

DOI: 10.11779/CJGE2021S1023

# 基于卡尔曼滤波与指数平滑法融合模型的沉降预测新方法

于永堂<sup>1,2</sup>, 郑建国<sup>1,2</sup>, 张继文<sup>1,3</sup>, 黄鑫<sup>2</sup>, 徐文涛<sup>2</sup>

(1. 机械工业勘察设计研究院有限公司陕西省特殊岩土性质与处理重点实验室, 陕西 西安 710043; 2. 西安建筑科技大学土木工程学院, 陕西 西安 710055; 3. 西安交通大学人居环境与建筑工程学院, 陕西 西安 710049)

**摘要:**针对含噪声沉降监测数据波动性大、离散性强,难以直接用于沉降趋势预测和稳定性状态评估,以及传统预测模型参数无法随实测数据更新而可变自适应等问题,提出了基于卡尔曼滤波与指数平滑法融合模型(简称KF-ES融合模型)的沉降预测新方法。该方法的思路是:首先,运用卡尔曼滤波对原始沉降数据进行三次滤波降噪处理;然后,将卡尔曼滤波一次、二次和三次处理值对应替换指数平滑法一次、二次、三次平滑值,卡尔曼滤波增益系数替换三次指数平滑系数;最后,采用替换后的平滑值和平滑系数计算三次指数平滑法的模型参数,建立预测模型并外推预测。实例检验结果表明,KF-ES融合模型能显著减弱沉降数据中含有的随机噪声干扰,具有自适应性强、预测实时性好等优点,适合短期动态预测。

**关键词:**卡尔曼滤波;指数平滑法;融合模型;沉降预测

中图分类号: TU433 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2021)S1-0127-05

**作者简介:**于永堂(1983—),男,博士,高级工程师,主要从事岩土工程监测与检测技术、湿陷性土地基处理技术的研究与应用。E-mail: yuyongtang@126.com。

## Prediction of settlement based on fusion model of Kalman filter and exponential smoothing algorithm

YU Yong-tang<sup>1,2</sup>, ZHENG Jian-guo<sup>1,2</sup>, ZHANG Ji-wen<sup>1,3</sup>, HUANG Xin<sup>2</sup>, XU Wen-tao<sup>2</sup>

(1. Shaanxi Key Laboratory of Behavior and Foundation Treatment for Special Rocks and Soils, China JK Institute of Engineering Investigation and Design Co., Ltd., Xi'an 710043, China; 2. College of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an, 710055, China; 3. School of Human Settlements and Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** It is difficult to predict the settlement trend and to assess the stability of the settlement due to the large fluctuation and strong discreteness of the settlement monitoring data with noise, and the parameters of the conventional prediction models cannot be updated with the latest data. In this study, a prediction method based on the fusion model of Kalman filter (KF) and exponential smoothing (ES) algorithm is proposed. The idea of this method is as follows: Firstly, the Kalman filter is used to process the original settlement data for three times of filtering and noise reduction. Secondly, the first, second and third processing values of the Kalman filter are replaced by the smoothing values of the same processing times of the exponential smoothing method, and the gain coefficient of Kalman filter is replaced by the smoothing coefficient of the third exponential smoothing method. Finally, the parameters of the cubic exponential smoothing method are calculated by using the replaced smoothing values and smoothing coefficients, and the prediction model is established and extrapolated. The test results show that the KF-ES fusion model can significantly reduce the random noise interference in settlement data and has the advantages of strong adaptability, good real-time prediction, and it is suitable for short-term dynamic prediction.

**Key words:** Kalman filter; exponential smoothing method; fusion model; prediction of settlement

## 0 引言

在山区高填方地基、围海造地吹填地基、采空区建筑地基和土岩组合地基等工程中,地基沉降的发展趋势是工程中十分关心的问题。现有地基沉降的理论计算方法受其假设条件、参数取值与实际存在差异等原因,沉降计算结果往往不准确<sup>[1]</sup>,为此工程上常常依据实测沉降资料来推算剩余沉降和最终沉降,常用的方

法如 Logistic 模型法<sup>[2]</sup>、Gompertz 模型法<sup>[3]</sup>、双曲线法<sup>[4]</sup>、Asaoka 法<sup>[5]</sup>、指数函数法<sup>[6]</sup>和星野法<sup>[7]</sup>等。上述方法的预测效果受现场实测数据质量的影响很大,

**基金项目:**国家自然科学基金项目(41790442);陕西省“三秦学者”创新团队支持计划资助项目(2013KCT-13);陕西省技术创新引导专项(基金)计划项目(2020CGHJ-002)

**收稿日期:**2020-12-15

然而一些工程的沉降观测过程受施工和测量误差等多种外界因素干扰,数据中常含有大量随机噪声,呈现“小量级、大波动”的特点<sup>[8]</sup>。传统预测方法并不考虑数据噪声的识别和处理问题,直接将此类数据用于沉降预测,难以实现高精度预测。此外,传统预测方法对沉降数据进行回归分析时,模型参数不能随沉降数据的更新而自适应改变,即无法反映模型参数的时变特性,难以动态快速预测沉降。因此,为了提高沉降预测的精度、可靠性和时效性,需要考虑对含噪声数据进行处理,同时引入时变参数模型,以解决传统预测方法的不足。

卡尔曼滤波(Kalman Filter,简称KF)理论<sup>[9-10]</sup>是Kalman于20世纪60年代初提出的一种统计估算方法,通过处理一系列带有误差的实际测量数据而得到所需物理参数的最佳估算值,是一种对含噪声数据处理的有效方法,能够提高变形监测数据精度<sup>[11]</sup>。卡尔曼滤波的基本方程是时间域内的递推形式,在计算时不需要存储大量数据,一旦观测到新的观测值,随时可以求得新的滤波值,模型参数可动态自适应,特别适合计算机实时处理观测数据<sup>[12]</sup>。指数平滑方法(Exponential Smoothing,简称ES)是一种特殊的加权移动平均法,常用于时间序列的分析预测。平滑系数是指数平滑模型中的关键参数,平滑系数的大小对模型预测值的影响很大<sup>[13]</sup>。传统指数平滑法的平滑系数取值多凭经验,受人为主观因素影响大,一旦确定就不能依据时间序列的阶段特点而变动<sup>[14]</sup>。因此,若想提高指数平滑法在沉降预测中的时效性和准确性,就必须解决平滑系数的时变自适应问题。

本文将卡尔曼滤波和指数平滑法相结合,提出了基于卡尔曼滤波法与指数平滑法融合模型(简称KF-ES融合模型)的沉降预测新方法,解决了含噪声数据处理、模型参数的时变自适应等问题,并采用陕北某黄土高填方场地的实测沉降数据对KF-ES融合模型的预测效果进行了检验。该方法可为沉降数据的降噪处理和动态预测提供参考与借鉴。

## 1 融合模型原理及实现

### 1.1 卡尔曼滤波法的原理及其沉降预测意义

卡尔曼滤波法的基本原理及计算过程如下<sup>[8-9]</sup>:假设 $t$ 时刻的系统状态是从 $(t-1)$ 时刻的状态演化而来,建立卡尔曼滤波的系统状态方程:

$$X_t = F_t X_{t-1} + B_t U_t + W_t \quad (1)$$

式中 $X_t$ 为 $t$ 时刻的状态向量(真实值); $F_t$ 为状态转移矩阵,表示不包括系统控制变量以及噪音过程在内的系统状态参数在 $t-1$ 时刻对系统 $t$ 时刻的影响; $U_t$ 为 $t$ 时刻的控制输入向量,一般不作考虑,其值取0即可;

$B_t$ 为 $t$ 时刻的控制输入矩阵; $W_t$ 为 $t$ 时刻的过程噪声,其协方差矩阵记为 $Q_t$ ,是均值为0的高斯白噪声序列,服从正态分布 $W_t \sim N(0, Q_t)$ 。 $t$ 时刻 $X_t$ 的观测值 $Z_t$ 满足卡尔曼滤波的系统观测方程:

$$Z_t = H_t X_t + V_t \quad (2)$$

式中 $Z_t$ 为系统在 $t$ 时刻的观测值向量; $H_t$ 为 $t$ 时刻的测量转移矩阵(观测矩阵),表示状态向量(真实值) $X_t$ 和观测值向量 $Z_t$ 之间的关系,当观测值就是真实值时,该矩阵为单位矩阵; $V_t$ 为 $t$ 时刻的观测噪声,其协方差矩阵记为 $R_t$ ,是均值为0的高斯白噪声序列,服从正态分布 $V_t \sim N(0, R_t)$ 。当已知 $F_t, U_t, B_t, Z_t, H_t, X_{t-1}, W_t$ 与 $V_t$ 都是随机向量,且彼此相互独立,可通过分步迭代更新方式求解 $X_t$ 。离散型卡尔曼滤波的迭代更新过程包括时间更新和测量更新。

#### (1) 时间更新方程

系统状态的第一步预测:

$$\hat{X}_{t|t-1} = F_t \hat{X}_{t-1|t-1} + B_t U_t \quad (3)$$

系统均方误差的第一步预测:

$$P_{t|t-1} = F_t P_{t-1|t-1} F_t^T + Q_t \quad (4)$$

式(3)中, $\hat{X}$ 为卡尔曼滤波状态向量的估计值;式(4)中, $P$ 为真实值 $X$ 与估计值 $\hat{X}$ 的均方误差,也是卡尔曼滤波误差的协方差矩阵。式(3)、(4)中,下标 $t|t-1$ 表示由 $t-1$ 时刻对 $t$ 时刻的预测结果, $t-1|t-1$ 表示 $t-1$ 时刻观测的结果是上一状态的最优结果。

#### (2) 测量更新方程

卡尔曼滤波估计方程( $t$ 时刻的最优值):

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t (Z_t - H_t \hat{X}_{t|t-1}) \quad (5)$$

均方误差更新矩阵( $t$ 时刻的最优均方误差):

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t H_t P_{t|t-1} \quad (6)$$

式(5)、(6)中的 $K_t$ 为卡尔曼滤波增益系数(相当于权重系数)。

$$K_t = P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1} \quad (7)$$

若能求得均方差矩阵 $P_t$ 在最小条件下的增益系数 $K_t$ ,就能得到对状态的线性最优估计。由式(7)可知,观测噪声协方差 $R_t$ 越小,卡尔曼增益 $K_t$ 越大。一方面,当 $R_t$ 趋向于0时,

$$\lim_{R_t \rightarrow 0} K_t = H_t^{-1} \quad (8)$$

另一方面,当估计误差协方差 $P_{t|t-1}$ 越小,卡尔曼增益越小,当 $P_{t|t-1}$ 趋向于0时,

$$\lim_{P_{t|t-1} \rightarrow 0} K_t = 0 \quad (9)$$

由式(8)、(9)可知,此时卡尔曼增益 $K_t$ 的取值为 $[0, H_t^{-1}]$ 。若当 $H_t = 1$ 时,卡尔曼增益 $K_t$ 取值区间为 $[0, 1]$ 。若将监测点的沉降变形过程看成是一个随机过程,简化式(3)~(7)中的卡尔曼滤波方程,可得到一组递推方程:

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_{d,t-1} &= \hat{X}_{d,t-1}, \\ P_{d,t-1} &= P_{d,t-1} + Q_t, \\ \hat{X}_{d,t} &= \hat{X}_{d,t-1} + K_t(Z_t - X_{d,t-1}), \\ P_{d,t} &= P_{d,t-1} - K_t P_{d,t-1}, \\ K_t &= P_{d,t-1} (P_{d,t-1} - R_t)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

该方程描述了滤波对象中最为简单的一种线性随机动态系统。

### 1.2 指数平滑法预测模型

工程中的沉降数据序列呈非线性递增趋势,因此采用三次指数平滑法预测,其预测模型如下<sup>[15]</sup>:

(1) 计算  $t$  时期的一次、二次、三次指数平滑值  $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, S_t^{(3)}$ :

$$\left. \begin{aligned} S_t^{(1)} &= aZ_t + (1-a)S_{t-1}^{(1)}, \\ S_t^{(2)} &= aS_t^{(1)} + (1-a)S_{t-1}^{(2)}, \\ S_t^{(3)} &= aS_t^{(2)} + (1-a)S_{t-1}^{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中,  $a$  为平滑系数(可视为权重系数),取值范围为  $[0, 1]$ ,  $Z_t$  为  $t$  时刻观测值。

(2) 建立  $t+T$  期的三次指数平滑法预测模型:

$$\hat{S}_{t+T} = \alpha + \beta T + \gamma T^2, \quad (12)$$

式中,  $\hat{S}_{t+T}$  为  $t+T$  期的预测值,  $T$  为预测期数,  $\alpha, \beta, \gamma$  为预测模型参数,

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 3S_t^{(1)} - 3S_t^{(2)} + S_t^{(3)}, \\ \beta &= a[(6-5a)S_t^{(1)} - 2(5-4a)S_t^{(2)} + \\ &\quad (4-3a)S_t^{(3)}] / [2 - (1-a)^2], \\ \gamma &= a^2(S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)}) / [2(1-a)^2]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

### 1.3 卡尔曼滤波与指数平滑法融合模型的建模方法

本文在卡尔曼滤波算法的基础上融入了指数平滑预测方法,建立沉降预测融合模型。

(1) 卡尔曼滤波的沉降数据处理过程

测量数据的迭代更新:将  $t-1$  时刻得到的卡尔曼滤波处理值设定为当前  $t$  时刻的系统初始状态值,

$$X_{d,t-1}^{(i)} = X_{d,t-1}^{(i)}, \quad (14)$$

式中,  $X_{d,t-1}^{(i)}$  为  $t-1$  时刻得到的卡尔曼滤波处理值,  $i$  为处理次数,当  $i=1, 2, 3$  时分别代表一次处理值、二次处理值和三次处理值。系统初始状态值所对应的方差值,

$$P_{d,t-1}^{(i)} = P_{d,t-1}^{(i)} + Q_t, \quad (15)$$

式中,  $P_{d,t-1}^{(i)}$  为卡尔曼滤波的处理值对应的方差值,当  $i=1, 2, 3$  时分别代表一次处理值、二次处理值和三次处理值对应的方差值。

测量数据的卡尔曼滤波三次处理。首先对数据进行一次卡尔曼滤波处理,得出卡尔曼滤波一次处理值  $X_{d,t}^{(1)}$ ,

$$X_{d,t}^{(1)} = X_{d,t-1}^{(1)} + K_t^{(1)}(Z_t - X_{d,t-1}^{(1)}), \quad (16)$$

式中,  $K_t^{(1)}$  为卡尔曼滤波一次增益,

$$K_t^{(1)} = P_{d,t-1}^{(1)} / (P_{d,t-1}^{(1)} + R_t). \quad (17)$$

然后对数据进行二次卡尔曼滤波处理,得出卡尔曼滤波二次处理值  $X_{d,t}^{(2)}$ ,

$$X_{d,t}^{(2)} = X_{d,t-1}^{(2)} + K_t^{(2)}(X_{d,t}^{(1)} - X_{d,t-1}^{(2)}), \quad (18)$$

式中,  $K_t^{(2)}$  为卡尔曼滤波二次增益,

$$K_t^{(2)} = P_{d,t-1}^{(2)} / (P_{d,t-1}^{(2)} + R_t). \quad (19)$$

最后对数据进行三次卡尔曼滤波处理,得出卡尔曼滤波三次处理值  $X_{d,t}^{(3)}$ ,

$$X_{d,t}^{(3)} = X_{d,t-1}^{(3)} + K_t^{(3)}(X_{d,t}^{(2)} - X_{d,t-1}^{(3)}), \quad (20)$$

式中,  $K_t^{(3)}$  为卡尔曼滤波三次增益,

$$K_t^{(3)} = P_{d,t-1}^{(3)} / (P_{d,t-1}^{(3)} + R_t). \quad (21)$$

卡尔曼滤波三次处理值对应方差的更新:更新卡尔曼滤波一次处理值、二次处理值和三次处理值所对应的方差值,使算法可以不断运行下去直到数据处理完毕。方差更新公式为

$$P_{d,t}^{(i)} = (1 - K_t^{(i)})P_{d,t-1}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (22)$$

(2) 沉降预测 KF-ES 融合模型的建立

将式(13)中的平滑系数  $a$ 、一次平滑值  $S_t^{(1)}$ 、二次平滑值  $S_t^{(2)}$  和三次平滑值  $S_t^{(3)}$ , 分别采用卡尔曼滤波三次增益值  $K_t^{(3)}$ 、卡尔曼滤波一次处理值  $X_{d,t}^{(1)}$ 、二次处理值  $X_{d,t}^{(2)}$  和三次处理值  $X_{d,t}^{(3)}$  替换,对应  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  的求解公式为

$$\alpha = 3X_{d,t}^{(1)} - 3X_{d,t}^{(2)} + X_{d,t}^{(3)}, \quad (23)$$

$$\beta = \frac{K_t^{(3)}}{2[1 - K_t^{(3)}]^2} \{ [6 - 5K_t^{(3)}]X_{d,t}^{(1)} - 2[5 - 4K_t^{(3)}]X_{d,t}^{(2)} + [4 - 3K_t^{(3)}]X_{d,t}^{(3)} \}, \quad (24)$$

$$\gamma = \frac{[K_t^{(3)}]^2 [X_{d,t}^{(2)} - 2X_{d,t}^{(1)} + X_{d,t}^{(3)}]}{2[1 - K_t^{(3)}]^2}. \quad (25)$$

将求得的  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  带入式(12)从而建立预测融合模型,便可以求得  $t+T$  期( $T=1, 2, \dots, n$ )的沉降预测值。本次根据上述原理和建模方法,采用 VB 语言编制了专门的计算程序。

## 2 工程实例分析与效果检验

陕北某黄土高填方工程在大厚度填方场地、高陡边坡等重点区域,设置北斗变形监测系统,观测地表沉降。受自然环境、现场施工和测量误差等因素影响,部分北斗监测点的沉降数据含有较多噪声,为此将 KF-ES 融合模型用于含噪声数据的处理和外推预测。

### 2.1 含大量噪声沉降数据的预测效果

图 1 为含大量噪声的北斗监测点 BDS0, BDS1, 采用 KF-ES 融合模型的预测效果。BDS0 共 40 d 数据,采用前 30 d 数据建模,向后预测 10 d 数据; BDS1 共

60 d 数据,采用前 50 d 数据建模,向后预测 10 d 数据。本次采用水准测量方法观测北斗监测点的沉降量,作为北斗监测点真实沉降量的参考值。由图可知,经 KF-ES 融合模型降噪处理后,原始沉降曲线的数据跳跃变小,表明数据中的随机噪声得到减弱,但卡尔曼滤波降噪存在一定的时间滞后性,即预测值变化滞后于观测值的变化,尤其在图 1(b)中数据发生剧烈变化时更加明显,这也是卡尔曼滤波的固有特性。将 KF-ES 融合模型预测值偏离参考值(即水准观测值)的程度,采用绝对误差  $\Delta e$  ( $\Delta e = s_t - \hat{s}_t$ ,  $s_t$  为实测值,  $\hat{s}_t$  为预测值)和相对误差  $\delta$  ( $\delta = \Delta e / s_t$ ) 来评价。外推预测结果显示, BDS0 的  $\Delta e$  变化范围为  $-2.0 \sim 7.3$  mm,  $\delta$  变化范围为  $-1.9\% \sim 6.8\%$ ; BDS1 的绝对误差  $\Delta e$  变化范围为  $-0.4 \sim 0.5$  mm, 相对误差  $\delta$  变化范围为  $-2.6\% \sim 3.0\%$ , 降噪后的沉降预测曲线与水准实测曲线接近,表明 KF-ES 融合模型能较好地反映真实沉降趋势。

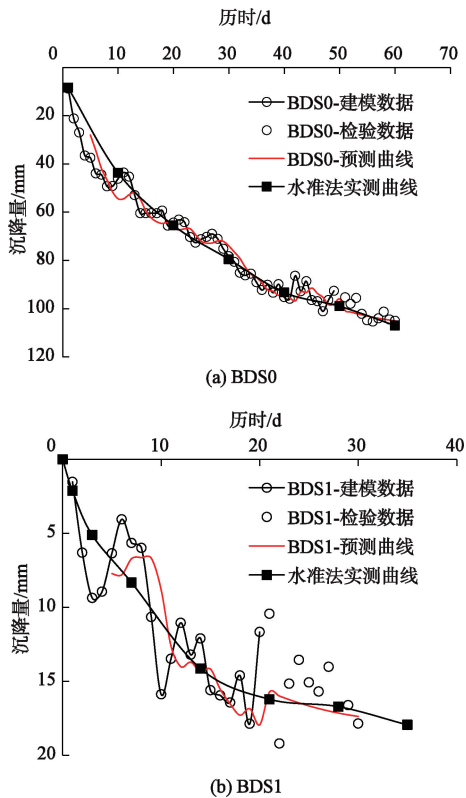


图 1 含较多噪声沉降数据的预测效果

Fig. 1 Predicted results of settlement data with more noise

## 2.2 含少量噪声沉降数据的预测效果

图 2 为含少量噪声的北斗自动化监测点 BDS2,采用 KF-ES 融合模型的预测效果。BDS2 共 65 d 数据,采用前 45 d 数据建模,向后预测 20 d 数据。

由图 2 可知,降噪后的建模数据、外推预测数据与实测数据均吻合较好,外推预测值的绝对误差  $\Delta e = -0.3 \sim 1.4$  mm, 相对误差  $\delta = -0.4\% \sim 1.8\%$ 。融合模型中的卡尔曼滤波法和指数平滑法对建模数据均有

“重近轻远”的特点,为保证预测精度需及时更新沉降数据,对模型参数进行动态修正,因此融合模型在安全监测的短期动态快速预测方面更有优势。

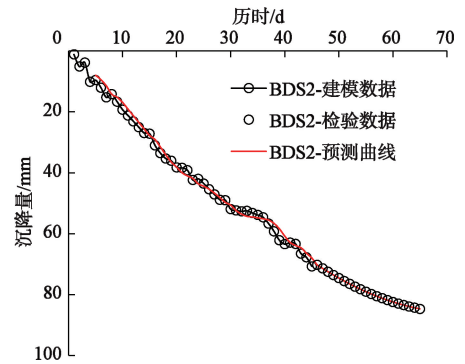


图 2 含较少噪声沉降数据的预测效果

Fig. 2 Predicted results of settlement data with less noise

## 3 结 论

(1) 沉降观测数据受各类环境因素干扰,常含有噪声,表现出波动性和随机性的特点。当含噪声较大时,不宜直接用于沉降预测,需进行降噪处理。

(2) KF-ES 融合模型解决了含噪声数据处理、模型参数的时变自适应,可减弱混杂在数据中的随机噪声和异常波动干扰,实现沉降的快速动态预测。

(3) KF-ES 融合模型的数据存储量少、预测速度快、自适应性强,满足沉降短期动态预测要求,可为沉降数据的降噪处理和动态预测提供参考和借鉴。

## 参考文献:

- [1] 刘射洪, 袁聚云, 赵 昕. 地基沉降预测模型研究综述 [J]. 工业建筑, 2014, 44(增刊 1): 738 - 741, 681. (LIU She-hong, YUAN Ju-yun, ZHAO Xin. Review of settlement prediction models of foundation [J]. Industrial Construction, 2014, 44(S1): 738 - 741, 681. (in Chinese))
- [2] 徐洪钟, 施 斌, 李雪红. 全过程沉降量预测的 Logistic 生长模型及其适用性研究 [J]. 岩土力学, 2005, 26(3): 387 - 391. (XU Hong-zhong, SHI Bin, LI Xue-hong. Logistic growth model and its applicability for predicting settlement during the whole process [J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(3): 387 - 391. (in Chinese))
- [3] 余 闯, 刘松玉. 路堤沉降预测的 Gompertz 模型应用研究 [J]. 岩土力学, 2005, 26(1): 82 - 86. (YU Chuang, LIU Song-yu. A Study on prediction of embankment settlement with the gompertz model [J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(1): 82 - 86. (in Chinese))
- [4] TAN T S, INOUE T, LEE S L. Hyperbolic method for consolidation analysis [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1991, 117(11): 1723 - 1737.
- [5] ASAOKA A. Observational procedure of settlement prediction [J]. Soils and Foundations, 1978, 18(4): 87 - 101.

- [6]潘林有, 谢新宇. 用曲线拟合的方法预测软土地基沉降[J]. 岩土力学, 2004, **25**(7): 1053 - 1058. (PAN Lin-you, XIE Xin-yu. Observational settlement prediction by curve fitting methods[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, **25**(7): 1053 - 1058. (in Chinese))
- [7]肖衡林, 李丽华, 郭小川, 等. 山区高填方路堤沉降预测方法[J]. 应用基础与工程科学学报, 2015, **23**(1): 154 - 161. (XIAO Heng-lin, LI Li-hua, GUO Xiao-chuan, et al. Settlement predicted method of high filled embankment in mountain area[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2015, **23**(1): 154 - 161. (in Chinese))
- [8]周俊, 马建林, 徐华, 等. EMD 降噪在高速铁路路基沉降预测中的应用[J]. 振动与冲击, 2016, **35**(8): 66 - 72. (ZHOU Jun, MA Jian-lin, XU Hua, et al. Application of EMD denoising method in subgrade settlement prediction of high-speed railways[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, **35**(8): 66 - 72. (in Chinese))
- [9]KALMAN R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems [J]. Journal of Basic Engineering Transactions, 1960, **82**(1): 35 - 45.
- [10]PAUL Z. , HOWARD M. Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach (3rd Edition)[M]. Reston: American Institute of Aeronautics & Astronautics, Inc. , 2009: 41 - 90.
- [11]王利, 李亚红, 刘万林. 卡尔曼滤波在大坝动态变形监测数据处理中的应用[J]. 西安科技大学学报, 2006, **26**(3): 353 - 357. (WANG Li, LI Ya-hong, LIU Wan-lin. Application of Kalman filtering in data processing of dam dynamic deformation monitoring [J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2006, **26**(3): 353 - 357. (in Chinese))
- [12]宋迎春. 动态定位中的卡尔曼滤波研究[D]. 长沙: 中南大学, 2006. (SONG Ying-chun. Research on Kalman filter in kinematic positioning [D]. Changsha: Central South University, 2006. (in Chinese))
- [13]张德南, 张心艳. 指数平滑预测法中平滑系数的确定[J]. 大连铁道学院学报, 2004, **25**(1): 79 - 80. (ZHANG De-nan, ZHANG Xin-yan. Ascertainment of index level and coefficient smooth[J]. Journal of Dalian Railway Institute, 2004, **25**(1): 79 - 80. (in Chinese))
- [14]冯金巧, 杨兆升, 张林, 等. 一种自适应指数平滑动态预测模型[J]. 吉林大学学报(工学版), 2007, **37**(6): 1284 - 1287. (FENG Jin-qiao, YANG Zhao-sheng, ZHANG Lin, et al. Adaptive exponential smoothing model for dynamic prediction [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2007, **37**(6): 1284 - 1287. (in Chinese))
- [15]张嘉望, 郭军献, 李福松. 基于最优平滑系数三次指数平滑法的转速预测[J]. 探测与控制学报, 2015, **37**(5): 43 - 46. (ZHANG Jia-wang, GUO Jun-xian, LI Fu-song. Rotation speed prediction based on cubic exponential smoothing method [J]. Journal of Detection & Control, 2015, **37**(5): 43 - 46. (in Chinese))

(编校: 胡海霞)