

DOI: 10.11779/CJGE2021S1010

考虑统一强度理论的黄土二元介质模型研究

李杭州¹, 熊光东², 郭彤¹, 廖红建¹, 蒲明^{*3}, 韩波¹

(1. 西安交通大学土木工程系, 陕西 西安 710049; 2. 中国电力工程顾问集团西北电力设计院有限公司, 陕西 西安 710075;

3. 信息产业部电子综合勘察研究院陕西省土体工程研究中心, 陕西 西安 710001)

摘要:针对饱和黄土的本构模型进行研究,引入统一强度理论,确定了应力不变量形式的统一屈服准则。分析了黄土的强度构成,解释了黏聚强度和摩擦强度变形中发挥过程,结合二元介质模型基本理论,确定了黄土的胶结元和摩擦元两种参考介质的模型以及破损参数,采用等效应变原理,建立了黄土的二元介质本构模型,并分析了模型参数的确定方法,采用黄土的三轴试验对所建立的本构模型进行验证,并与统一弹塑性本构模型进行比较分析,进一步分析了所建立二元介质模型的适用性。

关键词:二元介质模型;黄土;统一强度理论;强度变形特性

中图分类号:TU452 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-4548(2021)S1-0053-05

作者简介:李杭州(1977—),男,副教授,主要从事岩土本构关系方面的研究工作。E-mail: lihangzhou77@163.com。

Binary-medium model for loess considering unified strength theory

LI Hang-zhou¹, XIONG Guang-dong², GUO Tong¹, LIAO Hong-jian¹, PU Ming³, Han Bo¹

(1. Department of Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. Northwest Electric Power Design Institute

Co., Ltd. of China Power Engineering Consulting Group, Xi'an 710075, China; 3. Shaanxi Engineering Research Center of Soil Body, China Electronic Research Institute of Engineering Investigation and Design, Xi'an 710001, China)

Abstract: The strength deformation characteristics of loess are complicated. It is important for engineering construction to accurately predict the mechanical behavior of loess. The constitutive model for loess is studied. The unified strength theory is introduced. A unified yield criterion in terms of stress invariants is determined. The strength constituent of loess is identified. The evolution of cohesion strength and friction strength is explained during the deformation. Combining with the basic theory of binary medium model, the models for the cementation and friction mediums of loess are established, as well as the damage parameters. Based on the principle of equivalent strain, a unified binary medium constitutive model for loess is proposed. The determination of model parameters is analyzed. The constitutive model is verified by the triaxial tests on loess. The comparison between the proposed model and the unified elastoplastic model is conducted. The applicability of the binary-medium model is further analyzed.

Key words: binary-medium model; loess; unified strength theory; strength and deformation characteristics

0 引言

黄土在中国西北地区覆盖广泛,随着西部大开发的进展和“一路一带”倡议的落实,黄土地区的重大工程不断出现,与此同时也带来了一系列的工程问题。黄土作为一种典型的特殊土,具有复杂的力学特性,因此建立恰当的本构模型预测黄土的强度变形特性是解决工程问题的基础和关键;而且本构模型的研究也是土力学研究的热点和难点问题之一。

国内外学者对黄土的本构模型进行了大量研究,建立黄土的弹塑性本构模型^[1]、损伤本构模型^[2]、基于 Desai 的扰动状态本构模型^[3],建立相应的黄土扰动状态本构模型^[4]、破损力学模型^[5]。而其中沈珠江所提出的破损力学模型^[5]把土的复杂结构简化为结构

性较强的结构块和结构性较弱的软弱带来描述,荷载由结构块和软弱带二者承担,从而将土视为一种二元介质材料,进而建立一种新的二元介质模型,进而描述土变形过程中实际的破损现象。国内外学者已将该模型成功的应用于黄土^[6-9],这些模型的建立为更进一步的研究提供了思路。

统一强度理论^[10]不仅可以反映材料的三维强度特性,覆盖现有强度准则的上限和下限,并且可以线性

基金项目:陕西重点研发计划项目(2019SF-231, 2020SF-394, 2021SF-517);国家自然科学基金项目(41630639);陕西省自然科学基金项目(2020JM-009)

收稿日期:2020-12-15

* 通信作者(E-mail: 499986780@qq.com)

逼近很多的强度准则。在本构模型中考虑统一强度理论,无疑将使得模型有着更为广泛的适用性。因此本文将分析黄土强度演化过程,在研究黄土受载作用下强度的演变规律的基础上,结合二元介质模型,引入统一强度理论,建立黄土的统一二元介质本构模型。

1 统一强度理论的不变量表达式

统一强度理论在岩土工程领域应用广泛,该强度理论从双剪单元体出发,考虑双剪应力单元体上的所有剪应力及其对应的主应力对材料破坏不同的贡献^[10],其统一强度理论的应力不变量表达式为

$$f = p + mq - c \cot \varphi = 0 \quad (1)$$

当 $\sqrt{3} \tan \theta_{\sigma} \leq \sin \varphi$ 时,

$$m = \left[\frac{\cos \theta_{\sigma}}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \theta_{\sigma} \sin \varphi}{3} + \frac{b}{6} \sin \theta_{\sigma} (3 + \sin \varphi) + \frac{1}{2\sqrt{3}} b \cos \theta_{\sigma} (1 - \sin \varphi) \right] / (b + b \sin \varphi); \quad (2a)$$

当 $\sqrt{3} \tan \theta_{\sigma} \geq \sin \varphi$ 时,

$$m = \left[\frac{\cos \theta_{\sigma}}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \theta_{\sigma} \sin \varphi}{3} + \frac{b}{6} \sin \theta_{\sigma} (3 + \sin \varphi) + \frac{1}{2\sqrt{3}} b \cos \theta_{\sigma} (1 - \sin \varphi) \right] / (b + b \sin \varphi)。 \quad (2b)$$

式中, b 为中间主应力系数; c, φ 分别为黏聚力和内摩擦角。统一强度理论不再是一个单独的强度准则,它不仅能够解释材料的破坏机理,而且当中间主应力系数 b 变化时,能够代表一系列的强度准则。

2 黄土二元介质模型

2.1 黄土二元介质模型理论

黄土在变形过程中,具有明显的非线性性质,在变形过程中同时伴随着弹性、塑性及脆性等力学行为特性。为描述黄土的这些力学行为特性,根据各自不同的力学性质,按照二元介质模型理论^[6],可以假定采用弹簧、滑片以及滑片等基本元件描述弹性、塑性及脆性等力学性质,采用不同的力学元件组合,表示不同的介质行为,从而解释材料的不同力学行为特性。

黄土的强度可以认为由摩擦强度和黏聚强度组成,研究表明黏聚力和摩擦力在变形中不会同步发生作用,只有在黏聚作用破坏后,摩擦强度才逐渐发挥作用;摩擦强度和黏聚强度所发挥作用的强弱,决定了黄土的应变硬化、应变软化等力学行为特性。借助二元介质模型,可以分别采用摩擦元和胶结元分别表示黄土强度的构成。在荷载作用下,胶结元率先发挥作用,随着变形的发展,其荷载的承担逐渐向摩擦元过渡。

因此可以借助二元介质模型进一步将黄土抽象成

由弹脆性元(胶结元的结构体)和弹塑性元(摩擦元的破碎体)组成的二元介质型材料。在加载变形过程中,一个微单元体积内弹脆性元逐渐破裂并向弹塑性元转化。弹脆性元向弹塑性元转变的过程可用破损参数 B 描述, B 在黄土变形过程中,可以表示为二元介质荷载的分担比,类似于损伤力学中的损伤变量,也可以理解为胶结元的破损程度,因此其取值范围为 $0 \leq B \leq 1$,假定材料未受到损伤,则 $B = 0$;若 $B = 1$,则表示材料内部损伤演化到极限状态。

结构性岩土材料在变形过程中,弹脆性元向弹塑性元转化,在一个代表性微单元体积内应用非均匀介质的均匀化理论,可以得到单元内应力情况。按照等效应变的假设,二元介质模型的应力关系可以表示为

$$\sigma_{ij}^{\alpha} = (1 - B) \sigma_{ij1}^e + B \sigma_{ij2}^{ep} \quad (3)$$

式中,上标 α 表示黄土实际变形或应力;下标 1 和 2 分别表示弹脆性元和弹塑性元。其增量形式可以表示为

$$d\sigma_{ij}^{\alpha} = (1 - B) d\sigma_{ij1}^e + B d\sigma_{ij2}^{ep} + dB (\sigma_{ij2}^{ep} - \sigma_{ij1}^e)。 \quad (4)$$

由式(4)可知单元总应力增量 $d\sigma_{ij}^{\alpha}$,由三个部分组成,弹脆性元应力增量 $d\sigma_{ij1}^e$,弹塑性元应力增量 $d\sigma_{ij2}^{ep}$ 和弹脆性元向弹塑性元转变所引起的应力增量。

2.2 弹脆性元部分本构关系

黄土在变形过程中,黏聚力首先发挥作用,其力学行为采用弹性理论进行描述。因此,认为弹脆性元在单元内未破损之前,只有弹性变形,其力学特性按弹性元件受力而发生形变,即符合 Hooke 定律,则弹脆性元的弹性应力应变增量关系为

$$d\sigma_{ij1}^e = D_{ijkl1}^e d\varepsilon_{kl1}^e \quad (5)$$

式中, D_{ijkl1}^e 为弹脆性元线弹性刚度矩阵。

2.3 弹塑性元部分本构关系

当弹脆性元破损之后,其荷载逐渐由弹塑性元进行承担。假定弹塑性元的变形和一般岩土材料的弹塑性变形一样,包括弹性变形和塑性变形:

$$d\varepsilon_{ij2} = d\varepsilon_{ij2}^e + d\varepsilon_{ij2}^p \quad (6)$$

弹性变形可根据胡克定律求得,塑性变形可以按照传统岩土塑性理论进行求解。考虑到统一强度理论在岩土中有较为广泛的应用,且可以反映中间主应力的影响,因此在建立弹塑性元力学模型时,采用统一强度理论确定其本构模型。

根据统一强度理论,弹塑性元的屈服准则可以表示为

$$F_2 = p + m(\varepsilon, \varphi_2)q - c \cot \varphi_2 \quad (7)$$

式中, ε 为硬化参数。

根据硬化准则可知,材料的屈服面不是固定不变的,材料在发生塑性变形后,其后继屈服面常发生改

变,即发生硬化现象。但在本文中主要对二元介质模型进行研究分析,硬化参数的影响较为次要,为了突出二元介质模型的优越性,假定硬化参数为零,即不考虑黄土屈服的后硬化行为,在变形过程中保持屈服面的大小不发生改变。

岩土材料是摩擦性材料,采用非相关联流动法则考虑剪胀性和体积变化的影响,引入剪胀角 ψ_2 代替摩擦角 φ_2 ,得到塑性势函数:

$$Q_2 = p + m(\varepsilon, \psi_2)q \quad , \quad (8)$$

式中, $\psi_2 = \zeta\varphi_2$, ($0 \leq \zeta \leq 1$), 若 $\zeta = 0$, 表示无剪胀现象, 若 $\zeta = 1$, 表示发生最大剪胀。一般情况下 $\psi_2 < \varphi_2$, 即剪胀角小于摩擦角。

根据弹塑性理论,可以确定弹塑性元的本构模型为

$$d\sigma_{ij2} = \left[D_{ijkl2}^e - \frac{\frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{rs2}} D_{ijmn2}^e \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma_{min2}}}{H + \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{mn2}} D_{mnr2}^e \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma_{rs}}} \right] d\varepsilon_{kl2} \quad (9)$$

当不考虑硬化行为时,式(9)中硬化函数 $H = 0$ 。

弹塑性元屈服面在偏平面上的极限线如图 1 所示,从图中可以看出,弹塑性元模型存在奇异点,其屈服函数和塑性势函数在偏平面上不是光滑曲线,因此在进行数值计算时,必须对该模型的奇异性进行处理。

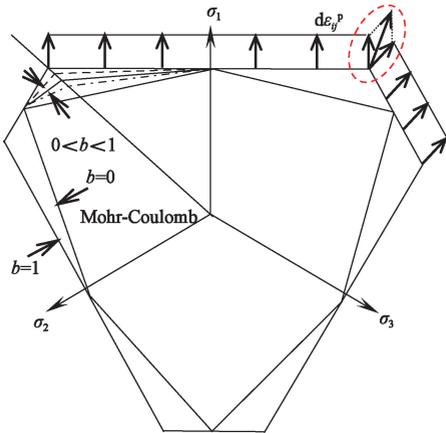


图 1 π 平面上奇异点示意图

Fig. 1 Schematic diagram of singularities in π plane

常见的处理方法,采用矢量平均值来代替该奇异点的值,即其值为角点在左右不同边趋近所得值的均值,如当 $\theta_\sigma = \arctan(\sin\varphi_2/\sqrt{3})$, 分别对屈服函数和塑性势函数中对应力的微分取平均值。

此外,屈服函数和塑性势函数在 $\theta_\sigma = -30^\circ, 30^\circ$ 处由于中间主应力影响系数 b 的取值可能会发生奇异性。当 $0 \leq b < 1$ 时,将 $\theta_\sigma = -30^\circ, 30^\circ$ 代入相应的条件式中即可。当 $b = 1$ 时,屈服函数和塑性势函数在 $\theta_\sigma = -30^\circ, 30^\circ$ 的值趋于无穷大,为了消除这种奇异性的影

响,采用对流动矢量取极限的数学方法。

2.4 破损参数的确定

黄土在加载过程中破坏是一个连续变化的过程,用微观物理量描述破损过程更能反映黄土的破坏。本文采用黄土微元体分析黄土的渐进破损过程,假定弹脆性元在为破损之前其应力应变关系服从广义胡克定律,其弹性模量为初始切线模。弹脆性元破损之后变为弹塑性元,假定弹脆性元的破坏分布是受应力、应变和破坏概率影响的,是一随机、连续的变化量,其弹破坏服从 Weibull 分布统计规律,则可以得到破损参数为

$$B = 1 - \exp(-A\varepsilon_{kl}^m) \quad , \quad (10)$$

式中, A 为反映结构破损速率的参数, m 为试验参数。

2.5 黄土二元介质本构模型的建立

由式(3)根据非均匀介质的均匀化理论和破损参数的定义,可得到

$$dB(\sigma_{ij2}^{ep} - \sigma_{ij1}^e) = \frac{\sigma_{ij}^a - \sigma_{ij}^e}{B} dB \quad , \quad (11)$$

式中, $dB = (1 - B)mA\varepsilon_{kl}^{m-1} d\varepsilon_{kl}$ 。

因此,黄土的二元介质本构模型为

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij}^a &= (1 - B)D_{ijkl1}^e d\varepsilon_{kl} + BD_{ijkl2}^{ep} d\varepsilon_{kl} + \frac{\sigma_{ij}^a - \sigma_{ij}^e}{B} \cdot \\ & (1 - B)mA\varepsilon_{kl}^{m-1} d\varepsilon_{kl} = [(1 - B)D_{ijkl1}^e + BD_{ijkl2}^{ep} + \\ & \frac{\sigma_{ij}^a - \sigma_{ij}^e}{B}(1 - B)mA\varepsilon_{kl}^{m-1}] d\varepsilon_{kl} \\ & = D_{ijkl}^a d\varepsilon_{kl} \quad . \end{aligned} \quad (12)$$

2.6 黄土二元介质模型参数的确定

根据二元介质损伤本构模型的建立过程可以确定在该本构模型中有 3 种类型的模型参数:弹脆性元及弹塑性元两种单元的参数、以及损伤函数参数中的相关参数。

弹脆性元的弹性参数可通过试样进行试验得到,弹脆性元弹性模量 E_1 、泊松比 μ_1 可通过常规三轴试验测得。弹塑性元的参数弹性模量 E_2 、泊松比 μ_2 和内摩擦角 φ_2 可通过重塑土的常规三轴试验测得,当缺少重塑土的三轴试验时,弹塑性元的弹性参数还可以通过弹脆性元的相应系数适当的折减得到,或者与弹脆性元保持一致。中间主应力系数 b 可根据验证的具体试验条件来确定。剪胀角 ψ_2 可以通过相应的常规三轴试验结果确定。

对于损伤参数 B 的确定,损伤参数可通过试验得到的应力应变关系曲线和破损参数的定义求得,对其公式进行变换,曲线变换为直线求解,推导求得,将式(10)移项并取两次自然对数变换,可以得到

$$\ln[-\ln(1 - B)] = m \ln \varepsilon_{kl} + \ln A \quad . \quad (13)$$

3 本构模型的验证

为验证本文所建立的二元介质模型的可行性,采用饱和黄土的常规三轴 CU 试验进行验证。本次试验所用黄土土样采自西安市地铁四号线工程 D4KC-9 标段行政中心车站。根据工程地质勘察资料可知,所取的黄土土样为 Q₄ 黄土,对其分别进行了等向压缩和固结不排水三轴试验,其三轴压缩试验结果如图 2 所示。

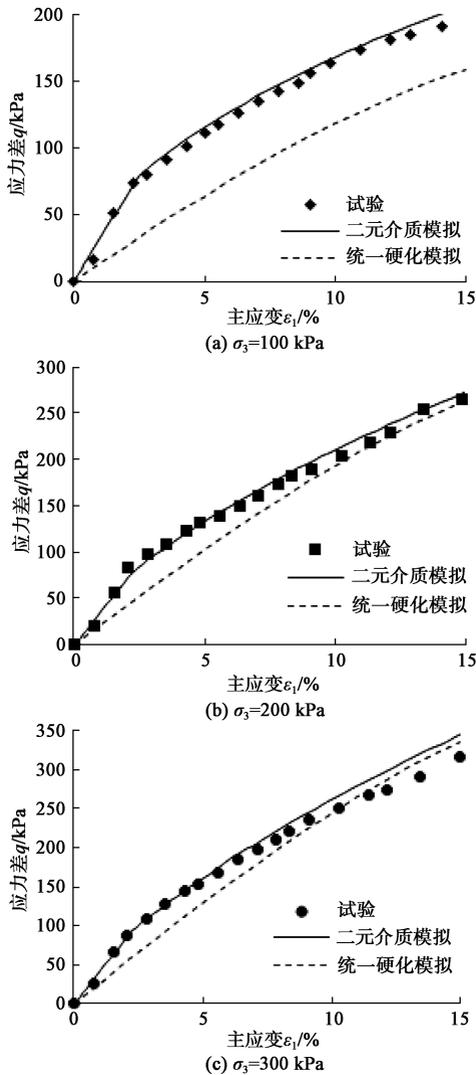


图2 黄土二元介质本构模型的验证

Fig. 2 Verification of binary-medium model for loess

在常规三轴压缩试验中,中间主应力系数 $b = 0$ 。对于所建立的二元介质模型,其弹塑性元部分本构不考虑硬化作用。模型弹性模量等参数采用三轴试验的初始切线模量作为弹脆性元的弹性模量,在这里不考虑弹塑性元和弹脆性元初始模量之间的差别,两种参考介质弹性模型认为相同。

破损函数 B 的参数 A 和 m 和围压相关,随围压的不同而改变,所以需要根据不同围压下常规三轴 CU 试验所得数据和确定破损函数参数的方法求得各个围压下损伤参数的值,如表 1 所示。

表 1 损伤参数的数值

Table 1 Damage parameters of binary-medium model

参数	围压/kPa		
	100	200	300
A	2.64	2.52	2.07
m	0.413	0.418	0.437

图 2 为二元介质模型和试验结果比较图。从图中可以看到二元介质模型理论结果和试验结果基本趋势一致,所建立的本构模型较好地预测了黄土的应力应变关系。

为进一步比较分析二元介质模型在预测黄土强度变形特性的优势,结合黄土的强度变形特性和统一屈服面的特点,确定统一弹塑性本构模型的硬化函数,建立一个基于统一强度理论的弹塑性本构模型,其硬化准则表示为

$$m(\varepsilon_d^p) = \frac{\varepsilon_d^p}{a + b\varepsilon_d^p} \quad (14)$$

该模型预测结果如图 2 中虚线所示,从图 2 中比较可以看出,考虑硬化的统一弹塑性本构模型在预测黄土的应力应变关系时误差较大,尤其是在变形的初始阶段,误差更大。

相比统一硬化模型模拟曲线,二元介质模型能更好地预测黄土的应力应变关系。无论是在变形的初始阶段还是黄土接近破坏的阶段,二元介质模型理论结果和试验结果都能较好地吻合,说明在二元介质模型比统一硬化模型具有更好的适用性。

分析原因,土体抗剪强度主要由黏聚力和摩擦力组成,在变形的初始阶段,土体相对比较完整,黏聚力对抵抗变形其主要作用,摩擦力发挥的作用较小。由于在统一硬化模型主要考虑了摩擦的硬化效应,未考虑黏聚力的影响,且初始摩擦力较小,计算理论强度较低,因此在初始阶段统一硬化的理论结果与试验曲线差别较大。而随着变形的增加,黏聚力逐渐丧失,摩擦力不断增大,此时摩擦力对变形的抵抗起到主要作用,因此在变形的后期阶段,统一硬化模型预测结果误差减小。而在二元介质模型中,用弹脆性元模拟黄土的黏聚作用,用弹塑性元模拟黄土的摩擦作用,变形过程用破损参数 B 来描述和量化弹脆性元向弹塑性元转化,来清晰描述土体破坏过程,因此二元介质模型能更好地预测黄土的应力应变关系。

4 结 论

(1) 依据统一强度理论的应力不变量形式,确定了统一屈服准则形式。分析了黄土强度构成及其发挥特点,结合二元介质模型本构模型,确定了黄土二元参

考介质模型及其破损参数,采用等效应变原理,确定参考介质应力和应变关系,建立了黄土的二元介质本构模型,并分析了模型参数的确定方法。

(2) 采用黄土的三轴试验对所建立的二元介质模型进行了分析和验证,结果表明,所建立的模型能够较好的预测黄土的应力应变关系;为比较分析,进异同一步确定了黄土的统一硬化弹塑性本构模型,并采用试验进行分析,研究了二元介质模型和统一硬化弹塑性本构模型在预测土的强度变形特性的异同,结果表明二元介质模型考虑了黄土的黏聚作用和摩擦作用,能够更真实地模拟土的强度发挥过程,可以提供更好的预测结果。

参考文献:

- [1] 邓国华,邵生俊,余芳涛. 结构性黄土的修正剑桥模型[J]. 岩土工程学报,2012,34(5):834-841. (DENG Guo-hua, SHAO Sheng-jun, SHE Fang-tao. Modified Cam clay model of structured loess [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2012,34(5):834-841. (in Chinese))
- [2] 方祥位,申春妮,陈正汉,等. 原状 Q_2 黄土三轴剪切细观结构演化定量研究[J]. 岩土力学,2010,31(1):27-31. (FANG Xiang-wei, SHEN Chun-ni, CHENG Zheng-han, et al. Quantitative study of meso-structure evolution of intact Q_2 loess during triaxial shear test[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010,31(1):27-31. (in Chinese))
- [3] DESAI C S. Mechanics of materials and interfaces the disturbed state concept[M]. Boca Raton: CRC Press,2001.
- [4] 方祥位,李洋洋,申春妮,等. 基于扰动状态概念的非饱和原状 Q_2 黄土本构模型[J]. 后勤工程学院学报,2017,33(4):1-8. (FANG Xiang-wei, LI Yang-yang, SHEN Chun-ni, et al. Constitutive Model of unsaturated intact Q_2 loess based on disturbed state concept [J]. Journal of Logistical Engineering University. 2017, 33(4):1-8. (in Chinese))
- [5] 沈珠江,陈铁林. 岩土破损力学:基本概念、目标和任务[C] // 中国岩石力学与工程学会第七次学术大会. 2002. (SHEN Zhu-jiang, CHEN Tie-lin. Basic concepts, objectives and tasks of geotechnical damage mechanics [C] // Seventh Academic Conference of the Chinese Society of Rock Mechanics and Engineering. 2002. (in Chinese))
- [6] 沈珠江,胡再强. 黄土的二元介质模型[J]. 水利学报,2003,34(7):1-6. (SHEN Zhu-jiang, HU Zai-qiang. Binary medium model for loess [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003, 34(7):1-6. (in Chinese))
- [7] 李宏儒,胡再强,冯飞,等. 结构性黄土二元介质本构模型在局部化剪切带中的应用[J]. 岩土力学,2012,33(9):2803-2810. (LI Hong-ru, HU Zai-qiang, FENG Fei, et al. Application of structural loess binary-medium model to localization shear band [J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(9):2803-2810. (in Chinese))
- [8] FAN Wen, DENG Long-sheng, YUAN Wei-na. Double parameter binary-medium model of fissured loess [J]. Engineering Geology, 2018, 236: 22-28
- [9] 蒋明镜,卢国文,李涛. 基于胶结破损机理的非饱和结构性黄土本构模型[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版),2020,53(3):243-251. (JIANG Ming-jing, LU Guo-wen, LI Tao. Three dimensional constitutive model of unsaturated structural loess based on the mechanism of degradation evolution [J]. Journal of Tianjin University (Science and Technology), 2020, 53(3):243-251. (in Chinese))
- [10] YU M H, HE L N. A new model and theory on yield and failure of materials under the complex stress state [M] // Mechanical Behaviour of Materias VI. Amsterdam: Elsevier, 1992: 841-846.

(编校:孙振远)