

DOI: 10.11779/CJGE20220384

# 基于状态空间法的阶梯型变截面水平受荷桩分析方法

张晓笛<sup>1,2</sup>, 王金昌<sup>\*1,2</sup>, 杨仲轩<sup>1,3</sup>, 龚晓南<sup>1,2</sup>, 徐荣桥<sup>1,3</sup>

(1. 浙江大学建筑工程学院, 浙江 杭州 310058; 2. 浙江大学平衡建筑研究中心, 浙江 杭州 310058; 3. 公路数智养护浙江省工程研究中心, 浙江 杭州 310051)

**摘要:** 为研究阶梯型变截面桩的水平承载特性, 基于 Timoshenko 梁理论, 建立了综合考虑桩基尺寸效应、剪切变形和桩基材料非线性效应的四弹簧模型及其状态方程, 获得了非线性桩土相互作用下任意长细比的桩截面内力与变形解析解。通过与已有文献中现场试验结果对比分析, 验证该方法的适用性和有效性, 并讨论了变径位置、桩径比和弹性模量比对桩基受荷特性的影响。研究表明: ①桩基水平承载力对三者的敏感性为: 桩径比>变径位置>弹性模量比; ②综合考虑桩承载能力和经济性, 建议变径位置、桩径比和弹性模量比取 0.6。

**关键词:** 阶梯型变截面桩; 水平受荷; 桩土相互作用; Timoshenko 梁; 四弹簧模型; 状态空间法

中图分类号: TU473 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2023)09-1944-09

作者简介: 张晓笛(1997—), 女, 硕士研究生, 主要从事土与结构相互作用的研究。E-mail: zxd6814@zju.edu.cn。

## Analytical solutions for laterally loaded step-tapered piles by state space method

ZHANG Xiaodi<sup>1,2</sup>, WANG Jinchang<sup>1,2</sup>, YANG Zhongxuan<sup>1,3</sup>, GONG Xiaonan<sup>1,2</sup>, XU Rongqiao<sup>1,3</sup>

(1. College of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 2. Center for Balance Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 3. Zhejiang Provincial Engineering Research Center for Digital & Smart Maintenance of Highway, Hangzhou 310051, China)

**Abstract:** To analyze the response of laterally loaded step-tapered piles, a four-spring model is proposed based on the Timoshenko beam theory considering the effects of pile diameter, shear deformation and nonlinear pile material behavior. The analytical solutions for the internal forces and deformations with arbitrary slenderness ratio can be derived by the state space method considering the nonlinear pile-soil interaction. The solutions are validated through the available field test results in the literatures. Furthermore, the influences of pile parameters, such as the variation position of the diameter, diameter ratio and Young's modulus ratio, on the pile loading responses are proposed. The results show that: (1) The sensitivity of these parameters follows the descending order: pile diameter ratio > variation position of pile diameter > Young's modulus ratio. (2) After trade-off between the pile lateral bearing capacity and the cost, it is suggested that the optimal variation position of the diameter, the pile diameter ratio and Young's modulus ratio should be set as 0.6.

**Key words:** step-tapered pile; lateral load; pile-soil interaction; Timoshenko beam; four-spring model; state space method

## 0 引言

在水平荷载作用下, 桩身响应存在变形不均匀、内力集中等特征, 当桩基达到极限承载力时, 桩基下部的材料性能通常未能得到充分发挥。为避免材料浪费, 通常将桩基设计为阶梯型变截面桩<sup>[1]</sup>。除了阶梯型变截面桩, 目前使用较为广泛的变截面桩还包括楔形桩、挤扩支盘桩、混凝土扩盘桩、竹节桩等。此外, 实际工程中亦将不同材料的桩组合在一起, 形成性能发挥充分、承载能力优越的复合桩基, 如在混凝土管桩下部设置钢管形成的混凝土管桩-钢管复合桩, 兼有混凝土管桩造价低和钢管桩抗弯性能好的优点。在阶梯型变截面桩设计中, 沿桩身结构参数的变化如桩径、

弹性模量等十分重要, 需要通过计算分析确定。

$p-y$  曲线法是目前求解水平受荷桩响应的主要方法。基于传统  $p-y$  曲线法, 国内外学者已针对等截面桩<sup>[2-3]</sup>和阶梯型桩<sup>[4-5]</sup>水平受荷响应开展了大量研究, 但存在以下局限性: ①采用 Euler 梁模拟桩, 忽略其剪切变形; ②桩多为线弹性材料, 忽略桩身抗弯刚度随加载过程变化; ③仅考虑水平土抗力, 忽略大直径

基金项目: 浙江省“尖兵”“领雁”研发攻关计划项目(2022C03180); 浙江省交通运输厅项目(ZJXL-JTT-202201A, 202303); 国家自然科学基金项目(52078457); 浙江大学浙江交工协同创新联合研究中心研发项目(2021001)

收稿日期: 2022-04-02

\*通信作者(E-mail: wjc501@zju.edu.cn)

桩的尺寸效应; ④忽略变截面处的土抗力。有些学者针对等截面桩进行了方法修正, 试图克服上述部分局限性。Han 等<sup>[6]</sup>使用 Timoshenko 梁理论推导了横观各向同性桩的水平受荷响应解析解, 计算结果较 Euler 梁更为准确。竺明星等<sup>[7-8]</sup>基于 Euler 梁和四弹簧模型推导了大直径桩水平受荷响应的解析解。考虑水平土抗力、侧摩阻力、桩端水平阻力和抵抗弯矩的作用, Byrne 等<sup>[9]</sup>基于 Timoshenko 梁理论建立了四弹簧模型。而对于阶梯型变截面桩, 为满足承载力要求, 桩径越来越大, 提出考虑剪切变形和尺寸效应的变截面桩水平受荷响应分析方法尤为迫切。

在求解桩基微分方程时, 多采用有限差分法、幂级数转换和有限杆单元法等方法, 计算效率受限于桩段数量, 适用性较差。为克服上述局限, Liang 等<sup>[10]</sup>基于 Fourier-Laplace 积分法, 分别推导了水平受荷长桩的浅层幂级数解和深层 Wentzel-Kramers-Brillouin 渐进解。但受限于方法自身的推导过程, 上述方法难以考虑成层土与桩身参数随空间位置变化等情况。状态空间法则为解决上述难题提供了途径, 该方法以能量对偶的内力和位移作为状态向量, 所求解的方程数量不随桩段数发生变化, 且仅需求解少量未知数, 不仅避免了高阶微分方程的求解, 便于编程实现, 对于动静力问题与三维问题均具有较高的计算效率, 还能方便处理各种参数随桩身变化以及桩土相互作用问题, 已在土木工程领域得到较为广泛的应用<sup>[7-8, 11-12]</sup>。有些学者虽然已建立了等截面桩的状态方程, 但通常需要根据土体状态将桩分为弹、塑性段, 采用 Laplace 变换进行求解, 形式较为复杂, 迭代繁琐<sup>[3, 7-8]</sup>。

综上所述, 建立假设合理完善、计算便捷的阶梯型变截面桩水平受荷响应的计算方法十分重要。本文基于 Timoshenko 梁理论, 建立了综合考虑桩基尺寸效应、剪切变形和材料非线性效应的阶梯型变截面桩四弹簧模型; 利用状态空间法与相邻梁段的连续性条件, 求得桩身任意截面的状态向量统一表达式。在此基础上, 利用迭代算法获得了非线性桩土相互作用与材料非线性效应下桩身响应。与已有试验结果进行对比分析, 验证了本文解析解的适用性。以二阶变截面桩为例, 进一步研究了变径位置、桩径比和弹性模量比对受荷响应的影响。

# 1 问题描述

## 1.1 基本假设

阶梯型变截面桩沿深度方向截面、材料发生变化, 本文采用如下假定:

(1) 考虑材料非线性, 采用 Timoshenko 梁理论

描述桩基力学行为。

(2) 考虑非线性桩土相互作用, 采用沿桩身分布、具有径向与转动刚度的二向弹簧模拟水平抗力和由侧摩阻力产生的分布弯矩, 采用集中分布、具有径向与转动刚度的二向弹簧模拟桩端水平阻力和弯矩。

(3) 考虑变截面处土体提供的抗力。

(4) 忽略竖向荷载对水平受荷响应的影响。

水平受荷的  $r$  阶阶梯型变截面桩分析模型如图 1 所示, 每阶桩半径、直径、桩长、壁厚、截面面积、惯性矩和弹性模量分别为  $R_i, D_i, L_i, t_i, A_i, I_i$  和  $E_{pi}$  ( $i=1, 2, \dots, r$ ), 桩长为  $L$ 。桩顶作用水平力  $H_t$  和弯矩  $M_t$ 。水平土抗力、桩侧摩阻力、桩端水平阻力和弯矩分别为  $p, \tau, H_b$  和  $M_b$ , 由桩侧摩阻力产生的分布弯矩为  $m$ 。桩身径向与转动弹簧刚度分别为  $k_y$  和  $k_\psi$ , 桩端径向和转动弹簧刚度分别为  $k_{by,i}$  和  $k_{b\psi,i}$ 。沿桩径向与轴向建立  $x-z$  直角坐标系, 向右与向下分别为坐标轴正方向。假定梁中轴线上的水平位移  $y$  以向右为正, 竖向位移  $w$  以向下为正, 截面转角  $\psi$  以顺时针旋转为正, 剪力作用使梁截面顺时针转动为正, 弯矩作用使梁左侧受拉为正。

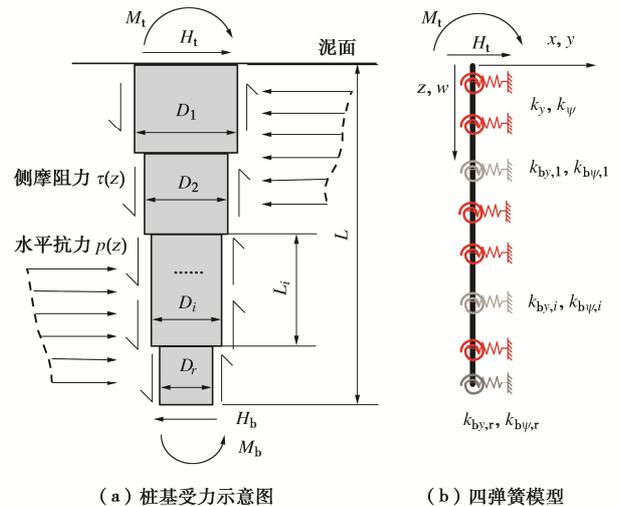


图 1 阶梯型变截面桩分析模型

Fig. 1 Analytical model for step-tapered pile

## 1.2 土响应曲线

桩土相互作用采用一系列独立非线性弹簧模拟, 弹簧行为用相应的土响应曲线进行描述。分析模型包括  $p-y, m-\psi, H_b-y_b$  与  $M_b-\psi_b$  4 种土响应曲线, 为便于解析解的推导, 使其适用于任意形式的土响应曲线, 采用下式统一描述各类土弹簧:

$$F = ku \quad (1)$$

式中:  $F$  为广义土抗力, 包括  $p, m, H_b$  和  $M_b$ ;  $u$  为相应的广义位移, 分别为  $y, \psi, y_b$  与  $\psi_b$ ;  $k$  为相应的弹簧刚度, 分别为  $k_y, k_\psi, k_{by}$  和  $k_{b\psi}$ 。对于非线性弹

簧,  $k$  与位移相关, 取土响应曲线的割线模量<sup>[13]</sup>。

### (1) $p$ - $y$ 曲线

现有单桩基础设计规范如 API<sup>[14]</sup>给出了柔性桩的  $p$ - $y$  曲线, 如式 (2a) ~ (2d), (3a), (3b) 所示, 而对于大直径桩, 计算得到的土体初始刚度和极限土抗力误差较大<sup>[15]</sup>。因此, 学者们对其进行了修正, 如 Zhang 等<sup>[16]</sup>基于大直径桩上部楔形破坏, 下部旋转破坏的模式, 建立了通过土体应力-应变曲线推导  $p$ - $y$  曲线的分析框架。

$$\text{软黏土: } \frac{p}{p_u} = \begin{cases} 0.5(y/y_{50})^{1/3} & y \leq 8y_{50} \\ 1 & y > 8y_{50} \end{cases}, \quad (2a)$$

$$\text{硬黏土: } \frac{p}{p_u} = \begin{cases} 0.5(y/y_{50})^{1/4} & y \leq 16y_{50} \\ 1 & y > 16y_{50} \end{cases}, \quad (2b)$$

$$p_u = \begin{cases} 3c_u + \gamma'z + J \frac{c_u z}{D} & z < \frac{6D}{\gamma'D/c_u + J} \\ 9c_u & z \geq \frac{6D}{\gamma'D/c_u + J} \end{cases}, \quad (2c)$$

$$y_{50} = 2.5\varepsilon_{50}D. \quad (2d)$$

式中:  $p_u$  为极限水平抗力;  $D$  为桩身直径;  $\gamma'$  为土体有效重度;  $z$  为泥面下桩的深度;  $J$  为计算参数, 取 0.25~0.5;  $\varepsilon_{50}$  为三轴不排水试验中, 竖向应力达到最大主应力差一半时对应的应变值, 与土体不排水抗剪强度  $c_u$  密切相关。

$$\text{砂土: } p = Ap_u \tanh \left[ \frac{kz}{Ap_u} y \right], \quad (3a)$$

$$\begin{cases} p_u = \min(p_{us}, p_{ud}) \\ p_{us} = (C_1 z + C_2 D) \gamma' z \\ p_{ud} = C_3 D \gamma' z \end{cases}, \quad (3b)$$

式中:  $p_u$  为极限水平抗力, 下标  $s$  为浅层,  $d$  为深层;  $C_1, C_2$  和  $C_3$  与砂土内摩擦角  $\phi$  有关;  $A = (3 - 0.8z/D) \geq 0.9$  为考虑加载条件的计算系数;  $k$  为初始地基反应模量, 与砂土内摩擦角  $\phi$  有关, 详见 API 规范<sup>[14]</sup>。

### (2) $m$ - $\psi$ 曲线

水平荷载作用下, 桩截面发生旋转, 桩周产生不均匀的侧摩阻力, 形成分布弯矩。桩侧摩阻力大小取决于桩土界面接触特性。浅层主动土压力侧土体可能与桩身部分或全部分离, Maheshwari 等<sup>[17]</sup>给出了完全分离或接触的判断条件。同时下部主动侧土体与桩身间的连接会减弱<sup>[18]</sup>。因此, 从偏安全角度考虑, 假定主动土压力侧桩土完全分离, 侧摩阻力仅作用于被动土压力侧。在转角作用下, 桩周任一点处的侧摩阻力大小与该点距中轴线的水平距离成正比, 分布如图 2 所示。根据竺明星等<sup>[8]</sup>, 分布转动弹簧刚度  $k_\psi$  与轴向弹簧刚度  $k_\tau$  存在如下关系:

$$k_\psi = \frac{\pi D^3}{16} k_\tau. \quad (4)$$

式中:  $k_\tau$  由相应的  $\tau$ - $w$  曲线确定,  $\tau$ - $w$  曲线可参考 API 规范<sup>[14]</sup>。另外, 对于水平受荷桩, 水平土抗力会导致桩土界面水平应力和侧摩阻力增大。竺明星等<sup>[8]</sup>考虑侧摩阻力的增强效应推导了与水平应力相关的极限摩阻力和初始刚度的表达式:

$$\left. \begin{aligned} \tau_u &= c_{\text{inter}} + (\sigma_{v,\text{ini}} + p/D) \tan \delta_{\text{inter}}, \\ k_\tau &= k_{\tau,\text{ini}} \left( \frac{\sigma_{v,\text{ini}} + p/D}{\sigma_{v,\text{ini}}} \right)^\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中:  $\tau_u$  为极限侧摩阻力;  $\sigma_{v,\text{ini}}$  为无水平荷载时桩周初始压力;  $c_{\text{inter}}$  和  $\delta_{\text{inter}}$  分别为桩土界面黏聚力和摩擦角;  $k_{\tau,\text{ini}}$  为未受水平荷载时  $\tau$ - $w$  曲线的初始刚度, 可采用 Randolph 等<sup>[19]</sup>提出的经验公式  $k_w = G_s/[R \ln(R_m/R)]$  计算, 其中  $G_s$  为土体剪切模量,  $R_m$  为影响半径;  $\alpha$  为刚度指数, 竺明星等<sup>[8]</sup>建议砂土-桩界面取 0.725, 黏土-桩界面取 0.6。根据式 (1) 所描述的  $m$ - $\psi$  曲线, 采用与水平位移相关的  $k_\psi$  来表征水平土抗力对侧摩阻力的增强效应, 所以  $k_\psi$  为  $y$  与  $\psi$  的函数。当  $y$  小于极限水平位移  $y_u$  时, 随着  $y$  的增大, 水平抗力逐渐增大,  $k_\psi$  亦增大; 当  $y$  大于  $y_u$  时, 水平抗力已达极限,  $k_\psi$  不再随  $y$  变化。

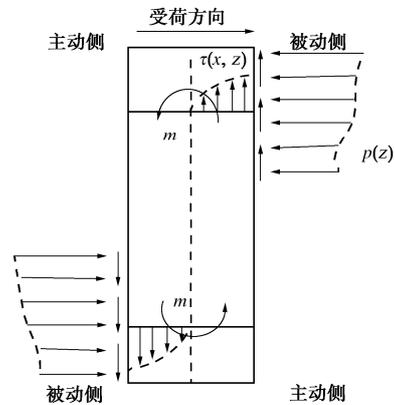


图 2 侧摩阻力分布示意图

Fig. 2 Sketch of distribution of vertical shaft shear stress

### (3) $H_b$ - $y_b$ 曲线

对于半刚性或刚性桩, 水平荷载作用下, 桩身将绕水平位移零点即旋转中心发生旋转, 桩端产生踢脚变形, 桩端土体产生水平抗力。Wang 等<sup>[20]</sup>在旋转中心处设置集中转动弹簧来评估桩端阻力与桩端抵抗弯矩的共同作用, 并建立了相应的响应曲线。本文算例验证中采用理想弹塑性的  $H_b$ - $y_b$  曲线模型:

$$H_b = \begin{cases} k_{b_y} y_b & H_b < H_{bu} \\ H_{bu} = \tau_{bu} A & H_b \geq H_{bu} \end{cases}. \quad (6)$$

式中:  $\tau_{bu}$  为桩端极限摩阻力, 当为黏性土时, 取不排

水抗剪强度; 为砂性土时, 按式  $\tau_{bu} = \sigma_v \tan \delta_{inter}$  计算, 其中  $\sigma_v$  为计算深度处的围压。灌注桩或沉井按  $k_{by} = 2E_s D / (2 - \nu_s) (1 + \nu_s)$  计算, 其中  $E_s$  与  $\nu_s$  分别为桩端土弹性模量与泊松比; 而对于以薄壁管桩为主的单桩基础, Byrne 等<sup>[9]</sup>研究表明壁厚对土响应曲线影响极微。因此, 在缺乏相关试验或计算数据的情况下, 亦可按上式计算薄壁管桩的  $k_{by}$ 。

(4)  $M_b - \psi_b$  曲线

桩端弯矩的形成与桩身分布弯矩相似。静置或仅受竖向荷载时, 基底竖向应力近似呈均匀分布; 水平荷载作用下, 桩截面发生旋转, 基底应力分为卸载区和加载区, 该部分不均匀的基底应力将形成抵抗弯矩。王伯惠等<sup>[21]</sup>、《公路桥涵地基与基础设计规范: JTG 3363—2019》<sup>[22]</sup>认为大直径桩端部弯矩与转角近似满足线性关系; 而 Gerolymos 等<sup>[23]</sup>通过有限元计算发现桩端弯矩存在极限值。本文算例验证采用竺明星等<sup>[7]</sup>所建立的理想弹塑性的  $M_b - \psi_b$  曲线模型:

$$M_b = \begin{cases} k_{b\psi} \psi & (M_b < M_{bu}) \\ M_{bu} = \frac{\pi D^3 q_{bu}}{24} & (M_b \geq M_{bu}) \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $k_{b\psi} = \min \{ kI, E_s D^3 / 6(1 - \nu_s^2) \}$ ,  $k$  为地基竖向反力系数, 可根据《公路桥涵地基与基础设计规范: JTG 3363—2019》<sup>[22]</sup>查表计算;  $q_{bu}$  为土体极限端阻力, 可根据地勘或经验公式获取。现有研究表明, 对于大直径管桩, 一般无土塞阻塞或为部分阻塞, 且桩径越大, 阻塞越小<sup>[24]</sup>。因此, 一般不考虑管桩的土塞阻塞效应, 对式 (7) 中  $k_{b\psi}$  与  $M_{bu}$  进行修正:

$$\left. \begin{aligned} k_{b\psi} &= \min \left\{ kI, \frac{E_s [D^3 - (D - 2t)^3]}{6(1 - \nu_s^2)} \right\} \\ M_{bu} &= \frac{\pi [D^3 - (D - 2t)^3] q_{bu}}{24} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

1.3 桩材料非线性效应

对于钢筋混凝土桩, 荷载增大, 局部产生损伤, 桩抗弯刚度降低。为考虑材料非线性, Reese 等<sup>[25]</sup>建议采用截面弯矩和曲率的关系获得抗弯刚度:

$$E_p I_p = M / \phi \quad (9)$$

式中:  $E_p I_p$  为桩身抗弯刚度,  $\phi = d\psi/dz$  为变形曲率。截面弯矩-曲率关系可通过试验、数值或理论分析得到。

2 阶梯型变截面桩解析分析方法

2.1 状态方程建立

将桩等分为  $n$  段 Timoshenko 梁, 其中, 第  $i$  阶桩分为  $n_i$  段 ( $n = \sum n_i$ )。梁单元受力如图 3 所示。根据 Timoshenko 梁理论, 梁截面任一点处位移可表示为

$$w(x, z) = x\psi(z), y(x, z) = y(z) \quad (10)$$

相应的应变可表示为

$$\epsilon_{zz} = x \frac{\partial \psi}{\partial z}, \gamma_{xz} = \theta - \psi \quad (11)$$

式中:  $\epsilon_{zz}$  和  $\gamma_{xz}$  分别为  $z$  方向的正应变和  $x-z$  平面的剪应变, 当  $\gamma_{xz} = 0$  时, Timoshenko 梁退化为 Euler 梁;  $\theta = -\partial y / \partial z$  为梁中轴线的转角, 以顺时针方向为正。梁截面处的弯矩  $M$  和剪力  $Q$  表示为

$$M = -E_p I \frac{d\psi}{dz}, Q = G_p A \kappa \left( -\frac{dy}{dz} - \psi \right) \quad (12)$$

式中:  $G_p$  和  $\kappa$  分别为桩的剪切模量和截面剪切系数。根据 Cowper<sup>[26]</sup>, 桩截面剪切系数  $\kappa$  按下式计算:

圆形: 
$$\kappa = \frac{2(1 + \nu_p)}{4 + 3\nu_p} \quad (13a)$$

环形: 
$$\kappa = \frac{6(1 + \nu_p)(1 + a^2)^2}{(7 + 6\nu_p)(1 + a^2)^2 + (20 + 12\nu_p)a^2} \quad (13b)$$

式中:  $\nu_p$  为桩的泊松比;  $a = (R - t) / R$  为桩的计算参数。

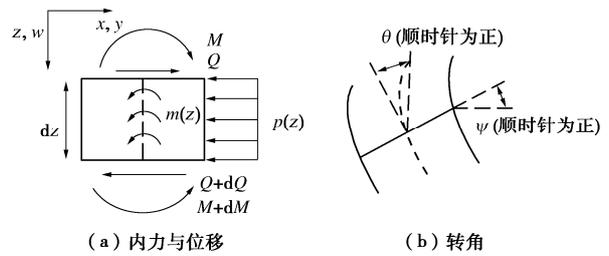


图 3 梁单元内力与变形示意图

Fig. 3 Internal forces and deformations of a beam element

建立梁的受力平衡方程为

$$\frac{dM}{dz} - Q + m = 0, \frac{dQ}{dz} + p = 0 \quad (14)$$

式中:  $m = k_\psi \psi$ ,  $p = k_y y$ 。联立式 (12) 和 (14) 并无量纲化, 整理为矩阵形式的状态方程如下:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{z}} = \bar{A}\bar{x} \quad (15)$$

式中:  $\bar{x} = [\bar{y} \quad \bar{\psi} \quad \bar{Q} \quad \bar{M}]^T$  为无量纲的状态向量, 由梁截面上的 2 个位移物理量和 2 个内力物理量组成;  $\bar{A}^{(i)}$  为第  $i$  阶桩无量纲的系统矩阵, 非零元素分别为

$$\begin{aligned} \bar{A}_{12}^{(i)} &= -\bar{A}_{43}^{(i)} = -1, \bar{A}_{13}^{(i)} = \frac{E_{p1} A_1}{G_{pi} \kappa_i A_i} - 1, \bar{A}_{24}^{(i)} = -\frac{E_{p1}}{E_{pi} I_i} \\ \bar{A}_{31}^{(i)} &= -2 \frac{R_i}{R_1} \bar{k}_y, \bar{A}_{42}^{(i)} = -\left( \frac{R_i}{R_1} \right)^3 \bar{k}_\psi, (i = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (16)$$

特别地, 当  $\bar{A}_{31}^{(i)} = 0$  时,  $\bar{A}^{(i)}$  退化为基于 Euler 梁的系统矩阵。当所有桩段的  $\bar{A}^{(i)}$  相等时, 即为等截面桩。式中无量纲位移和内力分别为

$$y = R_1 \bar{y}, w = R_1 \bar{w}, z = R_1 \bar{z}, I = A_1 R_1^2 \bar{I}, \bar{k}_y = \frac{k_y R_1^2}{E_{p1} A_1}$$

$$\bar{k}_\psi = \frac{k_\psi}{E_{p1}A_1}, M = E_{p1}A_1R_1\bar{M}, Q = E_1A_1\bar{Q} \quad (17)$$

式(12)的解可表达为

$$\bar{x}(\bar{z}) = \bar{T}(\bar{z} - \bar{z}_0)\bar{x}_0 \quad (18)$$

式中:  $\bar{x}_0$  为梁始端的状态向量;  $\bar{T}(\bar{z} - \bar{z}_0)$  为从  $\bar{z}_0$  到  $\bar{z}$  的传递矩阵, 具体形式为

$$\bar{T}(\bar{z} - \bar{z}_0) = e^{\bar{A}(\bar{z} - \bar{z}_0)} \quad (19)$$

当式(18)取  $\bar{z} = \bar{z}_1$  时, 即可得到梁始末两端状态向量的矩阵传递关系:

$$\bar{x}_1 = \bar{T}(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)\bar{x}_0 \quad (20)$$

### 2.2 桩身响应求解

桩身弹簧刚度随位置坐标和变形而变化, 忽略梁段弹簧刚度的变化, 取梁始末两端弹簧刚度的平均值:

$$k_{yi} = \frac{k_{yi,0} + k_{yi,1}}{2}, k_{\psi i} = \frac{k_{\psi i,0} + k_{\psi i,1}}{2} \quad (21)$$

式中:  $k_{yi,0}$  和  $k_{yi,1}$ ,  $k_{\psi i,0}$  和  $k_{\psi i,1}$  分别为第  $i$  段梁始末两端的径向弹簧和转动弹簧刚度。此外, 弹簧刚度与土体性质有关, 对不同梁段取不同弹簧刚度, 可考虑成层土特性。在同一阶桩内, 第  $(i-1)$  段梁末端与第  $i$  段梁始端的状态向量间存在如下传递关系:

$$\bar{x}_{i-1,1} = \bar{x}_{i,0} \quad (22)$$

式中:  $\bar{x}_{i,j}$  为第  $i$  段梁始端或末端的状态向量, 其中, 第一个下标  $i$  表示梁的编号; 第二个下标  $j$  表示梁的始末端,  $j=0$  为始端,  $j=1$  为末端。

在变截面处, 土体对上一阶较大截面桩端存在土抗力, 因此, 第  $i$  个变截面处即第  $n_i$  段梁末端与第  $(n_i+1)$  段梁始端的变形和内力满足如下连续性条件:

$$\begin{cases} y_{n_i+1,0} = y_{n_i,1} \\ \psi_{n_i+1,0} = \psi_{n_i,1} \end{cases}, \begin{cases} Q_{n_i,1} = Q_{n_i+1,0} + k_{b\psi i}y_{n_i,1} \\ M_{n_i,1} = M_{n_i+1,0} + k_{b\psi i}\psi_{n_i,1} \end{cases} \quad (23)$$

式中:  $k_{b\psi i}$  和  $k_{b\psi i}$  分别为第  $i$  个变截面处的桩端弹簧径向和转动刚度。将式(23)无量纲化并整理为矩阵形式即可获得第  $n_i$  段梁末端与第  $(n_i+1)$  段梁始端状态向量的传递关系:

$$\bar{x}_{n_i,1} = \bar{J}^{(i)}\bar{x}_{n_i+1,0} \quad (i=1, 2, \dots, r-1) \quad (24)$$

式中:  $\bar{J}^{(i)}$  为第  $i$  个变截面处状态向量的传递矩阵:

$$\bar{J}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{k}_{b\psi i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\bar{k}_{b\psi i} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

联立式(20), (22), (24), 可得到桩顶到桩端状态向量的传递关系:

$$\bar{x}_{n,r} = \bar{T}_n\bar{T}_{n-1}\dots\bar{T}_{n_{r-1}+1}\bar{J}^{(r-1)}\bar{T}_{n_{r-1}}\dots\bar{T}_{n_i+1}\bar{J}^{(1)}\bar{T}_{n_1}\dots\bar{T}_1\bar{x}_{1,0} \quad (26)$$

### 2.3 边界条件

式(26)中含有 8 个未知数, 但仅 4 个方程, 需补充 4 个边界条件。常见的边界条件如表 1 所示。

将边界条件代入式(26), 便可求得桩顶与桩端的状态向量, 再根据式(20), (22), (24)可得到桩身任意截面处的状态向量。由于桩身抗弯刚度与土弹簧刚度取决于相应位置处的内力和变形, 这在开始计算时是未知的, 故需要采用迭代算法, 迭代过程如图 4 所示。其中, 利用式(9)计算桩身抗弯刚度时, 第  $i$  段梁的变形曲率  $\phi_i$  取梁段上、下截面的转角之差与梁段长的比值, 再根据所选取的弯矩-曲率关系模型计算得到弯矩  $M_i$ , 具体为

$$\phi_i = \frac{\psi_{i,0} - \psi_{i,1}}{\Delta z} \quad (27)$$

式中:  $\Delta z$  为所划分的梁段长度。

表 1 桩顶与桩端的约束边界条件

Table 1 Boundary conditions of pile head and end		
桩顶/端	约束形式	边界条件
桩顶	自由	$M_{1,0}=M_t, Q_{1,0}=H_t$
	固支	$\psi_{1,0}=0, Q_{1,0}=H_t$
桩端	自由	$M_{n,1}=M_b, Q_{n,1}=H_b$
	铰接	$y_{n,1}=0, M_{n,1}=0$
	固支	$\psi_{n,1}=0, y_{n,1}=0$

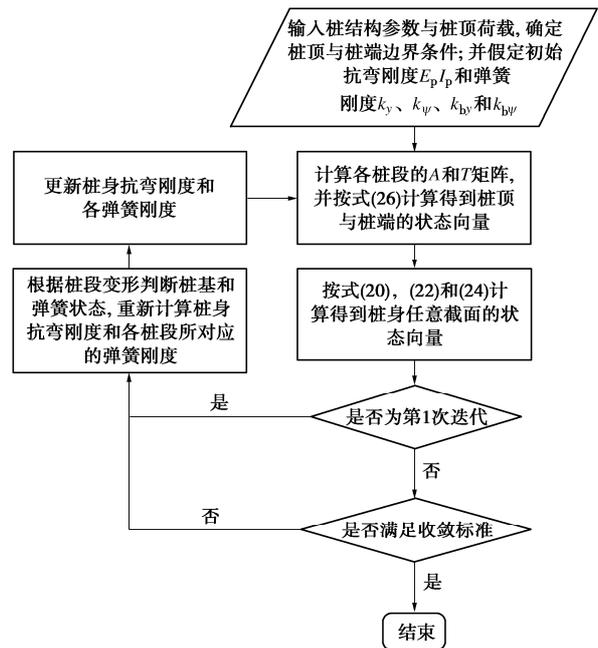


图 4 桩身响应计算流程图

Fig. 4 Flow chart for calculation of pile response

迭代的控制变量为各梁段的位移向量, 即

$$\mathbf{d} = [y_{1,1} \ \psi_{1,1} \ y_{2,1} \ \psi_{2,1} \ \dots \ y_{n,1} \ \psi_{n,1}] \quad (28)$$

第  $(k+1)$  次迭代的控制标准为

$$\|\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k\|_2 \leq 0.0001 \quad (29)$$

## 3 案例验证与分析

### 3.1 变截面桩验证

本节采用 MATLAB 编写阶梯型变截面桩水平响

应求解算法, 与 Ismael<sup>[1]</sup>阶梯型钻孔灌注桩现场水平受荷试验结果进行对比, 验证本文方法的适用性。试桩为二阶梯型钻孔灌注桩, 桩长  $L=5\text{ m}$ , 弹性模量  $E_p=47.68\text{ GPa}$ , 第一阶桩直径  $D_1=0.5\text{ m}$ , 长  $L_1=2\text{ m}$ , 第二阶桩直径  $D_2=0.3\text{ m}$ , 长  $L_2=3\text{ m}$ 。地基土主要为中密粉砂层, 重度  $\gamma=18.2\text{ kN/m}^3$ , 内摩擦角  $\varphi=31^\circ$ , 黏聚力  $c=20\text{ kPa}$ , 弹性模量  $E_s=22.9\text{ MPa}$ , 泊松比  $\nu_s=0.3$ 。 $p\text{-}y$  曲线采用 API 规范推荐的砂土公式; $m\text{-}\varphi$  曲线采用 API 规范推荐的  $\tau\text{-}w$  公式经式 (4) 计算得到; $H_b\text{-}y_b$  与  $M_b\text{-}\varphi_b$  曲线则根据式 (6), (7) 所计算。

图 5 (a) ~ (d) 为  $H=100\text{ kN}$  时利用本文方法计算得到的桩身响应, 弯矩预测值与实测值变化趋势较一致, 但结果偏保守。由于变截面处 ( $z=2\text{ m}$ ) 桩端土反力作用, 桩身剪力和弯矩均存在突变。图中也给出了利用 Euler 梁理论计算得到的桩身响应, 可以看出, 采用 Timoshenko 梁理论计算得到的桩身变形相较于 Euler 梁大, 特别是截面转角。本例中采用 Timoshenko 和 Euler 梁理论计算得到的泥面处截面转角  $\psi_t$  分别为  $0.054^\circ$  和  $0.052^\circ$ , 前者比后者大 3.8%。特别地,  $L/D$  越小, 桩顶荷载越大, 桩身剪切变形越加显著, 两种梁理论计算得到的桩身变形响应差别越大。因此, 针对任意长径比的桩基, 本文方法具有更广的适用性。

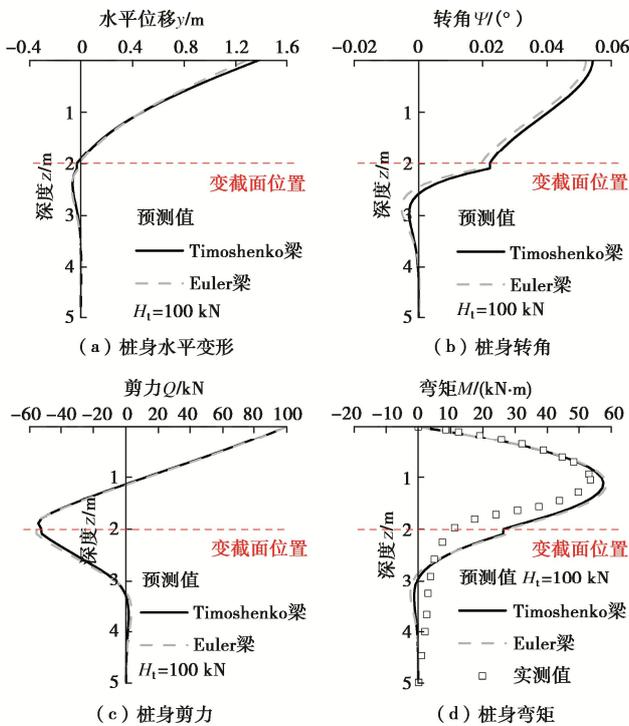


图 5 本文方法与试验数据的对比

Fig. 5 Comparison between proposed analytical method and field test data

图 6 为桩顶水平荷载-泥面处水平位移预测曲线, 与实测曲线变化趋势亦基本一致。图 6 也给出了  $D=0.3$

$m$  和  $0.5\text{ m}$  的等截面桩曲线。当  $H_t=150\text{ kN}$  时, 对于等截面桩, 当  $D$  从  $0.3\text{ m}$  增大到  $0.5\text{ m}$ , 泥面处水平位移由  $16.6\text{ mm}$  减小到  $2.3\text{ mm}$ , 减小了 86.14%; 对于变截面桩, 泥面处水平位移为  $3.4\text{ mm}$ , 与  $D=0.3\text{ m}$  相比, 减小了 79.52%。可以看出, 变截面桩可以有效地减小桩身变形, 提高桩的水平承载能力。

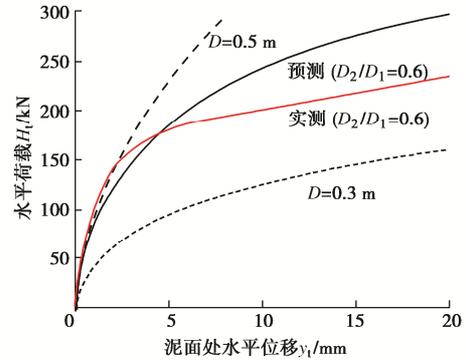


图 6 本文方法与试验的荷载-位移响应对比

Fig. 6 Comparison of load-displacement responses between proposed analytical method and field test data

### 3.2 材料非线性验证

本节与 Wang 等<sup>[27]</sup>的钻孔灌注桩现场水平受荷试验结果进行对比, 验证本文方法对桩材料非线性的考虑。试桩为等截面钻孔灌注桩, 桩长  $L=29\text{ m}$ , 桩径  $D=0.8\text{ m}$ , 弹性模量  $E_p=30\text{ GPa}$ , 描述材料非线性效应的桩截面弯矩-曲率关系如图 7 所示。

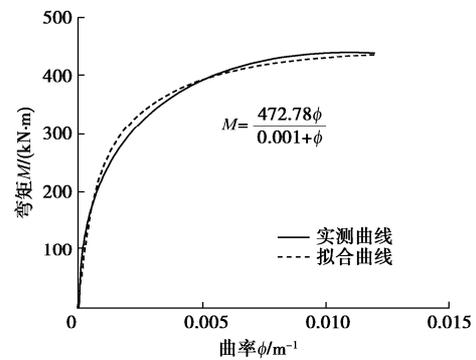


图 7 桩截面弯矩-曲率关系

Fig. 7 Relationship between moment and curvature of pile section

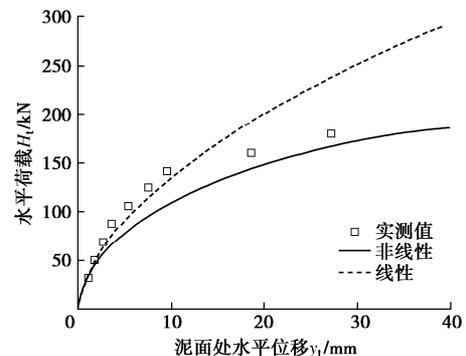


图 8 本文方法与试验的荷载-位移响应对比

Fig. 8 Comparison of load-displacement responses between proposed analytical method and field test data

地基土为淤泥质土，重度  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ，不排水抗剪强度沿深度线性增加为  $c_u = 11.4 \sim 52.0 \text{ kPa}$ ， $\varepsilon_{50} = 0.015$ ， $p$ - $y$  曲线采用 API 规范推荐的黏土公式，由于桩为柔性桩且缺乏相关土体参数，故其余 3 项土抗力在此不作考虑。图 8 为考虑材料非线性效应时桩顶水平荷载-泥面处水平位移预测曲线，可以看出：①考虑材料非线性的预测值与实测值较为接近；②随着荷载增大，桩身变形逐渐发展，桩身出现损伤导致其抗弯刚度有所下降，因此考虑材料非线性的计算结果偏安全。

### 3.3 参数分析

本节以案例验证中的变截面桩为例，结构与土层参数同节 3.1，探究变径位置、桩径比和弹性模量比对桩受荷响应的影响。

#### (1) 变径位置 $L_1/L$ 的影响

设置第一阶桩长  $L_1$  为 5, 4, 3, 2 和 1 m ( $L_1/L$  为 1, 0.8, 0.6, 0.4 和 0.2)，其余参数保持不变，探究变径位置对变截面桩受荷特性的影响。图 9 (a) ~ (d) 为  $H_t = 200 \text{ kN}$  时不同变径位置下桩身受荷响应计算结果，可以看出：变径位置上移，①桩身变形增大，弯矩峰值减小；②变形变化幅度逐渐增大，当  $L_1/L < 0.4 \sim 0.6$  时，继续上移变径位置对桩身变形影响较大，这与试验结果<sup>[1]</sup>基本一致，这是因为桩身变形集中在上半段 ( $z \leq 4D = 2 \text{ m}$ )，当缩径段位于变形集中段时，对桩身变形影响显著；③弯矩峰值点深度由  $0.30L$  上移至  $0.24L$ ，这是由于桩基上部刚度减小，桩身变形增大，上部土体的抗力亦增大，故弯矩峰值点上移。

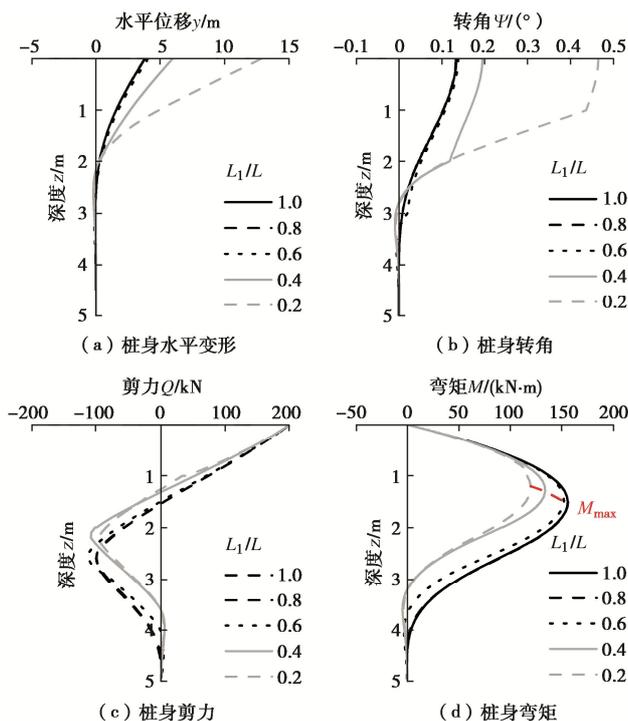


图 9  $H_t = 200 \text{ kN}$  时不同变径位置下桩身受荷响应  
Fig. 9 Pile responses under different  $L_1/L$  ( $H_t = 200 \text{ kN}$ )

#### (2) 桩径比 $D_2/D_1$ 的影响

设置第二阶桩  $D_2$  为 0.5, 0.4, 0.3, 0.2 和 0.1 m ( $D_2/D_1$  为 1, 0.8, 0.6, 0.4 和 0.2)，其余参数保持不变，探究桩径比对桩身受荷特性的影响。图 10 (a) ~ (d) 为不同桩径比下的计算结果，可以看出：桩径比减小，①桩身变形逐渐增大，弯矩峰值逐渐减小；②变形变化幅度逐渐增大，当  $D_2/D_1 < 0.6$  时，继续减小缩径段桩径对桩身变形影响显著增大；③弯矩峰值点深度由  $0.3L$  上移至  $0.2L$ ，这与变径位置的影响相似。

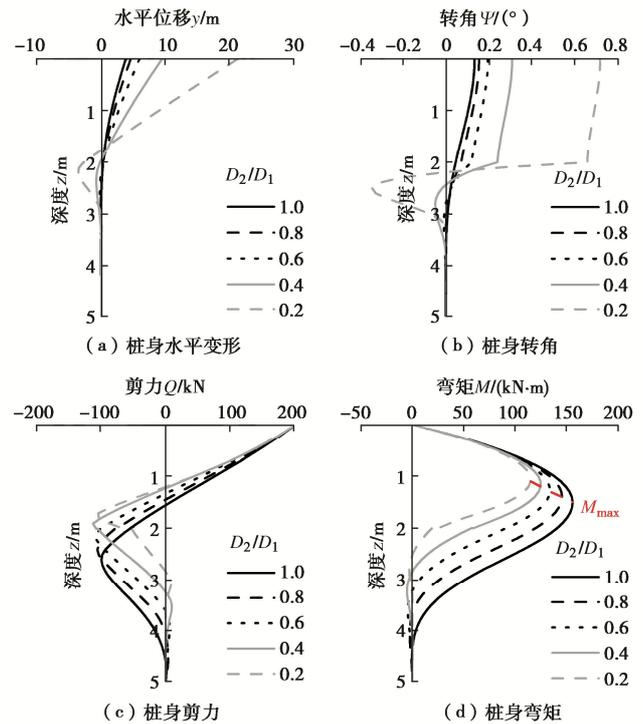


图 10  $H_t = 200 \text{ kN}$  时不同桩径比下桩身受荷响应

Fig. 10 Pile responses under different  $D_2/D_1$  ( $H_t = 200 \text{ kN}$ )

#### (3) 弹性模量比 $E_2/E_1$ 的影响

设置第二阶桩  $E_2$  为 47.68, 38.14, 28.61, 19.07 和 9.4 GPa ( $E_2/E_1$  为 1, 0.8, 0.6, 0.4 和 0.2)，其余参数保持不变，探究弹性模量比对变截面桩受荷特性的影响。图 11 (a) ~ (d) 为  $H_t = 200 \text{ kN}$  时不同弹性模量比下桩身受荷响应的计算结果，与变径位置和桩径比的影响相似，可以看出：弹性模量比减小，①桩身变形增大，弯矩峰值减小；②变形变化幅度逐渐增大，当  $E_2/E_1 < 0.6$  时，继续减小缩径段弹性模量对桩身变形的影响极大；③弯矩峰值点略上移。

#### (4) $L_1/L$ , $D_2/D_1$ 和 $E_2/E_1$ 敏感性分析

以  $D = 0.5 \text{ m}$  的等截面桩为参考，其水平承载力记作  $H_{u0}$ ， $L_1/L$ 、 $D_2/D_1$  和  $E_2/E_1$  设置为 1, 0.8, 0.6, 0.4 和 0.2，探究水平承载力对桩参数的敏感性，用  $\Delta H_u/H_{u0}$  来表示，如图 12 所示，可以看出：①水平承载力对三者的敏感性为：桩径比 > 变径位置 > 弹性模量比；②本

文建议  $L_1/L$ ,  $D_2/D_1$  和  $E_2/E_1$  的较优值为 0.6。

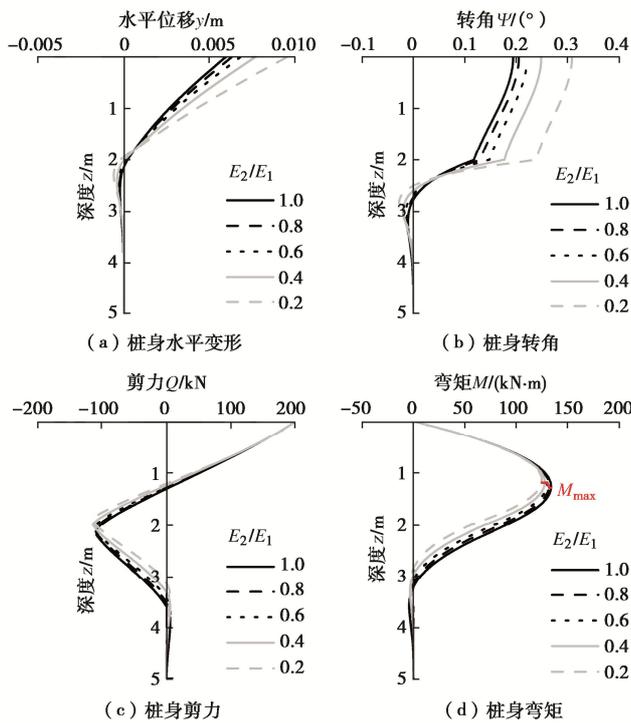


图 11  $H_t=200\text{ kN}$  时不同弹性模量比下桩身受荷响应  
Fig. 11 Pile responses under different  $E_2/E_1$  ( $H_t=200\text{ kN}$ )

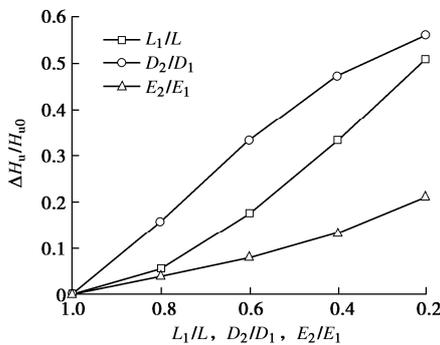


图 12  $L_1/L$ ,  $D_2/D_1$  和  $E_2/E_1$  与  $\Delta H_u/H_{u0}$  的关系  
Fig. 12 Relationship among  $L_1/L$ ,  $D_2/D_1$ ,  $E_2/E_1$  and  $\Delta H_u/H_{u0}$

### 4 结 论

本文基于 Timoshenko 梁理论建立了变截面桩的四弹簧分析模型, 得到了适用性更强的水平受荷响应解析解。该方法采用状态空间法求解, 考虑了非线性桩土相互作用、尺寸效应、剪切变形和桩材料非线性效应, 统一的解析解可适用于任意长细比桩与成层土工况。通过与试验结果对比验证了本文方法的适用性。利用解析方法, 探究了变径位置、桩径比、弹性模量比对桩基受荷响应的影响, 得到以下两点结论。

(1) 随着变径位置的上移、桩径比和弹性模量比的减小, 桩身变形增大, 弯矩峰值点上移。水平承载力对三者的敏感性为: 桩径比>变径位置>弹性模量

比。

(2) 建议变径位置、桩径比、弹性模量比的较优值为 0.6。

### 参考文献:

[1] ISMAEL N F. Behavior of step tapered bored piles in sand under static lateral loading[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010, **136**(5): 669-676.

[2] 常林越, 王金昌, 朱向荣, 等. 双层弹塑性地基水平受荷桩解析计算[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(3): 433-440. (CHANG Linyue, WANG Jinchang, ZHU Xiangrong, et al. Analytical calculation of laterally loaded piles in double-layered elastoplastic soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(3): 433-440. (in Chinese))

[3] ZHU M X, ZHANG Y B, GONG W M, et al. Generalized solutions for axially and laterally loaded piles in multilayered soil deposits with transfer matrix method[J]. International Journal of Geomechanics, 2017, **17**(4): 4016104-4016122.

[4] 胡文韬, 刘 豆, 耿大新, 等. 水平受荷阶梯形变截面桩的内力及变形分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2020, **54**(4): 739-747. (HU Wentao, LIU Dou, GENG Daxin, et al. Internal force and deformation of step-tapered pile under lateral loads[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2020, **54**(4): 739-747. (in Chinese))

[5] 李 丹, 简 迪, 吴卓尔, 等. 三级阶梯型变截面嵌岩桩的承载特性研究[J]. 岩土力学, 2020(增刊 2): 1-8. (LI Dan, JIAN Di, WU Zhuoer, et al. Research on bearing characteristics of three-stage stepped rock-socketed piles[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020(S2): 1-8. (in Chinese))

[6] HAN J, FROST J D. Load-Deflection response of transversely isotropic piles under lateral loads[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2000, **24**(5): 509-529.

[7] 竺明星, 龚维明, 卢红前, 等. 考虑侧阻与端阻影响的基桩水平承载力传递矩阵解[J]. 工程力学, 2018, **35**(增刊 1): 230-238. (ZHU Mingxing, GONG Weiming, LU Hongqian, et al. Transfer matrix solutions for lateral behavior of pile foundation considering the skin and end resistance effect[J]. Engineering Mechanics, 2018, **35**(S1): 230-238. (in Chinese))

[8] 竺明星, 戴国亮, 龚维明, 等. 水平荷载下桩身侧阻力矩的作用机制与计算模型研究[J]. 岩土力学, 2019, **40**(7): 2593-2607, 2662. (ZHU Mingxing, DAI Guoliang, GONG Weiming, et al. Mechanism and calculation models of resisting moment caused by shaft resistance for laterally

- loaded pile[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, **40**(7): 2593-2607, 2662. (in Chinese))
- [9] BYRNE B W, HOULSBY G T, BURD H J, et al. PISA design model for monopiles for offshore wind turbines: application to a stiff glacial clay till[J]. *Géotechnique*, 2020, **70**(11): 1030-1047.
- [10] LIANG F Y, LI Y C, LI L, et al. Analytical solution for laterally loaded long piles based on fourier-laplace integral[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, **38**(21/22): 5198-5216.
- [11] WANG J C, HUANG W M, XU R Q, et al. Analytical solution for segmental tunnel lining incorporating interaction between adjacent rings[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2020, **146**(7): 04020075-04020091.
- [12] ZHANG X D, WANG J C, CHEN Q J, et al. Analytical method for segmental tunnel linings reinforced by secondary lining considering interfacial slippage and detachment[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2021, **21**(6): 4021084.
- [13] REESE L, VAN I W, HOLTZ R. Single piles and pile groups under lateral loading[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, **55**(1): B9-B10.
- [14] API (American Petroleum Institute). Recommended Practice Planning, Designing, and Constructing Fixed Offshore Platforms-Working Stress Design[S]. Washington D C: API Recommended Practice 2A-WSD, 2014.
- [15] 俞剑, 黄茂松, 李森, 等. 黏土中海上风电水平受荷大直径单桩设计方法的思考[J]. *海洋开发与管理*, 2018, **35**(增刊 1): 34-39. (YU Jian, HUANG Maosong, LI Sen, et al. Thinking on design method of laterally loaded large diameter monopile for offshore wind turbines in clay[J]. *Ocean Development and Management*, 2018, **35**(S1): 34-39. (in Chinese))
- [16] ZHANG Y H, ANDERSEN K H. Soil reaction curves for monopiles in clay[J]. *Marine Structures*, 2019, **65**: 94-113.
- [17] MAHESHWARI B K, and WATANABE H. Nonlinear dynamic behavior of pile foundations: effects of separation at the soil-pile interface[J]. *Soils and Foundations*, 2006, **46**(4): 437-448.
- [18] ASHOUR M, HELAL A. Contribution of vertical skin friction to the lateral resistance of large-diameter shafts[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2014, **19**(2): 289-302.
- [19] RONDOLPH M F, WROTH C P. Analysis of deformation of vertically loaded piles[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1978, **104**(12): 1465-1488.
- [20] WANG L Z, LAI Y Q, HONG Y, et al. A unified lateral soil reaction model for monopiles in soft clay considering various length-to-diameter (L/D) ratios[J]. *Ocean Engineering*, 2020, **212**: 107492-107506.
- [21] 王伯惠, 上官兴. 中国钻孔灌注桩新发展[M]. 北京: 人民交通出版社, 1999: 89-90. (WANG Bohui, SHANGGUAN Xing. *New Development of Bored pile in China*[M]. Beijing: China Communications Press, 1999: 89-90. (in Chinese))
- [22] 公路桥涵地基与基础设计规范: JTG 3363—2019[S]. 北京: 人民交通出版社, 2019. (Specifications for Design of Foundation of Highway Bridges and Culverts: JTG 3363—2019[S]. Beijing: China Communications Press, 2019. (in Chinese))
- [23] GEROLYMOS N, GAZETAS G. Static and dynamic response of massive caisson foundations with soil and interface nonlinearities—validation and results[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2006, **26**(5): 377-394.
- [24] KO J, JEONG S. Plugging effect of open-ended piles in sandy soil[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2015, **52**(5): 535-547.
- [25] REESE L C, WANG S T. Analysis of piles under lateral loading with nonlinear flexural rigidity[C]// *Proceedings of International Conference on Design and Construction of Deep Foundation*, Orlando, 1994.
- [26] COWPER G R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, **33**(2): 335-340.
- [27] WANG L Z, HE B, HONG Y, et al. Field tests of the lateral monotonic and cyclic performance of jet grouting Reinforced cast-in-place piles[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2015, **141**(5): 06015001.