

DOI: 10.11779/CJGE202109003

基于多维 Gaussian Copula 的岩土体设计参数概率转换模型构建方法

李典庆^{1,2}, 吕天健^{1,2}, 唐小松^{1,2}

(1. 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 武汉大学工程风险与防灾研究所, 湖北 武汉 430072)

摘要: 岩土工程中经常需要基于直接测量参数去预测设计参数, 概率转换模型是确定设计参数真实分布范围的有效工具。常用的基于多维正态分布的概率转换模型构建方法容易引起误差且受边缘分布类型限制。为此, 提出了基于多维 Gaussian Copula 的岩土体设计参数概率转换模型构建方法。以全球黏土数据库 CLAY/6/535 为例验证了所提方法的有效性, 分别推导了不排水抗剪强度和超固结比与孔压静力触探试验指标之间的概率转换模型。结果表明: 基于多维 Gaussian Copula 的概率转换模型构建方法可以将相关结构与边缘分布分开构建, 该方法不受岩土体参数的边缘分布类型限制, 有效地避免了误差由边缘分布向相关结构的传播。在构建的概率转换模型中, 岩土体设计参数的不确定性、相关性与直接测量参数的数目以及直接测量参数与设计参数之间的相关性成反比。

关键词: 直接测量参数; 设计参数; 概率转换模型; 多维 Gaussian Copula; 联合分布模型

中图分类号: TU431 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2021)09-1592-10

作者简介: 李典庆(1975—), 男, 博士, 教授, 主要从事水工岩土工程可靠性与风险控制方面的研究。E-mail: dianqing@whu.edu.cn。

Establishing probabilistic transformation models for geotechnical design parameters using multivariate Gaussian Copula

LI Dian-qing^{1,2}, LÜ Tian-jian^{1,2}, TANG Xiao-song^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2. Institute of Engineering Risk and Disaster Prevention, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: In geotechnical practice, it is common to transform the measured parameters to the design ones. It is also known that the probabilistic transformation models provide an effective tool for predicting the actual range of the design parameters. The commonly-used methods for establishing probabilistic transformation models based on multivariate normal distribution may induce large errors and have a limitation of incorporating various types of marginal distribution for soil parameters. In this study, a new method for establishing the probabilistic transformation models for geotechnical design parameters based on the multivariate Gaussian Copula is proposed. The global clay database CLAY/6/535 compiled in the literature is employed to verify the effectiveness of the proposed method. The probabilistic transformation models from CPTU indices to undrained shear strength and OCR are then derived. The results indicate that by modeling the marginal distribution and dependence structure individually, the proposed method removes the limitation of incorporating various types of marginal distribution and avoids error propagation from marginal distribution to dependence structure. For the proposed probabilistic transformation models, the uncertainty and correlation of design parameters are inversely proportional to the number of the measured parameters and the correlation between the measured and design parameters.

Key words: measured parameter; design parameter; probabilistic transformation model; multivariate Gaussian Copula; joint distribution model

0 引言

岩土工程勘察中通常采用多种试验方法测定不同的岩土体参数^[1], 如天然含水率(含水率试验)、液性指数(界限含水率试验)、标准贯入锤击数(标准贯入

试验)、比贯入阻力(单桥静力触探试验)、锥尖阻力

基金项目: 国家重点研发计划项目(2017YFC1501301); 国家自然科学基金项目(51879204, 41861144022)

收稿日期: 2020-05-18

与侧壁摩阻力(双桥静力触探试验)等^[2]。在众多岩土体参数中,部分参数是岩土工程设计与安全评价的直接输入参数,如水力参数(饱和渗透系数和非饱和土水特征曲线参数)、变形参数(弹性模量和泊松比)、强度参数(黏聚力、内摩擦角和不排水抗剪强度),本文称之为设计参数。一般来说,受技术、经济、场地等条件限制,设计参数的试验数据在岩土工程勘察中不易获得,具有小样本特性^[3-5]。研究表明,设计参数的小样本特性会给岩土工程设计与安全评价带来较大的不确定性^[6-7],这对确定合理的设计方案、准确评估工程安全性带来了严峻的挑战。尽管如此,对于同一个场地或同一类型岩土体,不同岩土体参数之间存在一定的相关性,因此可以利用其它易获得的岩土体参数预测或估计设计参数,从而以最小的成本获得大量的设计参数试验数据,实现岩土工程的安全设计。为此,本文将这些易获得的用来预测设计参数的岩土体参数称为直接测量参数,如天然含水率、液性指数、标准贯入锤击数、比贯入阻力等。

在岩土工程实践中,为了利用直接测量参数预测设计参数,通常的做法是基于区域或全球数据库建立两者的经验回归方程^[8],该经验回归方程也称为设计参数与直接测量参数之间的转换模型。目前,国内外许多学者构建了大量的设计参数与单个或多个直接测量参数之间的转换模型,如 Bjerrum^[9]基于挪威海洋黏土土样得出了归一化的不排水抗剪强度与塑性指数之间的转换模型。Kulhawy 等^[10]系统地总结了土体强度参数与常用的室内试验、原位试验参数之间的转换模型。Singh 等^[11]基于韩国釜山市 2 个地区的黏土土样试验数据,建立了超固结比与原位直剪试验不排水抗剪强度、孔压静力触探试验锥尖阻力、扁铲侧胀试验指标之间的转换模型。在国内,马海鹏等^[12]基于上海地区 19 个工程 201 组试验数据,分别推求了黏土、粉质黏土、粉砂 3 类土中原位直剪试验抗剪强度与单桥静力触探试验比贯入阻力之间的转换模型。屈若枫等^[13]基于武汉地区长江一级阶地 400 余组软土样本,分别研究了淤泥质粉质黏土层黏聚力和内摩擦角与液限、含水率、天然孔隙比之间的转换模型。宋许根等^[14]基于珠海西部中心城区大面积深厚软土室内试验 1100 多组数据、原位试验 2600 多组数据,研究了含水率与塑性指数、液性指数、压缩模量、无侧限抗压强度、先期固结压力等物理力学参数之间的转换模型。郭林坪等^[15]基于天津港地区 40 个钻孔试验数据,分别建立了天津滨海新区黏性土压缩模量和抗剪强度参数与孔隙比、含水率、密度之间的转换模型。上述研究建立的转换模型为确定性转换模型,即认为设计参数与直接测量参数之间存在确定性函数关系(经验回

归方程)。然而受函数形式、试验误差、岩土材料的不均匀性等因素的影响,确定性转换模型计算的设计参数预测值与实测值之间往往存在偏差,且差值随着直接测量参数数值的变化呈现随机波动的特征。设计参数预测值的不确定性已经引起部分学者的注意^[16],而考虑这种不确定性影响的有效方法就是建立设计参数与直接测量参数之间的概率转换模型,并推导设计参数均值和标准差与直接测量参数之间的函数关系。

在构建设计参数与直接测量参数之间概率转换模型方面,不少学者也开展了大量的探索研究。Phoon 等^[17-18]将设计参数的不确定性来源归纳为 3 类:岩土体参数的固有不确定性、试验误差和转换模型不确定性,在此基础上用随机变量表征上述 3 类不确定性,通过二阶泰勒展开建立了设计参数不确定性与上述 3 类不确定性之间的计算公式。基于这种方法,Kulhawy 等^[10]给出了常用确定性转换模型中设计参数不确定性的表达式,这便构成了设计参数概率转换模型的雏形。Ching 等^[19-21]在上述研究的基础上对岩土体参数之间相关机制进行了假设,通过已有确定性转换模型推导出设计参数与各个直接测量参数之间的协方差矩阵,采用多维正态分布得出了设计参数概率转换模型。Ching 等^[22-23]、D'Ignazio 等^[24]、Liu 等^[25]、Zou 等^[26]进一步基于设计参数与直接测量参数的多维试验数据,采用多维正态分布建立设计参数与直接测量参数之间的多维联合分布模型,在此基础上推导出给定直接测量参数条件下设计参数的条件分布及其均值和标准差,将设计参数的条件分布及其均值和标准差作为设计参数的概率转换模型。这种概率转换模型构建方法的优点在于不需要对岩土体参数之间相关机制进行假设,它是目前设计参数概率转换模型构建中较为常用的方法。然而,该方法缺点在于它不能有效地将相关结构的构建与边缘分布的构建分离开来,因而会将边缘分布的识别误差引入相关结构的构造过程中,从而导致设计参数与直接测量参数之间的多维联合分布模型和设计参数概率转换模型的构建存在误差。此外,为了能够得到设计参数条件分布及其均值和标准差的解析表达式,这种方法要求边缘分布和正态分布有直接转换关系,然而岩土体参数的常用边缘分布类型中除了对数正态分布、Johnson 分布族等分布与正态分布有直接转换关系外,其余的如极值 I 型分布、威布尔分布和 Beta 分布等与正态分布没有直接的转换关系^[27-29]。因此,岩土体参数边缘分布的限制使得该方法在岩土工程中的应用受到明显的限制。

Copula 理论是构建联合分布模型的重要工具,近年来在金融、环境、水文等领域有着广泛的应用。Copula 理论将联合分布分解为边缘分布和相关结构

分别进行构造,它不受边缘分布类型的限制,且避免了直接构造联合分布时引入的误差。这些优点使得 Copula 理论被越来越多地应用于研究二维和多维岩土体参数之间的相关性^[30-31]。针对前述基于多维正态分布的设计参数概率转换模型构建方法的缺点,唐小松^[32]提出了基于 Copula 理论的设计参数概率转换模型构建方法。该方法首先利用 Copula 理论建立设计参数与直接测量参数之间的多维联合分布模型,然后基于 Joe^[33]提出的条件概率公式,推导了给定直接测量参数条件下设计参数的条件概率密度函数的一般公式。虽然该方法不受边缘分布类型限制,但是该方法得到的表征设计参数概率转换模型的条件概率密度函数没有解析表达式,对于实际工程中关心的设计参数均值和标准差等统计特征只能通过积分求解,难以给出设计参数的均值和标准差为直接测量参数函数的解析表达式,因此无法满足实际工程中根据直接测量参数推求设计参数概率分布的需求。

本文针对上述问题,研究了基于多维 Gaussian Copula 的一维和多维设计参数概率转换模型构建方法。在此基础上,验证了基于 Gaussian Copula 的设计参数概率转换模型构建方法的有效性。基于现有黏土实测数据库,分别建立了黏土不排水抗剪强度和超固结比与孔压静力触探试验指标之间的概率转换模型。

1 多维 Gaussian Copula

1.1 多维 Gaussian Copula 的定义

为了便于读者理解本文内容,这里简要介绍多维 Gaussian Copula 的基本定义。根据 Sklar 定理^[34],在给定 n 维变量 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 的边缘分布函数 $F_i(y_i)$ 和联合分布函数 $F_{1,2,\dots,n}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 的情况下,有且仅有一个 Copula 函数满足^[34]:

$$F_{1,2,\dots,n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = C_{1,2,\dots,n}(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (1)$$

式中 $u_i = F_i(y_i)$ 为定义在 $[0, 1]$ 区间内的均匀分布变量; $C_{1,2,\dots,n}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 为 n 维 Copula 函数。联合概率密度函数 $f_{1,2,\dots,n}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 与 Copula 的概率密度函数 $D_{1,2,\dots,n}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 有如下关系^[34]:

$$f_{1,2,\dots,n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = D_{1,2,\dots,n}(u_1, u_2, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n f_i(y_i) \quad (2)$$

式中, $f_i(y_i)$ 为 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 的边缘概率密度函数。由式 (1) 和 (2) 可知,多变量联合分布函数与其对应 Copula 函数相等,而联合概率密度函数可表示为各变量边缘概率密度函数与对应 Copula 的概率密度函数乘积。Sklar 定理将联合分布模型的构造分为两部分:各变量边缘分布的构造和变量间 Copula 函数的构造。

上述两部分的构造相互独立、可分开进行,从而摆脱了传统多维分布模型将联合分布函数直接整体构造的局限,为多变量联合分布模型的构造提供了有效的工具。

对于多维 Gaussian Copula 而言,令均值为 0、协方差矩阵为 θ 的 n 维标准正态分布的累积概率分布函数为 $\Phi_{1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$, 其中协方差矩阵 θ 对角线上数值为 1、且为半正定矩阵,那么 n 维 Gaussian Copula 函数的表达式为^[35]

$$C_{1,2,\dots,n}(u_1, u_2, \dots, u_n; \theta) = \Phi_{1,2,\dots,n}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n); \theta) \quad (3)$$

式中, $u_i = \Phi(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$)。式 (3) 即是由多维标准正态分布的累积概率分布函数推导的多维 Gaussian Copula 函数的表达式。由式 (3) 可知,多维 Gaussian Copula 的相关参数矩阵 θ 等于所对应的多维标准正态分布的协方差矩阵。

根据 n 维 Gaussian Copula 函数的表达式,可得 n 维 Gaussian Copula 的概率密度函数为^[35]

$$D_{1,2,\dots,n}(u_1, u_2, \dots, u_n; \theta) = \frac{\phi_{1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)}{\prod_{i=1}^n \phi(x_i)} = |\theta|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} X^T (\theta^{-1} - I) X\right) \quad (4)$$

式中, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为多维 Gaussian Copula 的自变量 (u_1, u_2, \dots, u_n) 通过一维标准正态分布函数的逆函数转换得到的多维标准正态分布变量,其中 $x_i = \Phi^{-1}(u_i)$ ($i = 1, \dots, n$); I 为单位矩阵。

1.2 多维 Gaussian Copula 相关参数的估计

多维 Gaussian Copula 相关参数估计有多种方法,其中 Pearson 线性相关系数方法与 Spearman 秩相关系数方法是常用的方法,这里主要介绍上述两种方法。

岩土体参数 Y_i, Y_j 的 Pearson 相关系数定义为

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(Y_i, Y_j)}{\sigma_i \sigma_j} \quad (5)$$

式中, $\text{Cov}(Y_i, Y_j)$ 为岩土体参数 Y_i, Y_j 之间的协方差, σ_i, σ_j 分别为岩土体参数 Y_i, Y_j 的标准差。

岩土体参数 Y_i, Y_j 的 Pearson 相关系数 ρ_{ij} 与相关参数 θ 之间的关系则可表示为^[36]

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left(\frac{y_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \times D(F_i(y_i), F_j(y_j); \theta_{ij}) f_i(y_i) f_j(y_j) dy_i dy_j \quad (6)$$

式中 μ_i, μ_j 分别表示岩土体参数 Y_i, Y_j 的均值; $D(F_i(y_i), F_j(y_j))$ 表示岩土体参数 Y_i, Y_j 的二维 Gaussian Copula 概率密度函数; $f_i(y_i), f_j(y_j)$ 分别表示岩土体参

数 Y_i, Y_j 的边缘概率密度函数。

在岩土体参数实测数据已知的情况下, 式 (5) 可改写为^[36]

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^N (y_{ik} - \bar{y}_i)(y_{jk} - \bar{y}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y_{ik} - \bar{y}_i)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N (y_{jk} - \bar{y}_j)^2}} \quad (7)$$

式中, $\{y_{ik}, y_{jk}, k = 1, 2, \dots, N\}$ 表示岩土体参数 Y_i, Y_j 的一组样本容量为 N 的实测数据。因此, 已知岩土体参数的一组实测数据, 根据式 (6), (7) 便可计算出多维岩土体参数两两间的所有相关参数, 如此便估计出了多维 Gaussian Copula 函数的相关参数矩阵 θ 。

Spearman 秩相关系数是利用两个变量秩的一致性来定义变量之间的相关性, 其定义为^[36]

$$r_{ij} = 3 \Pr[(Y_i - Y'_i)(Y_j - Y'_j) > 0] - \Pr[(Y_i - Y'_i)(Y_j - Y'_j) < 0] \quad (8)$$

式中, $(Y_i, Y_j), (Y'_i, Y'_j), (Y''_i, Y''_j)$ 为岩土体参数 Y_i, Y_j 的 3 个独立同分布向量。Spearman 秩相关系数代表的是岩土体参数的一个向量 (Y_i, Y_j) , 在 Y_i, Y_j 两个维度上分别与任意一个独立同分布向量在这个方向上的一致性概率的 3 倍与不一致概率之差。Spearman 秩相关系数 r_{ij} 与 Copula 函数相关参数 θ_{ij} 之间转换关系为^[36]

$$r_{ij} = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_i, u_j; \theta_{ij}) du_i du_j - 3 \quad (9)$$

当 Copula 函数类型为 Gaussian Copula 时, 式 (9) 进一步简化为^[36]

$$\theta_{ij} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} \times r_{ij}\right) \quad (10)$$

同理, 在岩土体参数实测数据已知的情况下, 式 (8) 可改写为^[37]

$$r_{ij} = \frac{12 \sum_{k=1}^N (\text{rank}(y_{ik}) \text{rank}(y_{jk}))}{N(N-1)(N+1)} - 3 \frac{N+1}{N-1} \quad (11)$$

式中, $\text{rank}(y_{ik})$ 为岩土体参数实测值 y_{ik} 在所有样本 $\{y_{ik}, k = 1, 2, \dots, N\}$ 中的秩次^[38]。

2 设计参数概率转换模型构建方法

若 n 维岩土体参数向量 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 包含设计参数向量 $\mathbf{Y}_u = (Y_{u1}, Y_{u2}, \dots, Y_{ul})$ 与直接测量参数向量 $\mathbf{Y}_k = (Y_{k1}, Y_{k2}, \dots, Y_{km})$, 在已知直接测量参数的实测值 $\mathbf{y}_k = (y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{km})$ 时, 设计参数满足 $Y_{ui} \leq y_{ui} (i = 1, 2, \dots, l)$ 的概率可表示为

$$F(\mathbf{y}_u | \mathbf{y}_k) = \Pr\left[\begin{matrix} Y_{u1} \leq y_{u1}, \dots, Y_{ul} \leq y_{ul} \\ Y_{k1} = y_{k1}, \dots, Y_{km} = y_{km} \end{matrix}\right] \quad (12)$$

鉴于 $\Phi^{-1}(F_i(\cdot))$ 为单调递增函数, 当式 (12) 右侧

所有的岩土体参数及其观测值进行单调递增变换时, 其概率应当保持不变, 即

$$F(\mathbf{y}_u | \mathbf{y}_k) = \Pr\left[\begin{matrix} \Phi^{-1}(F_{u1}(Y_{u1})) \leq \Phi^{-1}(F_{u1}(y_{u1})) \\ \dots, \Phi^{-1}(F_{ul}(Y_{ul})) \leq \Phi^{-1}(F_{ul}(y_{ul})) \\ \Phi^{-1}(F_{k1}(Y_{k1})) = \Phi^{-1}(F_{k1}(y_{k1})) \\ \dots, \Phi^{-1}(F_{km}(Y_{km})) = \Phi^{-1}(F_{km}(y_{km})) \end{matrix}\right] \quad (13)$$

令 $x_i = \Phi^{-1}(F_i(y_i))$, 即向量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 与岩土体参数向量 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 满足等概率变换关系 $\Phi(x_i) = F_i(y_i)$, 则式 (13) 可写为

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}_u | \mathbf{y}_k) &= \Pr\left[\begin{matrix} X_{u1} \leq x_{u1}, \dots, X_{ul} \leq x_{ul} \\ X_{k1} \leq x_{k1}, \dots, X_{km} \leq x_{km} \end{matrix}\right] \\ &= F_N(\mathbf{x}_u | \mathbf{x}_k) \quad (14) \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{X}_u = (X_{u1}, X_{u2}, \dots, X_{ul})$ 由设计参数向量等概率变换而来, 本文称之为设计变量; $\mathbf{X}_k = (X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{km})$ 由直接测量参数向量等概率变换而来, 本文称之为直接测量变量。

由上述公式可知, 已知直接测量参数时设计参数的累积概率在进行等概率变换时不会发生改变。特别地, 当向量 \mathbf{Y} 所服从的 Copula 函数类型为 Gaussian Copula 时, 向量 \mathbf{X} 服从均值为 0、相关系数矩阵为 Gaussian Copula 函数相关参数矩阵 θ 的多维标准正态分布, 即 $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \theta)$ 。因此, 设计参数的条件概率, 等于正态分布空间内设计变量在直接测量变量已知条件下的条件概率。基于正态空间内的设计参数条件分布在正态空间内产生模拟样本, 并将它由正态空间等概率变换至原始空间, 当样本量足够大时样本的累积概率分布将逼近于设计参数的累积条件概率分布, 且样本的统计量为设计参数统计量的有效估计, 这就是本文所提方法的核心思路。

对于多维正态分布向量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 而言, 在直接测量变量 $\mathbf{X}_k = (X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{km})$ 已知条件下, 设计变量 $\mathbf{X}_u = (X_{u1}, X_{u2}, \dots, X_{ul})$ 的条件分布服从 l 维正态分布^[39]:

$$\mathbf{X}_u | \mathbf{X}_k \sim N_l\left\{(\boldsymbol{\mu}_u^T + \boldsymbol{\Sigma}_{uk} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{X}_k^T - \boldsymbol{\mu}_k^T))^T, \boldsymbol{\Sigma}_u - \boldsymbol{\Sigma}_{uk} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{uk}^T\right\} \quad (15)$$

式中 上标 T 代表矩阵的转置; $\boldsymbol{\mu}_u$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_u$ 分别代表设计变量 \mathbf{X}_u 的均值向量和协方差矩阵; $\boldsymbol{\mu}_k$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 分别代表直接测量变量 \mathbf{X}_k 的均值向量和协方差矩阵; $\boldsymbol{\Sigma}_{uk}$ 代表设计变量 \mathbf{X}_u 与直接测量变量 \mathbf{X}_k 间的协方差矩阵。由上文可知, \mathbf{X} 服从多维标准正态分布, 故 $\mathbf{X}_u \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}_u)$, $\mathbf{X}_k \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}_k)$, $\boldsymbol{\Sigma}_{uk} = \boldsymbol{\theta}_{uk}$, 因此式 (15) 可以写为

$$\mathbf{X}_u | \mathbf{X}_k \sim N_l((\boldsymbol{\theta}_{uk} \boldsymbol{\theta}_k^{-1} \mathbf{X}_k^T)^T, \boldsymbol{\theta}_u - \boldsymbol{\theta}_{uk} \boldsymbol{\theta}_k^{-1} \boldsymbol{\theta}_{uk}^T) \quad (16)$$

将 $\boldsymbol{\theta}_{uk}$ 在整体相关参数矩阵 θ 中的位置标明如下:

$$\theta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_u & \boldsymbol{\theta}_{uk} \\ \boldsymbol{\theta}_{ku} & \boldsymbol{\theta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_u & \boldsymbol{\theta}_{uk} \\ \boldsymbol{\theta}_{uk}^T & \boldsymbol{\theta}_k \end{bmatrix} \quad (17)$$

因此,设计变量 \mathbf{X}_u 在直接测量变量 \mathbf{X}_k 已知的情况下条件分布的均值向量和协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}'_u &= (\boldsymbol{\theta}_{uk} \boldsymbol{\theta}_k^{-1} \mathbf{X}_k^T)^T, \\ \boldsymbol{\Sigma}'_u &= \boldsymbol{\theta}_u - \boldsymbol{\theta}_{uk} \boldsymbol{\theta}_k^{-1} \boldsymbol{\theta}_{uk}^T, \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\boldsymbol{\mu}'_u$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}'_u$ 分别代表在 \mathbf{X}_k 已知条件下设计变量 \mathbf{X}_u 的均值向量和协方差矩阵,从而便于与其原始分布的均值向量 $\boldsymbol{\mu}_u$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_u$ 相区分。在已知 l 维正态分布的均值向量和协方差矩阵的条件下,相应的 l 维正态分布函数就唯一确定了。直接测量变量 \mathbf{X}_k 可由直接测量参数 \mathbf{Y}_k 通过等概率变换 $x_{ki} = \Phi^{-1}(F_{ki}(y_{ki}))$ 得到,进而根据已知的直接测量变量和已构建的联合概率分布即可由式(16)确定设计变量多维正态空间内的条件分布函数。基于多维正态空间内的条件分布函数产生模拟样本,再由等概率变换转换到原始空间内,据此可确定设计参数在原始空间内的条件分布及其统计量。多维正态分布除了采用均值向量 $\boldsymbol{\mu}'_u$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}'_u$ 表示外,还可以采用均值向量 $\boldsymbol{\mu}'_u$ 、标准差向量 $\boldsymbol{\sigma}'_u$ 和相关系数矩阵 $\boldsymbol{\theta}'_u$ 表示,其中标准差向量元素 $\sigma'_{ui} = \sqrt{\Sigma'_{uii}}$, Σ'_{uii} 为协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}'_u$ 第 i 行第 i 列的元素,相关系数矩阵元素 θ'_{uj} 由下式给出

$$\theta'_{uj} = \frac{\Sigma'_{ujj}}{\sqrt{\Sigma'_{uii} \Sigma'_{ujj}}} \quad (1 \leq i, j \leq l) \quad (19)$$

综上可得设计参数概率转换模型构建步骤如下:

(1) 构造多维岩土体参数的联合概率分布,确定参数的边缘分布函数 $F_i(x_i)$ 及多维 Gaussian Copula 的相关参数矩阵 $\boldsymbol{\theta}$ 。

(2) 将直接测量参数向量 $\mathbf{Y}_k = (Y_{k1}, Y_{k2}, \dots, Y_{km})$ 通过等概率变换 $x_{ki} = \Phi^{-1}(F_{ki}(y_{ki}))$ 转换为直接测量变量 $\mathbf{X}_k = (X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{km})$ 。

(3) 根据式(16)确定正态空间内设计参数的条件分布,并产生模拟样本 $\dot{\mathbf{X}}_u = (\dot{X}_{u1}, \dot{X}_{u2}, \dots, \dot{X}_{ul})$ 。

(4) 将模拟样本通过等概率变换 $y_{ui} = F_{ui}^{-1}(\Phi(\dot{x}_{ui}))$ ($i = 1, 2, \dots, l$) 转换至原始分布空间,可得原始空间内设计参数的模拟样本 $\dot{\mathbf{Y}}_u = (\dot{Y}_{u1}, \dot{Y}_{u2}, \dots, \dot{Y}_{ul})$,从而根据设计参数的模拟样本估计其条件分布及统计量。

3 算例

3.1 全球黏土数据库 CLAY/6/535

本文以文献 Ching 等^[23]搜集的全球黏土数据库 CLAY/6/535 为例验证所提方法的有效性。CLAY/6/535 数据库包含归一化不排水抗剪强度 s_u / σ'_v 、超固结比 OCR、归一化锥尖阻力 $(q_t - \sigma'_v) / \sigma'_v$ 、归一化有效锥尖阻力 $(q_t - u_2) / \sigma'_v$ 、归一化超孔隙水压力 $(u_2 - u_0) / \sigma'_v$ 和孔压比 B_q 共 6 个黏土参数,其中前 2 个参数为黏土

的应力和强度参数,后 4 个参数则是孔压静力触探试验的试验指标。CLAY/6/535 数据库涵盖了中国香港、新加坡、马来西亚、美国、加拿大、委内瑞拉、巴西、瑞士、英国、意大利、挪威等 25 个地区 40 个场地共 535 组实测数据。文献[23]采用 Johnson 分布族对 CLAY/6/535 数据库中黏土参数的边缘分布进行拟合,相应的边缘分布及统计特征如表 1 所示。表中 SU 和 SB 都是 Johnson 分布族成员,它们包括 4 个参数 a_x , a_y , b_x 和 b_y , 相应的定义域分别为 $[-\infty, \infty]$ 和 $[b_y, a_y + b_y]$ 。

3.2 岩土体参数联合分布模型的构建

由 Sklar 定理^[34]可知,岩土体参数多维联合分布模型的构建分为 2 步:第 1 步,构建各岩土体参数的边缘分布;第 2 步,构建岩土体参数的 Gaussian Copula 函数。因此,本节将首先构建 CLAY/6/535 数据库六维岩土体参数的边缘分布。由于文献[23]在收集数据库的同时还构建了岩土体参数的边缘分布,这里沿用文献[23]的边缘分布模型,如表 1 所示。可以看出,除孔压比 B_q 的变异系数较小以外,其余岩土体参数的变异系数均在 0.5 以上,这说明全球黏土数据库的数据来源较广、变化范围较大的特点。

为研究岩土体参数间相关关系,首先将 CLAY/6/535 数据库中六维岩土体参数的实测数据样本点 $\{(y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}, y_{4i}, y_{5i}, y_{6i}), i = 1, 2, \dots, 535\}$ 转换为均匀分布空间内的样本点 $\{(u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, u_{4i}, u_{5i}, u_{6i}), i = 1, 2, \dots, 535\}$,进而可得各参数在均匀分布空间内两两间的实测数据散点图,如图 1 所示。可以看出,CLAY/6/535 数据库中岩土体参数间存在不同程度的相关性,除 $\{Y_1, Y_6\}$, $\{Y_2, Y_6\}$, $\{Y_5, Y_6\}$ 这 3 组岩土体参数间相关性略低以外,其余岩土体参数间相关性均较强,这也充分说明研究岩土体参数联合分布模型的必要性。

采用式(7)和(11)可计算出 CLAY/6/535 数据库中各岩土体参数间 Pearson 相关系数与 Spearman 相关系数,进一步通过式(6)和(10)可计算出 Gaussian Copula 的相关参数矩阵,如表 2 所示。可以看出, $\{Y_1, Y_6\}$, $\{Y_2, Y_6\}$, $\{Y_5, Y_6\}$ 这 3 组岩土体参数间的相关系数较低,而其余岩土体参数间相关系数绝对值均在 0.4 以上,这些结果与图 1 结果相互印证,进一步表明数据库中岩土体参数间具有较强的相关性。表 2 还给出了两种相关系数方法所构造 Gaussian Copula 的 AIC 指标和 BIC 指标,可以看出 Spearman 秩相关系数方法的 AIC 指标与 BIC 指标明显小于 Pearson 相关系数方法,表明秩相关系数方法所构造的相关结构的拟合效果优于 Pearson 相关系数方法。

表 1 CLAY/6/535 数据库土体参数边缘分布及统计特征

Table 1 Statistics and marginal distributions for five soil parameters in CLAY/6/535 database

土体参数	均值	变异系数	边缘分布类型	边缘分布参数			
				a_x	a_y	b_x	b_y
归一化不排水抗剪强度 $Y_1 = s_u / \sigma'_v$	0.641	0.596	Johnson SU	1.222	-1.742	0.141	0.250
超固结比 $Y_2 = OCR$	2.353	0.657	Johnson SB	0.709	1.887	12.724	0.954
归一化锥尖阻力 $Y_3 = (q_t - \sigma'_v) / \sigma'_v$	9.350	0.678	Johnson SU	1.033	-1.438	1.723	4.157
归一化有效锥尖阻力 $Y_4 = (q_t - u_2) / \sigma'_v$	5.280	0.885	Johnson SU	0.989	-1.593	0.868	1.638
归一化超孔隙水压力 $Y_5 = (u_2 - u_0) / \sigma'_v$	4.709	0.574	Johnson SU	0.971	-0.762	1.116	3.123
孔压比 $Y_6 = B_q$	0.556	0.338	Johnson SU	2.961	0.049	0.544	0.570

表 2 Pearson 相关系数方法与 Spearman 相关系数方法的比较

Table 2 Comparison between Pearson correlation coefficient method and Spearman rank correlation coefficient method

		Pearson 相关系数方法						Spearman 秩相关系数方法					
相关系数矩阵	1	0.631	0.639	0.555	0.527	-0.276	1	0.652	0.679	0.642	0.466	-0.304	
	0.631	1	0.592	0.503	0.562	-0.150	0.652	1	0.582	0.509	0.538	-0.115	
	0.639	0.592	1	0.912	0.739	-0.421	0.679	0.582	1	0.848	0.682	-0.476	
	0.555	0.503	0.912	1	0.439	-0.624	0.642	0.509	0.848	1	0.346	-0.745	
	0.527	0.562	0.739	0.439	1	0.165	0.466	0.538	0.682	0.346	1	0.221	
	-0.276	-0.150	-0.421	-0.624	0.165	1	-0.304	-0.115	-0.476	-0.745	0.221	1	
Gaussian Copula 相关参数矩阵	1	0.590	0.618	0.590	0.514	-0.287	1	0.669	0.700	0.660	0.483	-0.317	
	0.590	1	0.560	0.527	0.521	-0.149	0.669	1	0.600	0.526	0.556	-0.120	
	0.618	0.560	1	0.845	0.673	-0.450	0.700	0.600	1	0.860	0.699	-0.493	
	0.590	0.527	0.845	1	0.474	-0.730	0.660	0.526	0.860	1	0.360	-0.760	
	0.514	0.521	0.673	0.474	1	0.167	0.483	0.556	0.699	0.360	1	0.231	
	-0.287	-0.149	-0.450	-0.730	0.167	1	-0.317	-0.120	-0.493	-0.760	0.231	1	
AIC	-2894.1						-3171.4						
BIC	-2829.8						-3107.2						

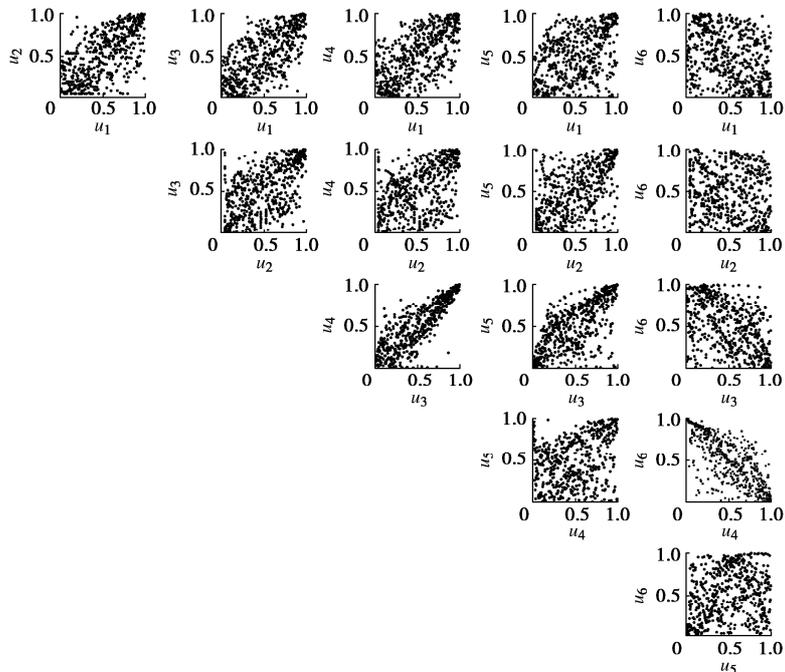


图 1 实测数据在标准均匀分布空间内的散点图

Fig. 1 Measured data points in standard uniform space for soil parameters in CLAY/6/535 database

3.3 岩土体设计参数概率转换模型构建方法的有效性验证

基于上述分析,这里选用 Spearman 秩相关系数方

法构造 CLAY/6/535 数据库联合分布模型和设计参数概率转换模型。考虑到不排水抗剪强度和超固结比分别是边坡稳定性分析和工程中考虑应力历史进行沉降

计算的重要参数, 分别将归一化不排水抗剪强度 s_u/σ'_v 和超固结比 OCR 作为设计参数, 而将其余 4 个孔压静力触探试验指标作为直接测量参数。在给出设计参数概率转换模型前, 首先采用 Leave-one-out 交叉验证方法验证设计参数概率转换模型构建方法的有效性, 结果如图 2 所示。Leave-one-out 交叉验证方法^[40]是统计学中经典的穷举交叉验证方法, 其验证过程为: 在样本集中抽取一个样本作为测试集, 其余的样本作为训练集, 计算建立在训练集上的模型在测试集上的精度, 重复上述过程, 直至遍历所有样本为止。该方法只抽取一个样本作为测试集, 不会由于测试集的高度重合而产生过拟合现象, 在样本较多时测试精度较高。如前所述, 本文算例所采用的全球黏土数据库 CLAY/6/535 由全球 25 个地区 40 个场地的六维岩土体参数实测数据所组成。为此, 在 Leave-one-out 交叉验证过程中, 每次选取一个场地的岩土体参数试验数据作为测试集, 剩余的 39 个场地的岩土体参数试验数据作为训练集建立岩土体参数的联合分布模型和设计参数概率转换模型, 然后利用测试集中的试验数据验证训练集所建设计参数概率转换模型的有效性。重复上述过程 40 次, 即可遍历所有场地试验数据。

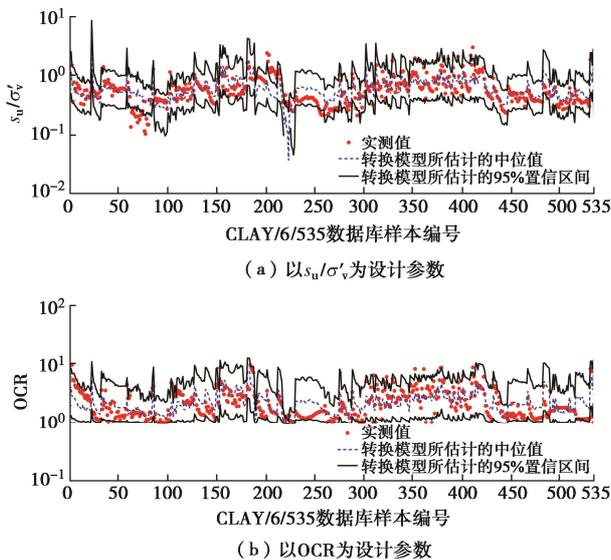


图 2 设计参数概率转换模型构建方法有效性验证

Fig. 2 Validation of proposed method for establishing probabilistic transformation models for design parameters

可以看出, 代表设计参数实测值的红色圆点大部分落入概率转换模型 95%置信区间内, 且部分实测值与概率转换模型的中位值较为接近, 显示了良好的拟合效果。图 2 (a) 中设计参数概率转换模型的 95%置信区间下界部分值小于零, 这是由于设计参数归一化不排水抗剪强度在归一化之后数值较小, Johnson 分

布族将其识别为定义域为 $[-\infty, \infty]$ 的 Johnson SU 分布, 故而在条件概率较小时出现负值, 表现在图 2 (a) 中则为代表 95%置信区间下界的黑色实线出现间断。在图 2 (b) 中, 95%置信区间下界则规律性地在 1 附近波动, 这是由于 CLAY/6/535 数据库中的黏土绝大多数为正常固结土和超固结土, OCR 通常大于等于 1, 因此 Johnson 分布族将其识别为有下界的 Johnson SB 分布, 表现在图 2 (b) 中则为 95%置信区间的下界总是接近或大于 1。总体来说, 所提方法构建的概率转换模型与设计参数实测值较为接近, 从而验证了设计参数概率转换模型构建方法的有效性。

3.4 基于孔压静力触探试验指标的不排水抗剪强度和超固结比概率转换模型

除了 CLAY/6/535 数据库揭示的孔压静力触探试验指标与土的不排水抗剪强度和超固结比具有较强的相关性外, 中国现行规范也为基于孔压静力触探试验指标预测土的不排水抗剪强度和超固结比提供了参考依据。如《岩土工程勘察规范》^[1]在条文说明中明确指出: “利用静探资料可估算土的强度参数、浅基或桩基的承载力、砂土或粉土的液化。只要经验关系经过检验已证实是可靠的, 利用静探资料可以提供有关设计参数”、“利用孔压静探资料有可能评定土的应力历史, 这方面还有待于积累经验”。为此, 本文采用所提设计参数概率转换模型构建方法建立了已知不同孔压静力触探试验指标情况下土的不排水抗剪强度和超固结比的概率转换模型, 结果如表 3 所示。由式 (16) 可知, 正态空间内不排水抗剪强度和超固结比在给定孔压静力触探试验指标条件下服从二维正态分布, 因此表 3 中给出了式 (18) 计算的不排水抗剪强度和超固结比的均值、方差以及两者的相关系数。可以看出, 不排水抗剪强度和超固结比的均值都是给定孔压静力触探试验指标的函数, 而方差和相关系数则是常数(也受给定孔压静力触探试验指标的影响)。因此, 给定孔压静力触探试验指标的具体数值, 利用表 3 中的概率转换模型, 即可同时得到设计参数的条件边缘分布和条件联合分布。此外, 设计参数的不确定性(方差)和相关性(相关系数)随工程勘察信息(直接测量参数的数目)的增加而减小, 且减小的幅度与直接测量参数和设计参数之间的相关性成正比。在直接测量参数数目不变的情况下, 直接测量参数与设计参数之间相关性越强, 设计参数的不确定性和相关性就越小, 这充分说明了引入与设计参数相关性较高的直接测量参数对减小设计参数不确定性、提高概率转换模型精度的重要性。

表 3 基于孔压静力触探试验指标的不排水抗剪强度和超固结比概率转换模型

Table 3 Probabilistic transformation models for undrained shear strength and overconsolidation ratio using CPTU test data

直接测量参数	设计参数 s_u / σ'_v		设计参数 OCR		s_u / σ'_v 与 OCR 相关系数 θ'
	均值 μ'_1	方差 $\sigma_1'^2$	均值 μ'_2	方差 $\sigma_2'^2$	
X_3	$0.697X_3$	0.515	$0.600X_3$	0.640	0.438
X_4	$0.660X_4$	0.564	$0.526X_4$	0.723	0.504
X_5	$0.483X_5$	0.767	$0.556X_5$	0.691	0.551
X_6	$-0.317X_6$	0.900	$-0.120X_6$	0.986	0.671
X_3, X_4	$0.495X_3 + 0.235X_4$	0.500	$0.567X_3 + 0.0392X_4$	0.639	0.440
X_3, X_6	$0.714X_3 + 0.035X_6$	0.514	$0.715X_3 + 0.233X_6$	0.599	0.442
X_4, X_6	$0.993X_4 + 0.438X_6$	0.483	$1.03X_4 + 0.664X_6$	0.537	0.391
X_5, X_6	$0.587X_5 - 0.452X_6$	0.573	$0.616X_5 - 0.262X_6$	0.626	0.482
X_3, X_4, X_5	$0.223X_3 + 0.403X_4 + 0.182X_5$	0.491	$0.505X_3 - 0.187X_4 + 0.505X_5$	0.566	0.422
X_3, X_5, X_6	$1.07X_3 - 0.332X_5 + 0.288X_6$	0.506	$0.682X_3 + 0.0314X_5 + 0.209X_6$	0.598	0.447
X_3, X_4, X_5, X_6	$0.764X_3 + 0.717X_4 - 0.474X_5 + 0.715X_6$	0.450	$0.336X_3 + 0.809X_4 - 0.129X_5 + 0.691X_6$	0.527	0.375

4 结 论

本文提出了基于多维 Gaussian Copula 的岩土体设计参数概率转换模型构建方法。基于全球黏土数据库 CLAY/6/535, 应用所提方法建立了可广泛适用于正常固结至超固结状态下粉质黏土或黏土的强度应力参数概率转换模型。主要结论如下:

(1) 与传统的基于多维正态分布的概率转换模型构建方法相比, 基于多维 Gaussian Copula 的概率转换模型构建方法可以将相关结构与边缘分布分开构建, 该方法不受岩土体参数边缘分布类型限制, 有效地避免了误差由边缘分布向相关结构的传播, 从而为岩土体设计参数概率转换模型的构建提供了有效途径。

(2) 常用的 Pearson 线性相关系数方法在岩土体参数多维联合分布模型中适用性有限, 以 Spearman 相关系数方法为代表的秩相关系数方法简单实用, 避免了复杂边缘分布条件下的积分运算, 同时所构造的联合分布模型拟合效果好, 建议优先采用。

(3) 采用所提方法构建的土体强度应力参数概率转换模型中, 岩土体设计参数的不确定性、互相关性与已知直接测量参数的数目成反比, 即直接测量参数越多, 设计参数的不确定性越小、互相关性越弱。此外, 设计参数不确定性、互相关性也与直接测量参数、设计参数间的相关性成反比, 即直接测量参数与设计参数间的相关性越强, 设计参数的不确定性越小、互相关性越弱。

参考文献:

[1] 岩土工程勘察规范: GB 50021—2001[S]. 2009. (National

Code for Investigation of Geotechnical Engineering: GB 50021—2001[S]. 2009. (in Chinese))

[2] 土工试验方法标准: GB/T 50123—2019[S]. 2019. (Standard for Geotechnical Testing Method: GB/T 50123—2019[S]. 2019. (in Chinese))

[3] 张博庭. 用有限比较法进行拟合优度检验[J]. 岩土工程学报, 1991, 13(6): 84 - 91. (ZHANG Bo-ting. Test of goodness of fit using finite comparison method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1991, 13(6): 84 - 91. (in Chinese))

[4] 张广文, 刘令瑶. 确定随机变量概率分布参数的推广 Bayes 法[J]. 岩土工程学报, 1995, 17(3): 91 - 94. (ZHANG Guang-wen, LIU Lin-yao. Extend Bayes method of probability distribution parameters in conforming random variable[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 17(3): 91 - 94. (in Chinese))

[5] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 不完备概率信息条件下边坡可靠度分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(6): 1027 - 1034. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Reliability analysis of slopes with incomplete probability information[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(6): 1027 - 1034. (in Chinese))

[6] TANG X S, LI D Q, RONG G, et al. Impact of copula selection on geotechnical reliability under incomplete probability information[J]. Computers and Geotechnics, 2013, 49: 264 - 278.

[7] LI D Q, TANG X S, ZHOU C B, et al. Characterization of uncertainty in probabilistic model using bootstrap method and its application to reliability of piles[J]. Applied

- Mathematical Modelling, 2015, **39**(17): 5310 - 5326.
- [8] General Principles on Reliability for Structures: ISO2394: 2015[S]. 2015.
- [9] BJERRUM L. Geotechnical properties of Norwegian marine clays[J]. *Géotechnique*, 1954, **4**(2): 49 - 69.
- [10] KULHAWY F H, MAYNE P W. Manual on Estimating Soil Properties for Foundation Design[R]. Ithaca: Cornell University, 1990.
- [11] SINGH V K, CHUNG S G. Evaluation of overconsolidation ratios from laboratory and in situ tests on Busan clay[J]. *Engineering Geology*, 2015, **199**: 38 - 47.
- [12] 马海鹏, 陈祖煜, 于 洙. 上海地区土体抗剪强度与静力触探比贯入阻力相关关系研究[J]. *岩土力学*, 2014, **35**(2): 536 - 542. (MA Hai-peng, CHEN Zu-yu, YU Shu. Correlations of soil shear strength with specific penetration resistance of CPT in Shanghai area[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2014, **35**(2): 536 - 542. (in Chinese))
- [13] 屈若枫, 徐光黎, 王金峰, 等. 武汉地区典型软土物理力学指标间的相关性研究[J]. *岩土工程学报*, 2014, **36**(增刊2): 113 - 119. (QU Ruo-feng, XU Guang-li, WANG Jin-feng, et al. Correlations of physical and mechanical properties of typical soft soils in Wuhan[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, **36**(S2): 113 - 119. (in Chinese))
- [14] 宋许根, 王志勇, 柏威伟, 等. 珠海西部中心城区大面积深厚软土工程特性研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2019, **38**(7): 1434 - 1451. (SONG Xu-gen, WANG Zhi-yong, BAI Wei-wei, et al. Study on engineering characteristics of large-scale deep soft soil in the central area of western Zhuhai[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2019, **38**(7): 1434 - 1451. (in Chinese))
- [15] 郭林坪, 穆 坤, 杨爱武, 等. 天津滨海新区黏性土物理力学性质指标相关性[J]. *地下空间与工程学报*, 2019, **15**(2): 452 - 457. (GUO Lin-ping, MU Kun, YANG Ai-wu, et al. Correlation analysis on physic-mechanical properties of clayey soil in Binhai new area in Tianjin[J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2019, **15**(2): 452 - 457. (in Chinese))
- [16] MAYNE P W, PEUCHEN J, BALTOUKAS D. Piezocone evaluation of undrained strength in soft to firm offshore clays [C]// *Frontiers in Offshore Geotechnics III: Proceedings of the 3rd International Symposium on Frontiers in Offshore Geotechnics*, 2015, Oslo.
- [17] PHOON K K. Reliability-based design of foundations for transmission line structures[D]. Ithaca: Cornell University, 1995.
- [18] PHOON K K, KULHAWY F H. Evaluation of geotechnical property variability[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1999, **36**(4): 625 - 639.
- [19] CHING J, PHOON K K, CHEN Y C. Reducing shear strength uncertainties in clays by multivariate correlations[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2010, **47**(1): 16 - 33.
- [20] CHING J, CHEN J R, YE H J Y, et al. Updating uncertainties in friction angles of clean sands[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2012, **138**(2): 217 - 229.
- [21] CHING J, PHOON K K. Establishment of generic transformations for geotechnical design parameters[J]. *Structural Safety*, 2012, **35**: 52 - 62.
- [22] CHING J, PHOON K K. Modeling parameters of structured clays as a multivariate normal distribution[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2012, **49**(5): 522 - 545.
- [23] CHING J, PHOON K K, CHEN C H. Modeling piezocone cone penetration (CPTU) parameters of clays as a multivariate normal distribution[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2014, **51**(1): 77 - 91.
- [24] D'IGNAZIO M, PHOON K K, TAN S A, et al. Correlations for undrained shear strength of finnish soft clays[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2016, **53**(10): 1628 - 1645.
- [25] LIU S, ZOU H, CAI G, et al. Multivariate correlation among resilient modulus and cone penetration test parameters of cohesive subgrade soils[J]. *Engineering Geology*, 2016, **209**: 128 - 142.
- [26] ZOU H, LIU S, CAI G, et al. Multivariate correlation analysis of seismic piezocone penetration (SCPTU) parameters and design properties of Jiangsu quaternary cohesive soils[J]. *Engineering Geology*, 2017, **228**: 11 - 38.
- [27] LUMB P. Safety factors and the probability distribution of soil strength[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1970, **7**(3): 225 - 242.
- [28] 苏永华, 何满潮, 孙晓明. 大子样岩土随机参数统计方法[J]. *岩土工程学报*, 2001, **23**(1): 117 - 119. (SU Yong-hua, HE Man-chao, SUN Xiao-ming. Approach on asymptotic approximations of polynomials for probability density function of geotechnics random parameters[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2001, **23**(1): 117 - 119. (in Chinese))
- [29] 陈立宏, 陈祖煜, 刘金梅. 土体抗剪强度指标的概率分布类型研究[J]. *岩土力学*, 2005, **26**(1): 37 - 40. (CHEN

- Li-hong, CHEN Zu-yu, LIU Jin-mei. Probability distribution of soil strength[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, **26**(1): 37 - 40. (in Chinese))
- [30] 张 蕾, 唐小松, 李典庆, 等. 基于 Copula 函数的岩土结构物系统可靠度分析[J]. *岩土力学*, 2016, **37**(1): 193 - 202. (ZHANG Lei, TANG Xiao-song, LI Dian-qing, et al. System reliability analysis of geotechnical structures based on the Copula function[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, **37**(1): 193 - 202. (in Chinese))
- [31] WANG F, LI H. Distribution modeling for reliability analysis: Impact of multiple dependences and probability model selection[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, **59**: 483 - 499.
- [32] 唐小松. 基于 Copula 理论的岩土体参数不确定性建模与可靠度分析[D]. 武汉: 武汉大学, 2014. (TANG Xiao-song. Uncertainty Modeling of Correlated Geotechnical Parameters and Reliability Analysis Using Copulas[D]. Wuhan: Wuhan University, 2014. (in Chinese))
- [33] JOE H. Families of m-variate distributions with given margins and $m(m-1)/2$ bivariate dependence parameters[J]. *Lecture Notes-Monograph Series*, 1996: 120 - 141.
- [34] SKLAR A. Fonctions de répartition à dimensions et leurs marges[J]. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 1959, **8**: 229 - 231. (SKLAR A. N-dimensional distribution functions and their margins [J]. *Publications of the Institute of Statistics of the University of Paris*, 1959, **8**: 229 - 231. (in French))
- [35] CHERUBINI U, LUCIANO E, VECCHIATO W. *Copula Methods in Finance*[M]. New York: John Wiley & Sons, 2004.
- [36] MARI D D, KOTZ S. *Correlation and Dependence*[M]. Singapore: World Scientific, 2001.
- [37] NELSEN R B. *An introduction to Copulas*[M]. 2nd ed. New York: Springer, 2006.
- [38] IMAN R L, CONOVER W J. A distribution-free approach to inducing rank correlation among input variables[J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1982, **11**(3): 311 - 334.
- [39] DING P. On the conditional distribution of the multivariate t distribution[J]. *The American Statistician*, 2016, **70**(3): 293 - 295.
- [40] KEARNS M, RON D. Algorithmic stability and sanity-check bounds for leave-one-out cross-validation[J]. *Neural Computation*, 1999, **11**(6): 1427 - 1453.

新书介绍：《非饱和土与特殊土力学——理论创新、科研方法及治学感悟》

陈正汉教授的专著《非饱和土与特殊土力学——理论创新、科研方法及治学感悟》由科学出版社于 2021 年 7 月出版发行。全书内容分为三篇及附录。正文分为 7 章：第一篇（第 1 章和第 2 章）系统介绍作者及其学术团队在非饱和土与特殊土力学的基本理论和本构模型研究方面取得的主要创新成果，对非饱和土与特殊土力学及其工程应用的新进展进行全面系统的总结，并对今后的研究工作提出若干建议；第二篇（第 3 章至第 5 章）对土力学的理论模型和科学研究方法进行系统论述，总结作者在加强团队创新文化建设和学风建设方面的经验，阐述知行合一理念的 formation 及对发展岩土力学理论体系的思考；第三篇（第 6 章和第 7 章）是作者的学术奋斗生涯和治学感悟。书末

附录共 17 个，主要介绍第十届全国土力学及岩土工程学术会议的盛况和办会经验、非饱和土与特殊土专业委员会的章程及开展的国内外学术交流活动、部分同行专家对作者学术成果的评价。内容丰富、自主创新、深入系统、推理严谨、数据翔实、旁征博引、表述精炼是该书的鲜明特色。

该书可供从事岩土力学与工程的教学、科研人员及研究生参考阅读。

顺便指出，陈正汉教授与秦冰博士合著的《缓冲/回填材料的热-水-力耦合特性及其应用》一书已由科学出版社在 2017 年 7 月出版发行。该书共 10 章，是国内关于高放废物深地质处置库的缓冲/回填材料研究成果的第一本专著。

(本刊编辑部)