_0 为初始黏聚力，$\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{p}} = \sqrt{2\left\|\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - \varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}\mathbf{1}/3\right)\right\|/3}$ 为等效塑性剪应变，$\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}$ 为塑性体积应变，H_{p} 表示塑性硬化模量。$R_{mc}(\theta)$ 是屈服函数在偏应力平面上的形状

函数。

$$R_{\rm MC}(\theta)=\frac{(1-\sin\varphi)}{(3-\sin\varphi)}\sin\theta+\frac{(3+\sin\varphi)}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}\cos\theta \quad (5)$$

式中，θ 为洛德角：

$$\theta=\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right) \quad (6)$$

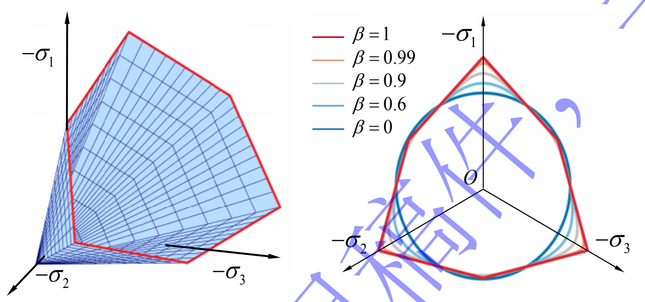
式中，J_2 和 J_3 是偏应力 **s** 的第 2 和第 3 应力不变量。

原始的莫尔库伦屈服准则在偏应力平面上有 6 个非光滑的角点，如图 1 所示。角点处导数的剧烈变化，可能导致迭代计算收敛缓慢甚至失败。本文采用张等人[21]提出的光滑的 $R_{mc}(\theta)$ 函数代替式(5)，其形式为：

$$R_{mc}(\theta)=\alpha_w\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(\beta_1\cos 3\theta)-\frac{\pi}{6}\gamma\right] \quad (7)$$

式中，$\beta_1\in[0,1]$ 为屈服面的光滑参数，$\beta_1=0$ 时，式(7)将退化为原始的莫尔库伦屈服准则。本文推荐 $\beta_1=0.999$。参数 α_w 和 γ 定义为：

$$\alpha_w=\frac{1}{\cos\left[(\bar{\gamma}_w+1)\frac{\pi}{6}\right]},\ \gamma=1-\bar{\gamma}_w,\ \bar{\gamma}_w=\frac{6}{\pi}\arctan\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right) \quad (8)$$



(a) 主应力空间　　(b) 偏平面

图 1 莫尔库伦屈服函数

Fig. 1 Mohr-Coulomb yield function

1.2 塑性势函数

本文采用双曲线形式的 Menetrey-Willam 函数[22]作为塑性势函数，与 ABAQUS 软件材料库中莫尔库伦模型的选择一致，其表达式为

$$g=\sqrt{(\epsilon c_0)^2+(R_{mw}q)^2}-p\tan\psi-c_0 \quad (9)$$

式中，ψ 为剪胀角，ϵ 为子午线的偏心率，ϵ 默认为 0.1。R_{mw} 控制着塑性势函数在偏平面上的形状。

$$R_{mw}=\frac{1}{2(1-e^2)\cos\theta+(2e-1)}\times\frac{4(1-e^2)\cos^2\theta+(2e-1)^2R_{\rm MC}\left(\frac{\pi}{3},\varphi\right)}{\sqrt{4(1-e^2)\cos^2\theta+5e^2-4e}} \quad (10)$$

式中，$R_{\rm MC}(\pi/3,\varphi)$ 为 $\theta=\pi/3$ 时 $R_{\rm MC}(\theta)$ 的值，$e\in(0.5,1]$ 为偏心率参数，$R_{\rm MC}(\pi/3,\varphi)$ 和 e 表示为：

$$e=\frac{3-\sin\varphi}{3+\sin\varphi},\ R_{\rm MC}\left(\frac{\pi}{3},\varphi\right)=\frac{1}{2\cos\varphi}-\frac{1}{6}\tan\varphi \quad (11)$$

2. 无约束应力更新算法

岩土材料具有非线性特性，其塑性模型一般通过微分来描述应力-应变关系，具体如下：

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}:(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}-\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}) & \text{胡克定律}\\ \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}=\mathrm{d}\phi\mathbf{r} & \text{流动法则}\\ \mathrm{d}\kappa=\mathrm{d}\phi h^{\rm p} & \text{硬化律}\\ \mathrm{d}\phi\ge 0,\ f\le 0,\ \mathrm{d}\phi f=0 & KKT\text{条件}\end{cases} \quad (12)$$

式中，**D** 为四阶弹性刚度张量，d 为微分算子，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}$ 表示 2 阶应变张量与其塑性部分，$\mathrm{d}\phi$ 为塑性乘子。$\mathbf{r}$ 是塑性流动方向，$\mathbf{r}=\partial g/\partial\boldsymbol{\sigma}$。$\kappa$ 表示塑性内变量，$h^{\rm p}$ 是塑性内变量的梯度。对于 1.1 节中介绍的莫尔库伦塑性模型，$\kappa=\varepsilon_{\rm d}^{\rm p}$，$h^{\rm p}=\partial g/\partial q$，屈服函数 f 和塑性势函数 g 的表达式见式(1)和式(9)。式 $(12)_4$ 是弹塑性模型的加载/卸载不等式，也称为 *KKT* 条件。

基于向后欧拉方法，将式(12)在时间域 $[t_n,\ t_{n+1}]$ 上积分，可得以下的非线性隐式应力积分方程组：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}-\boldsymbol{\sigma}_n-\mathbf{D}:(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}-\Delta\phi_{n+1}\mathbf{r}_{n+1})=\mathbf{0}\\ \kappa_{n+1}-\kappa_n-\Delta\phi_{n+1}h_{n+1}^{\rm p}=0\\ \Delta\phi_{n+1}\ge 0,\ f_{n+1}\le 0,\ \Delta\phi_{n+1}f_{n+1}=0\end{cases} \quad (13)$$

KKT 条件对材料在加/卸载时允许应力和应变状态进行了限制。即在弹性情况下，要求 $\Delta\phi_{n+1}=0$ 和 $f_{n+1}\le 0$，在塑性情况下，要求 $\Delta\phi_{n+1}>0$ 和 $f_{n+1}=0$。

2.1 线搜索-无约束应力更新算法

本节采用 Zhou 等[20]提出的线搜索-无约束应力更新算法求解式(13)。该算法的核心思想是，首先利用 *Fischer-Burmeister* 光滑函数等价代替式 $(13)_3$ 中的 *KKT* 条件，将受约束的非线性方程组问题转化为无约束的最小化问题，再采用线搜索方法迭代求解。*Fischer-Burmeister* 光滑函数的表达式为：

$$F=\sqrt{(c_{\rm d}\Delta\phi_{n+1})^2+f_{n+1}^2+2\beta_2}-c_{\rm d}\Delta\phi_{n+1}+f_{n+1}=0$$

(14)

式中，c_d 是平衡量纲的参数，$c_d=\max\{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\|,1\}$，$\beta_2$ 是光滑参数，控制着光滑曲线与 *KKT* 条件的逼近程度，它的推荐值为 $\beta_2=10^{-15}$，如图 2 所示。

利用式(14)代替式 (13)$_3$，可得

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}_{n+1}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}-\boldsymbol{\sigma}_n-\mathbf{D}:(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}-\Delta\phi_{n+1}\mathbf{r}_{n+1})\\ \kappa_{n+1}-\kappa_n-\Delta\phi_{n+1}h^{\mathrm{p}}_{n+1}\\ \sqrt{(c_d\Delta\phi_{n+1})^2+f_{n+1}^2+2\beta_2}-c_d\Delta\phi_{n+1}+f_{n+1}=0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\0\\0\end{Bmatrix}\tag{15}$$

式中，为 $\{\mathbf{x}\}_{n+1}=\{\boldsymbol{\sigma}_{n+1},\kappa_{n+1},\Delta\phi_{n+1}\}$。在无约束应力更新策略中，材料无论是弹性变形还是塑性变形，其应力-应变行为都可以用一组光滑方程组统一描述。这种计算范式避免了弹塑性应力更新时的加卸载判断问题。

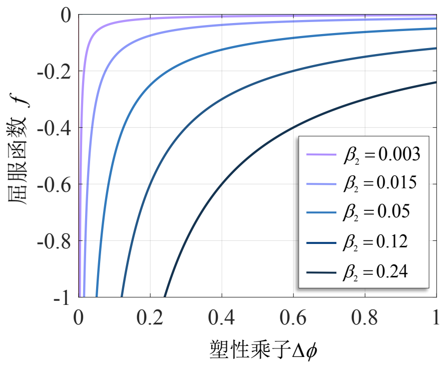


图 2 不同 β_2 值下的平滑曲线

Fig. 2 Smooth curves with the different values of β_2

在数值优化领域，由式(15)定义的光滑非线性方程组问题等价于如下的无约束的最小化问题。

$$\min\ \psi(\{\mathbf{x}_{n+1}\})=\frac{1}{2}\{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1})\}^T\{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1})\}\tag{16}$$

式中，ψ 是最小化问题的价值函数，其在多维空间中的最小值点 $\psi(\{\mathbf{x}_{n+1}\})=0$ 也是非线性方程组 $\{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1})\}=\{\mathbf{0}\}$ 的解。

采用线搜索方法构造求解式(16)的迭代公式，具体形式如下：

$$\{\mathbf{x}\}_{n+1}^{k+1}=\{\mathbf{x}\}_n^k+\alpha^k\{\mathbf{d}\}_{n+1}^k\tag{17}$$

式中，α^k 和 $\{\mathbf{d}\}^k$ 分别为第 k 次迭代中的搜索步长和搜索方向，$\{\mathbf{d}\}^k$ 由牛顿法的搜索方向确定：

$$\{\mathbf{d}\}_{n+1}^k=-[\mathbf{J}]_k^{-1}\{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}_{n+1}^k\tag{18}$$

式中，$[\mathbf{J}]$ 为雅可比矩阵，是非线性方程组 $\{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}$ 对变量 $\{\mathbf{x}\}$ 的导数。搜索步长 α^k 可通过下列的迭代公式和接受准则确定：

$$\begin{cases}Accept\ \alpha_j^k\ \ and\ \ exit & IF\ \ \psi(\alpha_j^k)<(1-2\rho\alpha_j^k)\psi(0)\\ \alpha_{j+1}^k=\max\left\{\varsigma\alpha_j^k,\dfrac{\psi(0)}{\psi(0)+\psi(\alpha_j^k)}\right\} & ELSE\end{cases}\tag{19}$$

式中，α_0^k 的初始值设为 1。ρ 和 ς 是算法参数，它们的推荐值为 $\rho=10^{-4}$，$\varsigma=0.1$。线搜索算法通过优化搜索步长提高解的收敛性，可视为牛顿算法的改进版。当 $\alpha^k=1$ 时，线搜索算法会退化为标准的牛顿算法。

2.2 局部迭代和全局迭代的切线算子

在弹塑性模型的隐式计算中，需要采用相应的切线算子保证局部迭代和全局迭代解的二次收敛性。对于局部（积分点）层面，要求的是非线性应力积分方程组的雅可比矩阵，在全局（结构）层面，则是一致性切线刚度矩阵。这两种切线算子均由大量的导数项构成，式(18)中雅可比矩阵 $[\mathbf{J}]$ 的导数项表示为：

$$[\mathbf{J}]=\left[\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{I}+\Delta\phi\mathbf{D}:\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} & \Delta\phi\mathbf{D}:\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\kappa} & \mathbf{D}:\mathbf{r}\\ -\Delta\phi\dfrac{\partial h^{\mathrm{p}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} & 1-\Delta\phi\dfrac{\partial h^{\mathrm{p}}}{\partial\kappa} & -h^{\mathrm{p}}\\ \dfrac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}} & \dfrac{\partial F}{\partial\kappa} & \dfrac{\partial F}{\partial\Delta\phi}\end{bmatrix}\tag{20}$$

式中，$\mathbf{I}$ 为 4 阶单位张量。为便于书写，上式省略了下标 $n+1$。$\mathbf{r}=\partial g/\partial\boldsymbol{\sigma}$，$h^{\mathrm{p}}=\partial g/\partial q$，$\partial F/\partial\boldsymbol{\sigma}$，$\partial F/\partial\kappa$ 和 $\partial F/\partial\Delta\phi$ 为一阶导数项；$\partial\mathbf{r}/\partial\kappa=\partial^2 g/(\partial\boldsymbol{\sigma}\partial\kappa)$，$\partial h^{\mathrm{p}}/\partial\kappa$，$\partial h^{\mathrm{p}}/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\partial\mathbf{r}/\partial\boldsymbol{\sigma}=\partial^2 g/\partial\boldsymbol{\sigma}^2$ 为二阶导数项。

考虑独立变量 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$，$\kappa_{n+1}$，$\Delta\phi_{n+1}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$，对式(15)进行全微分可得：

$$\begin{Bmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ \mathrm{d}\kappa\\ \mathrm{d}\Delta\phi\end{Bmatrix}_{n+1}=[\mathbf{J}]_{n+1}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{D}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&0&0\\ \mathbf{0}&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\\0\\0\end{Bmatrix}_{n+1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}&\mathbf{A}_{13}\\ \mathbf{A}_{21}&A_{22}&A_{23}\\ \mathbf{A}_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\\0\\0\end{Bmatrix}_{n+1}\tag{21}$$

式中，$[\mathbf{A}_{11}]$ 是 6×6 的矩阵，称为一致性切线刚度矩阵。

$$\mathbf{D}^{CTO}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}=\mathbf{A}_{11}\tag{22}$$

图 3 显示了应力更新步骤，由于采用了无约束应力更新策略，计算过程无需加卸载判断。

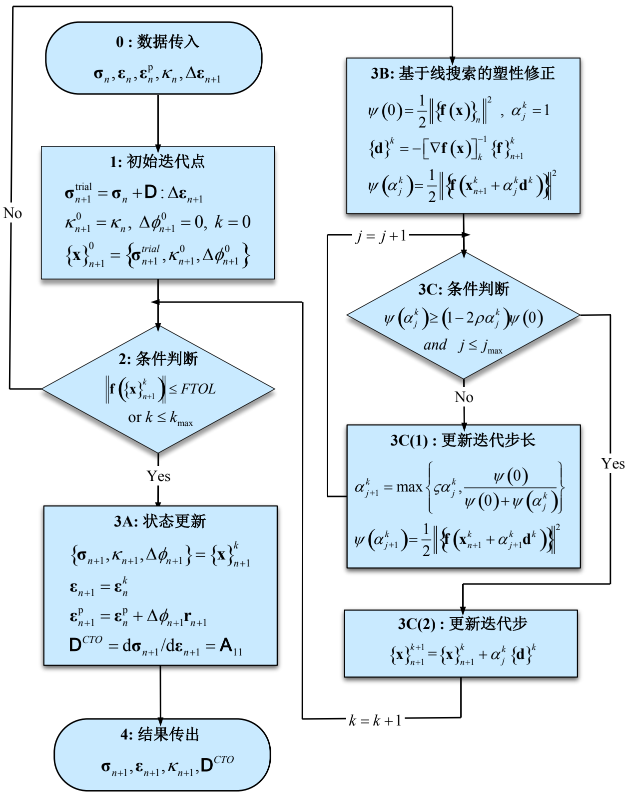


图 3 算法流程图

Fig. 3 Algorithm flow chart

值得强调的是，对于弹塑性模型而言，推导雅可比矩阵和一致性切线刚度矩阵中的导数项是一项相当复杂的工作，本文将采用 HDSDA 代替解析求导，具体做法在第 3 章中会详细阐述。

3. 超对偶数微分方法

3.1 超对偶数的基本定义

超对偶数是由 Fike[23]提出的一种广义复数，它具有 1 个实部和 3 个虚部。对于任意两个超对偶数，$a = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ 和 $b = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ 当且仅当它们的实部和虚部都对应相等时，a 和 b 相等，即 $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$。$\varepsilon_1$ 和 ε_2 是超对偶数的单位虚数，满足如下性质：

$$\varepsilon_1^2 = 0, \varepsilon_2^2 = 0, \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 \tag{23}$$

对标量函数 $f(x)$ 沿着超对偶数的 ε_1 轴和 ε_2 轴施加大小为 h 的扰动，并进行泰勒展开可得：

$$\begin{aligned} & f(x + h_1\varepsilon_1 + h_2\varepsilon_2 + 0\varepsilon_1\varepsilon_2) = \\ & f(x) + (h_1\varepsilon_1 + h_2\varepsilon_2)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + h_1h_2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} \end{aligned} \tag{24}$$

由于虚部 ε_1 和 ε_2 自乘为 0 的性质，式(24)中泰勒级数的高阶项 $\mathrm{O}(h_1^2 + h_2^2)$ 精确消失，这也是超对偶数微分方法不受截断误差影响的本质原因。不失一般性，我们可定义算符 $\Im$，$\Im_{\varepsilon_1}$，$\Im_{\varepsilon_2}$ 和 $\Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 表示提取任意超对偶数 a 实部和虚部的操作：

$$\begin{aligned} & \Im[a] = a_0, \Im_{\varepsilon_1}[a] = a_1, \\ & \Im_{\varepsilon_2}[a] = a_2, \Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}[a] = a_3 \end{aligned} \tag{25}$$

通过提取式(24)左侧中 ε_1 或 ε_2 的系数，可得函数 $f(x)$ 的 1 阶导数：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\Im_{\varepsilon_1}\left[f(x + h_1\varepsilon_1 + h_2\varepsilon_2)\right]}{h_1} = \\ & \frac{\Im_{\varepsilon_2}\left[f(x + h_1\varepsilon_1 + h_2\varepsilon_2)\right]}{h_2} \end{aligned} \tag{26}$$

同理，提取 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ 的系数可得函数 $f(x)$ 的 2 阶导数：

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left[f(x + h_1\varepsilon_1 + h_2\varepsilon_2)\right]}{h_1h_2} \tag{27}$$

式(26)、(27)没有减法操作，故不存在减法消去误差，同时，由于高阶项精确消失，微分公式也不存在任何截断误差，这意味着超对偶数数值微分可以选择任意大小的扰动值。为方便起见，可令 $h_1 = h_2 = 1$，由(26)和(27)可得：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} &= \Im_{\varepsilon_1}\left[f(x + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right] \\ &= \Im_{\varepsilon_2}\left[f(x + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right] \end{aligned} \tag{28}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left[f(x + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right] \tag{29}$$

超对偶数步微分也可用于多元函数求偏导。以双变量函数 $g(x,y)$ 为例，分别用 h_1 和 h_2 在自变量 x 的 ε_1 轴和自变量 y 的 ε_2 轴上进行扰动，进行泰勒展开后，可得：

$$\begin{aligned} g(x + h_1\varepsilon_1, y + h_2\varepsilon_2) &= g(x,y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)h_1\varepsilon_1 \\ & + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)h_2\varepsilon_2 + h_1h_2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) \end{aligned} \tag{30}$$

式(30)中，高阶项 $\mathrm{O}(h_1^2 + h_2^2)$ 同样精确消失。通过提取 ε_1，ε_2 和 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ 中各个虚部的系数，可得目标函数 $g(x,y)$ 关于自变量 x 和 y 的 1 阶偏导数以及混合偏 2 阶导数：

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\Im_{\varepsilon_1}\left[g(x + h_1\varepsilon_1, y + h_2\varepsilon_2)\right]}{h_1} \tag{31}$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\Im_{\varepsilon_2}\left[g(x + h_1\varepsilon_1, y + h_2\varepsilon_2)\right]}{h_2} \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y}=\frac{\Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left[g\left(x+h_1\varepsilon_1,y+h_2\varepsilon_2\right)\right]}{h_1h_2} \tag{33}$$

如果需要计算 $g(x,y)$ 的二阶偏导数，例如 $\partial^2 g/\partial x^2$。只需将 y 视为常数，对变量 x 的 ε_1 和 ε_2 轴施加扰动，最后提取 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ 的系数即可。

$$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left[g(x+h_1\varepsilon_1+h_1\varepsilon_2,y)\right]}{h_1h_2} \tag{34}$$

3.2 数值算例

影响数值微分结果精度的误差主要包括截断误差和减法消去误差。随着扰动值的减小，前者逐渐降低，而后者则会增加。相较其它数值微分方法，HSDSA 的优势在于微分结果不受这两种数值误差的影响。

表 1 中总结了四种数值微分方法的微分公式，表中 $\Re_{\vec{i}}$ 表示提取复数虚部的操作符。下面通过 1 个标量函数的求导问题，说明各种方法的性质差异。目标函数为 $f(x)=e^x/\left(\sin^3 x+\tan^3 x\right)^2$，目标问题是计算 $f(x)$ 在点 $x=\pi/8$ 处的 1 阶和 2 阶导数。其中，数值导数计算结果的相对误差定义为

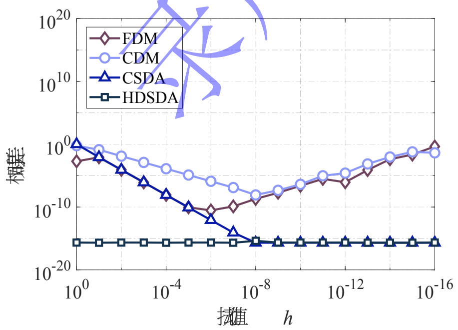
|数值解解析解解|析解 |

表 1 不同方法的微分公式

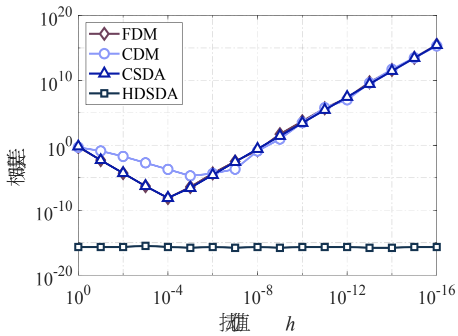
Table 1 Differentiation formulas for different methods

数值微分方法	$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x=(\cdot)$	截断误差	$\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}x^2=(\cdot)$	截断误差
FDM	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$O(h)$	$\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$	$O(h)$
CDM	$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$	$O\left(h^2\right)$	$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$	$O\left(h^2\right)$
CSDA	$\frac{\Re_{\vec{i}}\left[f\left(x+\vec{i}h\right)\right]}{h}$	$O\left(h^2\right)$	$\frac{2}{h^2}\left[f(x)-\Re_{\vec{i}}\left[f\left(x+\vec{i}h\right)\right]\right]$	$O\left(h^2\right)$
HDSDA	$\frac{\Im_{\varepsilon_1}\left[f\left(x+h_1\varepsilon_1+h_2\varepsilon_2\right)\right]}{h_1}$	无	$\frac{\Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left[f\left(x+h_1\varepsilon_1+h_2\varepsilon_2\right)\right]}{h_1h_2}$	无

图 4 显示了扰动值对于不同方法的数值误差的影响规律。当扰动值 h 较大时，减法消去误差影响较小，截断误差在总误差中占主导地位。随着扰动值 h 降低，与 h 大小正相关的截断误差开始减小，因此 FDM、CDM 的总数值误差不断降低。随着 h 继续减小，截断误差的影响不断降低，减法消去误差开始在总误差中占主导地位，FDM 和 CDM 的数值误差转而开始增加。



(a) 1 阶导数



(b) 2 阶导数

图 4 误差随扰动值 h 的变化规律

Fig. 4 Errors change with the perturbation value h

CSDA 的 2 阶导数数值误差规律与 FDM 和 CDM 的类似，但其 1 阶导数的数值误差，在扰动值较小时接近计算机精度。这是因为 CSDA 的 1 阶导数公式没有减法运算，故不受减法消去误差的影响。HDSDA 中既没有减法运算，也不存在截断误差，因此其总数值误差与扰动值 h 无关，始终维持在计算机精度附近。

3.3 基于超对偶数微分的本构方程导数计算

本节将详细介绍使用 HDSDA 求解 2.2 节中雅可

比矩阵$[\mathbf{J}]$的1阶和2阶导数项，一致性切线刚度矩阵可由雅克比矩阵进行矩阵运算后获得。为方便起见，扰动值h_1和h_2均设为1。

首先计算光滑函数F的1阶导数项，即$\partial F/\partial\boldsymbol{\sigma}$，$\partial F/\partial\kappa$和$\partial F/\partial\Delta\phi$。$\partial F/\partial\boldsymbol{\sigma}$是6×1的矩阵，计算其第$i$个分量$\partial F/\partial\sigma_i$时，需将变量$\sigma_i$的$\varepsilon_1$轴的虚部值置为1，即$\boldsymbol{\sigma}^*=\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{e}_i\varepsilon_1$，再利用算符$\Im_{\varepsilon_1}$提取出屈服函数在$\varepsilon_1$轴的虚部系数即可：

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma_i}=\Im_{\varepsilon_1}\left[F\left(\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{e}_i\varepsilon_1,\ \kappa,\Delta\phi\right)\right] \tag{35}$$

式中，$\mathbf{e}_i$是为6×1的单位向量，其中第i个分量为1，其余分量为0，例如：$\mathbf{e}_2=\{0,1,0,0,0,0\}^T$。同理，依次将求导变量$\kappa$和$\Delta\phi$的$\varepsilon_1$轴的虚部值置为1，可得：

$$\frac{\partial F}{\partial\kappa}=\Im_{\varepsilon_1}\left[F\left(\boldsymbol{\sigma},\ \kappa+\varepsilon_1,\Delta\phi\right)\right] \tag{36}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\Delta\phi}=\Im_{\varepsilon_1}\left[F\left(\boldsymbol{\sigma},\ \kappa,\Delta\phi+\varepsilon_1\right)\right] \tag{37}$$

下面计算塑性势函数g的1阶和2阶导数项。对于$\mathbf{r}$和$\partial\mathbf{r}/\partial\kappa$，由于$\partial\mathbf{r}/\partial\kappa$也是$\mathbf{r}$的导数，因此可同时对变量塑性势函数$g$中的变量$\boldsymbol{\sigma}$和$\kappa$进行扰动。通过将变量$\sigma_i$的$\varepsilon_1$轴和变量$\kappa$的$\varepsilon_2$轴虚部值分别置为1，代入$g$中，并利用算符$\Im_{\varepsilon_1}$和$\Im_{\varepsilon_2}$提取出对应的虚部：

$$r_i=\frac{\partial g}{\partial\sigma_i}=\Im_{\varepsilon_1}\left[g\left(\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{e}_i\varepsilon_1,\ \kappa+\varepsilon_1\right)\right] \tag{38}$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial\kappa}=\frac{\partial^2 g}{\partial\sigma_i\partial\kappa}=\Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left[g\left(\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{e}_i\varepsilon_1,\ \kappa+\varepsilon_1\right)\right] \tag{39}$$

式中，r_i和$\partial r_i/\partial\kappa$分别是$\mathbf{r}$和$\partial\mathbf{r}/\partial\kappa$的第$i$个分量。

同理，对于h^{p}和$\partial h^{\mathrm{p}}/\partial\kappa$，将变量$q$的$\varepsilon_1$轴和变量$\kappa$的$\varepsilon_2$轴虚部值置为1，代入$g$并提取其对应的虚部：

$$h^{\mathrm{p}}=\frac{\partial g}{\partial q}=\Im_{\varepsilon_1}\left[g\left(p,\ q+\varepsilon_1,\ \theta,\ \kappa+\varepsilon_2\right)\right] \tag{40}$$

$$\frac{\partial h^{\mathrm{p}}}{\partial\kappa}=\frac{\partial^2 g}{\partial q\partial\kappa}=\Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left[g\left(p,\ q+\varepsilon_1,\ \theta,\ \kappa+\varepsilon_2\right)\right] \tag{41}$$

$\partial\mathbf{r}/\partial\boldsymbol{\sigma}=\partial^2 g/\partial\boldsymbol{\sigma}^2$是6×6的矩阵，计算其第$i$行、第$j$列个元素时，需将$\sigma_i$的$\varepsilon_1$轴和变量$\sigma_j$的$\varepsilon_2$轴虚部值均置为1，并用算符$\Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$提取$g$的虚部：

$$\frac{\partial r_i}{\partial\sigma_j}=\frac{\partial^2 g}{\partial\sigma_i\partial\sigma_j}=\Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left[g\left(\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{e}_i\varepsilon_1+\mathbf{e}_j\varepsilon_2,\ \kappa\right)\right] \tag{42}$$

在计算$\partial h^{\mathrm{p}}/\partial\boldsymbol{\sigma}=\partial^2 g/(\partial q\partial\boldsymbol{\sigma})$时，需注意$q$和$\boldsymbol{\sigma}$相互耦合，扰动操作需依次进行：首先将$\sigma_i$的$\varepsilon_1$轴的虚部值置为1，然后使用扰动后的应力$\boldsymbol{\sigma}^*$计算得到应力不变量$\left(p^*\ q^*,\ \theta^*\right)$

$$\boldsymbol{\sigma}^*=\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{e}_i\varepsilon_1\Rightarrow p^*,\ q^*\text{和}\theta^* \tag{43}$$

然后将q^*的ε_2轴的虚部值置为1，最后通过算符$\Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$提取得到2阶混合偏导数值：

$$\frac{\partial h^p}{\partial\sigma_i}=\frac{\partial^2 g}{\partial\sigma_i\partial q}=\Im_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left[g\left(p^*,\ q^*+\varepsilon_2,\ \theta^*,\ \kappa\right)\right] \tag{44}$$

至此，通过采用HDSDA方法，已获得雅可比矩阵中所有的导数项，并且计算结果不会受到截断误差和减法消去误差的影响。

3.4 超对偶数微分方法的实现

与常用的复数不同，主流计算机语言（例如C/C++、Python /Java /Fortran）的开源库中并未提供超对偶数的数据类型。然而，基于Fortran的面向对象的程序设计思想，研究者们可自定义和封装超对偶数微分方法：

(1) 在Fortran编程语言中，可使用TYPE语句来创建包含四个双精度变量的自定义数据类型，这些变量可分别表示超对偶数的实部和三个虚部。接着，使用INTERFACE语句，令编译器正确调用自定义函数与子程序，实现超对偶数的运算。Fortran编程语言支持“函数重载”和“算符重载”的功能。这种编程技术允许编程者使用相同的函数名或运算符，并且会根据参数的类型不同，运行其自定义的函数和算符功能。利用这种方法，可以在超对偶数之间使用原本用于实数的运算符号（如“+”和“-”等）进行计算。

(2) 使用MODULE语句可将超对偶数相关的变量类型、运算规则和函数组合在一起，将它们整合为一个完整的“对象”，得到一个完整的超对偶数模块。使用超对偶数微分时，只需在目标Fortran程序中插入该模块即可调用。

(3) 链接好封装好的超对偶数模块后。在主程序中调用时，将待求导的变量声明为超对偶数类型。完成目标函数的计算后，通过式(28)和(29)提取计算结果的虚部值，便可得到其1阶和2阶导数。

本文不再赘述相关编程细节，读者可参考Zhou等[24]在文献中提供的超对偶数Fortran开源代码。

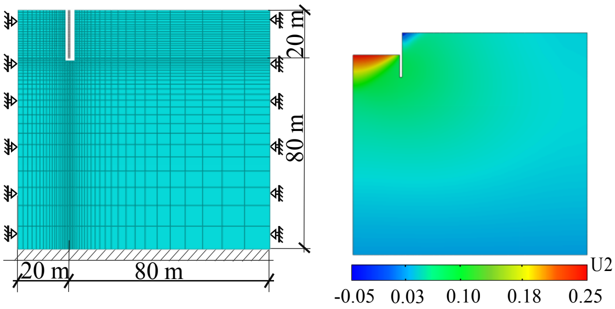
4. 数值算例

本章基于所提的算法，编写了光滑莫尔库伦模型的UMAT材料子程序，并用其开展了3个边值问题的数值分析，计算结果与ABAQUS内嵌的莫尔库伦模型进行了对比，以评估所提算法的正确性与计算效

率。

4.1 悬臂式基坑开挖模拟

第 1 个算例是岩土工程中常见的基坑开挖问题。图 5(a)显示了该数值算例的几何信息及边界条件，基坑开挖宽度 20m，开挖深度 10m，墙体宽度 1m，总长 20m。土体弹性模量 E 沿深度 z 线性增加，$E = 6000 + 6000z$ (kPa)，其余模型参数如表 2 所示。图 5(b)为开挖结束时基坑的等效塑性应变云图，由图可见，基坑开挖后土体向内侧移动，基坑底面隆起变形约为 25cm，周边土体沉降约为 5cm。

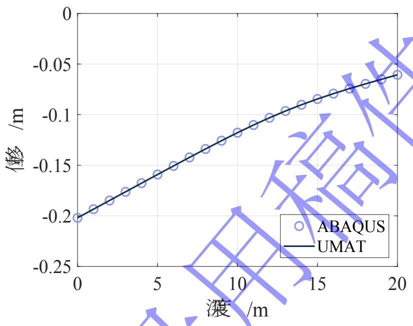


(a)几何和边界条件　　　　(b)模拟结果

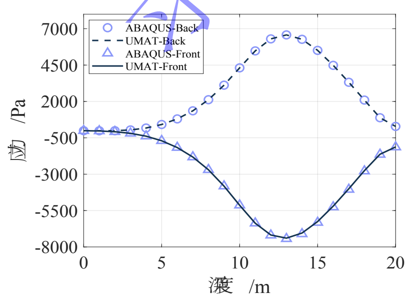
图 5 悬臂式基坑开挖模拟

Fig. 5 Cantilever foundation pit excavation simulation

图 6 给出了本文算法与 ABAQUS 内嵌莫尔库伦模型的结果对比。两者预测的在墙体水平位移和墙体竖向应力，几乎完全一致，并且较好反映了基坑开挖后支护墙体的变形与受力特征，验证了用所提算法以及 UMAT 子程序的正确性。



(a) 墙体水平位移



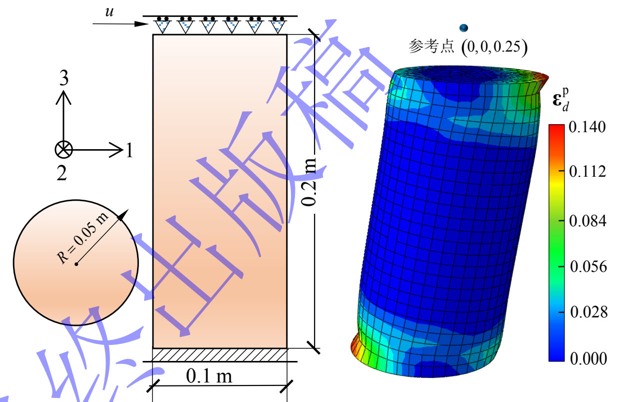
(b) 墙体竖向应力分布

图 6 墙体位移和内力分布对比

Fig. 6 Comparison of wall displacement and internal force distribution

4.2 在拉剪荷载作用下的圆柱

接下来的算例是承受拉剪荷载作用的圆柱体，该算例能产生较为复杂的应力路径[8]，以充分检验新算法在各种应力条件下的性能。数值算例的边界条件见图 7(a)。圆柱的横截面半径为 0.05m，高为 0.2m。底面完全固定，顶面允许水平方向移动，侧面为自由边界，没有约束压力。数值模拟时，通过如图 7 (b)所示的参考点，对顶面施加 0.03m 的水平位移荷载。由图可见，塑性变形主要集中在圆柱上下端部的受拉一侧。

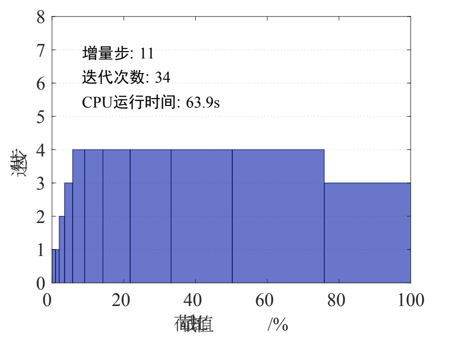


(a) 几何和边界条件　　　　(b) 模拟结果

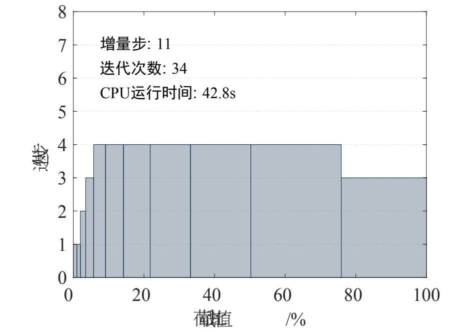
图 7 拉剪荷载下的三维圆柱体

Fig. 7 A 3D cylinder under a tensile-shear load

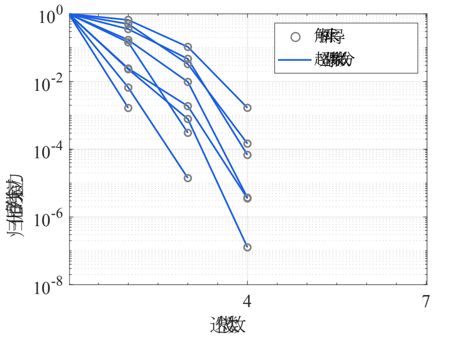
本节基于该算例评估了数值一致性切线刚度矩阵的收敛速度。图 8 显示了基于 HDSDA 和解析求导得到的一致性切线刚度矩阵在全局迭代计算所需的迭代次数、消耗的 CPU 时间以及收敛速度。由 HDSDA 获得的数值一致性切线刚度矩阵，其迭代次数和收敛速度，均与解析一致性切线刚度矩阵的完全一致，验证了 HDSDA 的有效性。此外，相较于解析求导，HDSDA 在求导时通常耗时更多，因此数值一致性切线刚度矩阵的 CPU 耗时要高于解析的一致性切线刚度矩阵。然而，HDSDA 的主要优势是在于避免了繁琐的解析求导运算，并且计算结果不受传统数值微分方法中存在的数值误差影响，可有效降低复杂本构模型在数值应用时的难度。



(a) 基于 HDSDA 的一致性切线刚度矩阵的应力更新算法



(b) 基于解析一致性切线刚度矩阵的应力更新算法



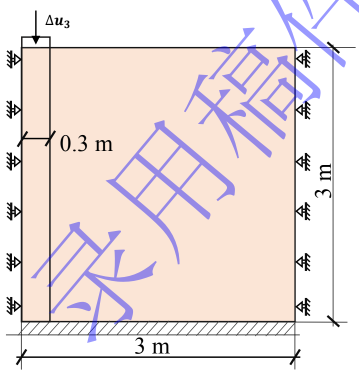
(c) 临界节点处的归一化残余应力

图 8 解析和数值一致性切线刚度矩阵的收敛性对比

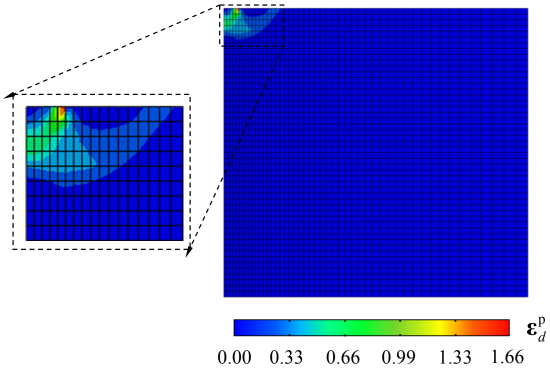
Fig. 8 Comparison of convergence behavior of analytical and numerical CTOs

4.3 条形基础的承载力预测

最后一个算例为条形基础的承载力预测，其特点是地基边缘处的应力集中与强烈的主应力旋转，易导致迭代计算不收敛。图 9 显示了数值算例的几何形状和边界条件，竖向位移荷载 $\Delta u_3 = 0.3\mathrm{m}$ 由基础顶部向下施加。模型参数由表 2 所示，土体重度设为 $18\,\mathrm{kN/m^3}$ 。



(a) 几何和边界条件



(b) 模拟结果

图 9 条形基础承载力模拟

Fig. 9 Strip foundation bearing capacity simulation

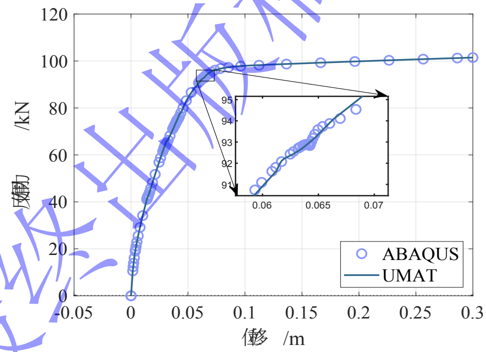


图 10 位移-反力曲线对比

Fig. 10 Displacement-Reaction force curves

表 2 用于边值问题数值分析的模型参数

Table 2 Model parameters used in the numerical analytical boundary problems

边值问题	E/kPa	ν	c_0/kPa	φ/°	ψ/°	H_p/kPa
基坑开挖	66000	0.2	0.1	30	0.1	1*E*-8
3D 圆柱	30000	0.3	50	12	0.1	1*E*-8
条形基础	30000	0.3	0.1	30	0.1	1*E*-8

图 9 给出了计算终止时地基的等效塑性应变云图。值得强调的是，实际建模过程中没有建立条形基础的有限元模型，而是通过对基础底面处的土体施加竖直向下的位移，模拟基础对土体的作用。加载初期，塑性区从基础右侧向下发展，逐渐形成连续的滑动面。随竖向位移荷载增加，沿基础右侧土体发生竖向剪切破坏。基础顶部中心的位移-反力曲线如图 10 所示，条形基础开始失去稳定性的拐点约为 0.07m，对应的基础极限承载力约为 96kN/m。图 10 对比了 ABAQUS 和 UMAT 的计算结果，二者几乎完全一致，再次验证了所提算法的有效性。

5. 结论

加/卸载判断问题与高精确的导数评估问题一直

制约着先进弹塑性模型的数值应用。本文将超对偶数微分方法与无约束应力更新算法相结合，提出了一种新的隐式应力更新算法，用以克服上述计算难点。此外，利用该算法编写了莫尔库伦塑性模型 UMAT 子程序，开展了不同边值问题的数值试验，计算结果与 ABAQUS 默认算法进行了对比，验证了所提算法的正确性与收敛性。主要研究结论如下：

(1) 弹塑性模型的控制方程组中存在加卸载不等式的约束，导致应力更新计算时，需要进行加卸载判断，增加了弹塑性计算的复杂性。本文算法基于无约束应力更新策略，将非光滑的弹塑性问题转化为无约束最小化问题，并结合线搜索方法进行求解，避免了应力更新时的加卸载判断，有效简化了弹塑性模型数值实现的计算流程。

(2) FDM、CDM 以及 CSDA 等传统数值微分方法的计算结果存在截断误差和减法消去误差，使用时需小心选择扰动值，以避免数值误差的影响。本文算法采用超对偶数微分方法代替解析求导，计算结果不受这两种数值误差影响，几乎实现了无误差的微分计算，由此获得的非线性方程组的雅克比矩阵和一致性切线刚度矩阵，可保证迭代计算的二次收敛性。但需要注意，使用前需利用 Fortran 语言的函数重载和算符重载功能来定义超对偶数的基本性质与运算规则。

(3) 本文算法避免了返回映射算法中的加卸载判断步骤，也无需繁琐解析求导运算，可有效降低复杂模型隐式计算的难度。基于算例分析表明，所提算法的计算结果不仅与 ABAQUS 默认算法相一致，且在全局平衡迭代中展现出了相同的收敛速度，验证了算法的正确性与有效性。后续将尝试利用该算法继续求解更具挑战性的本构模型，如塑性损伤模型、各向异性模型、水力/热力耦合模型等。

参考文献：

[1] BORJA R I, LEE S R. Cam-Clay plasticity, Part 1: Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1990, 78(1): 49-72.

[2] BORJA R I. Cam-Clay plasticity, Part II: Implicit integration of constitutive equation based on a nonlinear elastic stress predictor[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1991, 88(2): 225-240.

[3] 贾善坡，陈卫忠，杨建平，等. 基于修正 Mohr-Coulomb 准则的弹塑性本构模型及其数值实施[J]. 岩土力学，2010, 31(7): 2051-2058. (JIA Shan-Po，CHEN Wei-Zhong，YANG Jian-Ping, et al An elastoplastic constitutive model based on modified Mohr-Coulomb criterion and its numerical implementation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(7): 2051-2058. (in Chinese)).

[4] ZHAO J D, SHENG D C, ROUAINIA M, et al. Explicit stress integration of complex soil models[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 2005, 29(12): 1209-1229.

[5] HONG H K, LIU C S. Internal symmetry in the constitutive model of perfect elastoplasticity[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2000, 35(3): 447-466.

[6] REZAIEE PAJAND M, NASIRAI C. On the integration schemes for Drucker–Prager's elastoplastic models based on exponential maps[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2008, 74(5): 799-826.

[7] SLOAN S W, ABBO A J, SHENG D C. Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control[J]. Engineering Computations. 2001, 18(1/2): 121-194.

[8] SIMO J C, TAYLOR R L. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1986, 22(3): 649-670.

[9] MIRA P, TONNI L, PASTOR M, et al. A generalized midpoint algorithm for the integration of a generalized plasticity model for sands[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009, 77(9): 1201-1223.

[10] SCALET G L, AURICCHIO F. Computational methods for elastoplasticity: an overview of conventional and less-conventional approaches[J]. Archives of Computational Methods in Engineering. 2018, 25(3): 545-589.

[11] SIMO J C, HUGHES T J. Computational inelasticity[M]. New York: Springer Science & Business Media, 2006.

[12] 范庆来，栾茂田，杨庆. 修正剑桥模型的隐式积分算法在 ABAQUS 中的数值实施)[J]. 岩土力学，2008, 29(1): 269-273. (FAN Qing-Lai, LUAN Mao-Tian, YANG Qing. Numerical implementation of implicit integration algorithm for modified Cam-clay model in ABAQUS[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(1): 269-273. (in Chinese))

[13] ARMERO F, PÉREZ FOGUET A. On the formulation of closest - point projection algorithms in elastoplasticity—part I: The variational structure[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2002, 53(2): 297-329.

[14] STARMAN B, HALILOVIC M, VRH M, et al. Consistent tangent operator for cutting-plane algorithm of elasto-plasticity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and

Engineering. 2014, 272: 214-232.

[15] 陈洲泉，陈湘生，庞小朝，等. 角点型非共轴模型的半隐式应力积分算法及应用[J]. 岩土工程学报，2023, 45(3): 521-529. (CHEN Zhou-Quan, CHEN Xiang-Sheng, PANG Xiao-Chao, et al. Semi-implicit integration algorithm for non-coaxial model based on vertex theory and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, 45(3): 521-529. (in Chinese))

[16] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V. Computational Cam clay plasticity using second-order cone programming[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2012, 209-212: 239-249.

[17] ZHOU X, LU D C, SU C C, et al. An unconstrained stress updating algorithm with the line search method for elastoplastic soil models[J]. Computers and Geotechnics. 2022, 143: 104592.

[18] PÉREZ-FOUGUET A, RODRIGUEZÍ-FERRAN A, HUERTA A. Numerical differentiation for local and global tangent operators in computational plasticity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2000, 189(1): 277-296.

[19] CHOI H, YOON J W. Stress integration-based on finite difference method and its application for anisotropic plasticity and distortional hardening under associated and non-associated flow rules[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2019, 345: 123-160.

[20] SU C C, LU D C, ZHOU X, et al. An implicit stress update algorithm for the plastic nonlocal damage model of concrete[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2023, 414: 116189.

[21] ZHANG N, LI X, WANG D. Smoothed classic yield function for C2 continuities in tensile cutoff, compressive cap, and deviatoric sections[J]. International Journal of Geomechanics. 2021, 21(3): 4021005.

[22] MENETREY P, WILLAM K J. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization[J]. Structural Journal. 1995, 92(3): 311-318.

[23] FIKE J A. Multi-objective optimization using hyper-dual numbers[D]. Palo Alto: Stanford university, 2013.

[24] ZHOU X, SHI A Y, Lu D C, et al. A return mapping algorithm based on the hyper dual step derivative approximation for elastoplastic models[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2023, 417: 116418.